確率論の総合的研究

AUTHOR(S):
重川, 一郎

確率論の総合的研究

（課題番号　１４２０４００８）

平成14年度～平成16年度
科学研究費補助金（基盤研究(A)(1)）

研究成果報告書

平成17年３月

研究代表者　重川一郎
（京都大学大学院理学研究科教授）

確率論の総合的研究

（課題番号　１４２０４００８）

平成14年度～平成16年度
科学研究費補助金（基盤研究(A)(1)）

研究成果報告書

平成17年３月

研究代表者　重 川 一 郎
（京都大学大学院理学研究科教授）

はしがき

本研究は別記の分担者を中心に日本数学会統計数学分科会確率論部門のメンバーおよび関連分野の研究者の全面的な協力を得て「確率論の総合的研究」を行ったものである．本冊子はその研究成果報告書である．

科学研究費補助金の援助により，研究成果の発表と討論による検討を行うことを目的として，平成14年度に7回，平成15年度に9回，平成16年度に8回の研究集会を開催し，同時に研究情報の収集と新たな研究課題の発見を図った．以下に収録したそれぞれの報告が示すとおりいずれも充実した集会であり，十分な成果を上げることができた．なお，一部には他の科学研究費の代表者による研究と協力して企画されたもの，あるいは他の研究所における研究計画と関連して行われたものもあった．

これらの研究集会の中で，平成15年度と平成16年度には大学院生を含む若手研究者に資するべく確率論サマースクールを開催した．平成15年度には多様体上の拡散過程，無限粒子系，Fermion 測度の3つをテーマとし，平成16年度には一次元拡散過程，Rough Path Analysis の2つをテーマに行われ，いずれも丁寧な講義で教育的なものであった．これらは別途予稿集を作成し，今後の研究への便宜を期した．

本件級の特色の一つとして，平成14年度に9名，平成15年度に3名，平成16年度に2名の外国人研究者を招聘したことがあげられる．このように多数の外国人研究者を科学研究費補助金によって招聘することが可能になったのは，外国旅費が認められて以来のことである．このような科学研究費の取り扱いの変化にともなって，ここの分担者と深いつながりを持ち，しかも現在最先端の領域で活躍中の研究者であれば若手研究者であっても割合自由に招聘することが可能となった．今回，海外の研究者との交流を通して直接的，あるいは間接的に多くの成果を上げることができた．これは今後の確率論研究の発展を考える上で大変意義深いことであった．それぞれの外国人研究者について，招聘の経緯・経過，滞在中の公演内容，招聘の成果など，本冊子で具体的に詳しく報告した．

最後に，本研究の遂行にご協力いただいた分担者をはじめとする国内外の多くの研究者の方々，また研究を裏から支えて下さった多くの事務職員の方々に心から感謝を申し上げる．

2005年3月
重川 一郎

課題番号： 14204008
研究課題： 確率論の総合的研究
研究組織：

研究代表者	重川 一郎	(京都大学・大学院理学研究科・教授)
研究分担者	小倉 幸雄	(佐賀大学・理工学部・教授)
	富崎 松代	(奈良女子大学・理学部・教授)
	竹田 雅好	(東北大学・大学院理学研究科・教授)
	長田 博文	(九州大学・大学院数理学研究院・教授)
	熊谷 隆	(京都大学・数理解析研究所・助教授)
	原 啓介	(立命館大学・理工学部・助教授)
	舟木 直久	(東京大学・大学院数理科学研究科・教授)
	樋口 保成	(神戸大学・理学部・教授)
	南 就将	(筑波大学・数学系・助教授)
	今野 紀雄	(横浜国立大学・大学院工学研究院・助教授)
	吉田 伸生	(京都大学・大学院理学研究科・助教授)
	白井 朋之	(九州大学・大学院数理学研究院・助教授)
	会田 茂樹	(大阪大学・大学院基礎工学研究科・教授)
	日野 正訓	(京都大学・大学院情報学研究科・助教授)
	前島 信	(慶応義塾大学・理工学部・教授)
	長井 英生	(大阪大学・大学院基礎工学研究科・教授)
	杉田 洋	(大阪大学・大学院理学研究科・教授)
	高信 敏	(金沢大学・大学院自然科学研究科・教授)
	関根 順	(大阪大学・大学院基礎工学研究科・講師)
	盛田 健彦	(広島大学・大学院理学研究科・教授)
	杉浦 誠	(琉球大学・理学部・助教授)

以上 22 名

研究経費:

平成 14 年度	12,200 千円
平成 15 年度	9,200 千円
平成 16 年度	9,400 千円
計	30,800 千円

目次

[1] 研究成果

1: 論文リスト

重川 一郎

[1] I. Shigekawa, Littlewood-Paley inequality for a diffusion satisfying the logarithmic Sobolev inequality and for the Brownian motion on a Riemannian manifold with boundary, *Osaka J. Math.*, **39** (2002), 897–930.

[2] Y.-S. Yun and I. Shigekawa, The existence of solutions for stochastic differential inclusion, *Far East J. Math. Sci.*, **7** (2002), 205–212.

[3] I. Shigekawa, Vanishing theorem of the Hodge-Kodaira operator for differential forms on a convex domain of the Wiener space, *Infin. Dimens. Anal. Quantum Probab. Relat. Top.*, **6** (2003), 53–63.

[4] I. Shigekawa; Orlicz norm equivalence for the Ornstein-Uhlenbeck operator, Advanced Studies in Pure Mathematics, **41**, "*Stochastic Analysis and Related Topics in Kyoto*," ed. by H. Kunita et al., pp.301–317, Kinokuniya, Tokyo, 2004.

[5] I. Shigekawa, L^p multiplier theorem for the Hodge-Kodaira operator, "*Seminaire de Probabilite XXXVIII*," Lecture Notes in Math. vol. 1857, pp. 226-246, Springer, Berlin-Heidelberg-New York, 2005

小倉 幸雄

[6] Y. Ogura, M. Tomisaki, M. Tsuchiya, Convergence of local type Dirichlet forms to a non-local type one, *Ann. Inst. Henry Poincaré*, **38** (2002), 507-556.

[7] Li Shoumei, Y. Ogura, Convergence in graph for fuzzy valued martingales and smartingales, in *Statistical Modeling, Analysis, and Management of Fuzzy Data*, M. A. Gil, Bertoluzza and D. A. Ralescu (eds.), 73-89, Physica-Verlag, 2002.

[8] Li Shoumei, Y. Ogura, A convergence theorem of fuzzy-valued martingales in the extended Hausdorff metric H_∞, *Fuzzy Sets and Systems*, **135**(2003), 391-399.

[9] Li Shoumei, Y. Ogura, Frank N. Proske and Madan L. Puri Central limit theorems for generalized set-valued random variables, *Jour. Math. Anal. Appl.*, **285** (2003), 250-263.

[10] H. Matsumoto, Y. Ogura, Markov or non-Markov property of cM-X processes, *Jour. Math. Soc. Japan*, **56**(2004), 519-540.

[11] Y. Ogura, Li Shoumei, On limit theorems for random fuzzy sets including large deviation principles, in *Soft Methodology and Random Information Systems*, Miguel Lopéz-Díaz *et al.* (eds.), 32–44, Springer, 2004.

富崎 松代

[12] Y. Ogura, M. Tomisaki and M. Tsuchiya, Convergence of local type Dirichlet forms to a non-local type one, Ann. I. H. Poincaré, PR **34**, 4 (2002), 507–556.

[13] Z. Li, T. Shiga and M. Tomisaki, A conditional limit theorem for generalized diffusion processes, J. Math. Kyoto Univ., **43**, no. 3 (2003) 567–583.

竹田 雅好

[14] M. Takeda, D. Kim and J. Ying, Some variational formulas on additive functionals of symmetric Markov chains, Proc. Amer. Math. Soc., **130** (2002), 2115–2123.

[15] M. Takeda, Conditional gaugeability and subcriticality of generalized Schrödinger operators, J. Funct. Anal., **191** (2002), 343–376.

[16] M. Takeda, Large deviation principle for additive functionals of Brownian motion corresponding to Kato measures, Potential Analysis, **19** (2003), 51–67.

[17] M. Takeda and K. Tsuchida, Criticality of generalized Schrödinger operators and differentiability of spectral functions, Advanced Studies in Pure Mathematics, **41**, Math. Soc. of Japan, (2004), 333–350.

[18] M. Takeda and T. Uemura, Subcriticality and gaugeability for symmetric α-stable processes, Forum Math., **16** (2004), 505–517.

[19] M. Takeda, Z.Q. Chen, P.J. Fitzsimmons, J. Ying and T.S. Zhang, Absolute continuity of symmetric Markov processes, Ann. Probab., **32** (2004), 2067–2098.

長田 博文

[20] H. Osada, Harnach inequalities for exotic Brownian motions. Kyushu J. Math. ,**56-2** (2002), 363–380.

[21] H. Osada, Non-collision and collision properties of Dyson's model in infinite dimension and other stochastic dynamics whose equilibrium states are determinantal random point fields, Stochastic analysis on large scale interacting systems, 325–343, Adv. Stud. Pure Math., **39**, Math. Soc. Japan, Tokyo, 2004.

熊谷 隆

[22] R.F. Bass and T. Kumagai, Laws of the iterated logarithm for the range of random walks in two and three dimensions, Ann. Probab., **30** (2002), 1369 –1396.

[23] B.M. Hambly, J. Kigami and T. Kumagai, Multifractal formalisms for the local spectral and walk dimensions, Math. Proc. Cambridge Philos. Soc., **132** (2002), 555–571.

[24] T.Kumagai, Some remarks for jump processes on fractals, In: P. Grabner and W. Woess (eds.), Trends in Math.: Fractals in Graz 2001, pp. 185-196, Birkhäuser, 2002.

[25] B.M. Hambly and T. Kumagai, Asymptotics for the spectral and walk dimension as fractals approach Euclidean space, Fractals, **10** (2002), 403–412.

[26] T. Kumagai, Function spaces and stochastic processes on fractals, 数理解析研究所講究録, **1293** (2002), 42–54.

[27] Z.Q. Chen and T.Kumagai, Heat kernel estimates for stable-like processes on d-sets, Stoch. Proc. Their Appl., **108** (2003), 27–62.

[28] B.M.Hambly and T.Kumagai, Diffusion processes on fractal fields and their large deviations, Probab. Theory Relat. Fields, **127** (2003), 305–352.

[29] B.M. Hambly and T. Kumagai, Heat kernel estimates for symmetric random walks on a class of fractal graphs and stability under rough isometries, In: Fractal geometry and applications: A Jubilee of B. Mandelbrot (M.L. Lapidus and M. van Frankenhuijsen (eds.)), Proc. of Symposia in Pure Math. **72**, Part 2, pp. 233–260, Amer. Math. Soc. 2004.

[30] T.Kumagai, Homogenization on Finitely Ramified Fractals, Advanced Studies in Pure Math., **41**, Stochastic Analysis and Related Topics in Kyoto (H. Kunita et al. (eds.)), pp. 189–207, MSJ, 2004.

[31] B.M. Hambly and T. Kumagai, Heat Kernel Estimates and Law of the Iterated Logarithm for Symmetric Random Walks on Fractal Graphs, In: Discrete Geometric Analysis, (M. Kotani et al. (eds.)), Contemporary Mathematics **347**, pp. 153–172, Amer. Math. Soc. 2004.

[32] T. Kumagai, Function spaces and stochastic processes on fractals, In: Fractal geometry and stochastics III (C. Bandt et al. (eds.)), Progr. Probab. **57**, pp. 221–234, Birkhäuser, 2004.

[33] T. Kumagai, Heat kernel estimates and parabolic Harnack inequalities on graphs and resistance forms, Publ. RIMS, Kyoto Univ., **40** (2004), 793–818.

[34] T. Kumagai, フラクタル上の解析学の展開，数学（岩波書店）第５６巻４号 (2004), 337–350.

[35] T. Kumagai, Brownian motions on fractals, Bulletin de liaison, **7** (2004), 1–17.

原 啓介

[36] K. Hara, Finite dimensional determinants as characteristic functions of quadratic Wiener functionals, Electron. Comm. Probab., **9** (2004), 26–35.

[37] K. Hara, Quadratic Wiener functional and dynamics on Grassmannians — the framework and the simplest example, in "Stochastic Analysis and Mathematical Physics (SAMP/ ANESTOC 2002)", ed. R. Rebolledo, J. Rezende, J.-C. Zambrini., World Scientific, (2004).

舟木 直久

[38] T. Funaki, Hydrodynamic limit for $\nabla\phi$ interface model on a wall, Probab. Theory Relat. Fields, **126** (2003), 155–183.

[39] T. Funaki, Stochastic models for phase separation and evolution equations of interfaces, Sugaku Expositions, **16** (2003), 97–116.

[40] T. Funaki and H. Sakagawa, Large deviations for $\nabla\varphi$ interface model and derivation of free

boundary problems, In "Stochastic Analysis on Large Scale Interacting Systems," Advanced Studies in Pure Mathematics, **39** (2004), 173–211.

[41] T. Funaki, Zero temperature limit for interacting Brownian particles, I. Motion of a single body, Ann. Probab., **32** (2004), 1201–1227.

[42] T. Funaki, Zero temperature limit for interacting Brownian particles, II. Coagulation in one dimension, Ann. Probab., **32** (2004), 1228–1246.

樋口 保成

[43] Y.Higuchi and M. Takei, Some results on the phase structure of the two-dimensional Widom-Rowlinson model, *Osaka J. Math.*, **41**(2004), 237–255.

[44] Y. Higuchi, J. Murai and J. Wang, The Dobrushin-Hryniv Theory for the two-dimensional latice Widom-Rowlinson model, Advances in Pure Mathematics, **39** (2004), 233–281.

南 就将

[45] T. Tsutsui, N. Minami, M. Koiwai, T. Hamaoka, I. Yamane and K. Shimura, A stochastic-modeling evaluation of the foot-and-mouth-disease survey conducted after the outbreak in Miyazaki, Japan in 2000. Preventive Veterinary Medicine **61** (2003), 45–58

[46] N. Minami, On the number of vertices with a given degree in a Galton-Watson tree, to appear in Adv. Appl. Prob. (March, 2005).

今野 紀雄

[47] Norio Konno, Rinaldo Schinazi and Hideki Tanemura, Coexistence results for a spatial stochastic epidemic model, Markov Processes and Related Fields, **10**, pp.367–376 (2004).

[48] Makoto Katori, Norio Konno, Aidan Sudbury and Hideki Tanemura, Dualities for the Domany-Kinzel model, Journal of Theoretical Probability, **17**, pp.131–144 (2004).

[49] Norio Konno, Takao Namiki and Takahiro Soshi, Symmetry of distribution for the one-dimensional Hadamard walk, Interdisciplinary Information Sciences, **10**, pp.11–22 (2004).

[50] Norio Konno, Kenichi Mitsuda, Takahiro Soshi and Hyun Jae Yoo, Quantum walks and reversible cellular automata Physics Letters A, **330**, pp.408–417 (2004).

[51] Norio Konno, Toshihiko Kunimatsu and Xia Ma, From stochastic partial difference equations to stochastic cellular automata through the ultra-discretization, Applied Mathematics and Computation, **155**, pp.727–735 (2004).

[52] Naoki Masuda and Norio Konno, Subcritical behavior in the alternating supercritical Domany-Kinzel dynamics, The European Physical Journal B, **40**, pp.313–319 (2004).

[53] Norio Inui, Yoshinao Konishi and Norio Konno, Localization of two-dimensional quantum walks, Physical Review A, **69**, 052323 (2004).

[54] Naoki Masuda Hiroyoshi Miwa and Norio Konno, Analysis of scale-free networks based on a threshold graph with intrinsic vertex weights, Physical Review E, **70**, 036124 (2004).

[55] Naoki Masuda and Norio Konno, Return times of random walks on generalized random graphs, Physical Review E, **69**, 066113 (2004).

[56] Naoki Masuda, Norio Konno and Kazuyuki Aihara, Transmission of SARS in dynamical small-world networks, Physical Review E, **69**, 031917 (2004).

[57] Norio Konno, Takao Namiki, Takahiro Soshi and Aidan Sudbury, Absorption problems for quantum random walks in one dimension, Journal of Physics A: Mathematical and General, **36**, pp.241–253 (2003).

[58] Norio Konno, Dualities for a class of finite range probabilistic cellular automata in one dimension, Journal of Statistical Physics, **106**, pp.915–922 (2002).

[59] Norio Konno, Self-duality for multi-state probabilistic cellular automata with finite range interactions, Journal of Statistical Physics, **106**, pp.923–930 (2002).

[60] Norio Konno, Quantum random walks in one dimension, Quantum Information Processing, **1**, pp.345–354 (2002).

[61] Norio Konno, Limit theorems and absorption problems for quantum random walks in one dimension, Quantum Information and Computation, **2**, pp.578–595 (2002).

[62] Makoto Katori, Norio Konno and Hideki Tanemura, Limit theorems for the non-attractive Domany-Kinzel model, Annals of Probability, **30**, pp.933–947 (2002).

[63] Kazunori Sato, Naoto Yoshida and Norio Konno, Parity law for population dynamics of N-species with cyclic advantage competitions, Applied Mathematics and Computation, **126**, pp.255–270 (2002).

吉田伸生

[64] H. Tanemura and N. Yoshida, Localization transition of d-friendly walkers, Probab. Theory Related Fields **125** (2003), 593–608.

[65] N. Yoshida, Phase transition from the viewpoint of relaxation phenomena, Review in Mathematical Pysics, **15**, No. 7 (2003), 765–788.

[66] F. Comets, T. Shiga and N. Yoshida, Directed Polymers in Random Environment: Path Localization and Strong Disorder, Bernoulli, **9**(3), (2003), 705–723.

[67] F. Comets, T. Shiga and N. Yoshida, Probabilistic analysis of directed polymers in random environment: a review, Advanced Studies in Pure Mathematics, **39**, (2004), 115–142.

[68] F. Comets and N. Yoshida, Some New Results on Brownian Directed Polymers in Random Environment, RIMS Kokyuroku **1386**, 50–66, (2004).

白井 朋之

[69] T. Shirai and H.J. Yoo, Glauber dynamics for fermion point processes, Nagoya Math. J. **168** (2002), 139–166.

[70] T. Shirai and Y. Takahashi, Random point fields associated with certain Fredholm determinants I: fermion, Poisson and boson point processes J. Funct. Anal. **205** (2003), 414–463.

[71] T. Shirai and Y. Takahashi, Random point fields associated with certain Fredholm determinants II: fermion shifts and their ergodic and Gibbs properties Ann. Probab. **31** (2003), 1533–1564.

[72] T. Shirai and Y. Takahashi Random point fields associted with fermion, boson and other statistics, Adv. Stud. Pure Math. **39** (2004), 345–354.

[73] T. Shirai, Long time behavior of the transition probability of a random walk with drift on an abelian covering graph, Tohoku Math. J. **55** (2003), 255–269.

[74] T. Shirai and Yu. Higuchi, Isoperimetric constants of (d, f)-regular planar graphs, Interdiscip. Inform. Sci. **9** (2003), 221–228.

[75] T. Shirai and Yu. Higuchi, Some spectral and geometric properties for infinite graphs Contemp. Math. **347** (2004), 29–56.

会田 茂樹

[76] S. Aida and T-S. Zhang, On the small time asymptotics of diffusion processes on path groups, Potential Analysis **16** (2002), 67–78.

[77] S. Aida, On a certain semiclassical problem on Wiener spaces, Publ.Res.Inst.Math.Sci. **39** (2003), 365–392.

[78] S. Aida, Semiclassical limit of the lowest eigenvalue of a Schrödinger operator on a Wiener space, J. Funct. Anal. **203** (2003), 401–424.

[79] S. Aida, Witten Laplacian on pinned path group and its expected semiclassical behavior, IDAQP, **6** No.supp01, (2003) 103–114.

[80] S. Aida, Weak Poincare inequalities on domains defined by Brownian rough paths, Annals of Probability, **32** (2004), 3116–3137.

日野 正訓

[81] M. Hino, On short time asymptotic behavior of some symmetric diffusions on general state spaces, Potential Analysis, **16** (2002), 249-264.

[82] M. Hino and J. A. Ramirez, Small-time Gaussian behavior of symmetric diffusion semigroups, Annals of Probability, **31** (2003), 1254–1295.

[83] M. Hino, On Dirichlet spaces over convex sets in infinite dimensions, Finite and infinite dimensioanl analysis in honor of Leonard Gross (New Orleans, LA, 2001), 143-156, Contemporary Mathematics 317, American Mathematical Society, 2003.

[84] M. Hino, Integral representation of linear functionals on vector lattices and its application to BV functions on Wiener space, Stochastic Analysis and Related Topics in Kyoto in honour of Kiyosi Ito, 121–140, Advanced Studies in Pure Mathematics, Vol.41, 2004.

前島 信

[85] M. Maejima and J. Rosinski, Type G distributions on R^d, J. Theoret. Probab., **15** (2002), 323–341.

[86] K. Akita and M. Maejima, On certain self-decomposable self-similar processes with independent increments, Statist. Probab. Letters, **59** (2002), 53–59.

[87] M. Maejima, Limit theorems for infinite variance sequences, in "Long-Range Dependence," Birkhauser, 2002, 157–164.

[88] P. Cheridito, H. Kawaguchi and M. Maejima, Fractional Ornstein-Uhlenbeck processes, Electron. J. Probab., **8** paper no. 3, (2003), 1–14.

[89] M. Maejima and K. Yamamoto, Long-memory stable Ornstein-Uhlenbeck processes, Electron. J. Probab., **8**, paper no. 19, (2003), 1–18

[90] M. Maejima and K. Sato, Semi-Levy processes, semi-selfsimilar additive proceses, and semi-stationary Ornstein-Uhlenbeck type processes, J. Math. Kyoto Univ., **43** (2004), 609–639.

[91] 前島 信, Trimmed Sums (in Japaneses) 統計数理, **52** (2004), 45–62.

長井 英生

[92] H. Nagai, Risk-sensitive portfolio optimization with full and partial information, "Stochastic Analysis and Related Topics," Advanced Studies in Pure Mathematics **41** (2004), 257–278.

[93] H. Nagai, Risky fraction processes and Problems with Transaction Costs, "Stochastic Processes and Applications to Mathematical Finance", Eds. J. Akahori, S. Ogawa and S. Watanabe, World Scientific (2004), 271–288.

[94] H. Nagai, Optimal strategies for risk-sensitive portfolio optimization problems for general factor models, SIAM J. Cont. Optim., **41** (2003), 1779–1800.

[95] H. Nagai, Optimal strategies for ergodic control problems arising from portfolio optimization, Stochastic Theory and Control, Ed. B. Pasik-Duncan, Springer Lect. Notes in Cont. and Inf. Sciences, (2002), 353–368.

[96] K. Kuroda and H. Nagai, Risk-sensitive portfolio optimization on infinite time horizon, Stochastics and Stochastics Reports, vol.73 (2002), 309–332

[97] H. Nagai and S. Peng, Risk-sensitive dynamic portfolio optimization with partial information on infinite time horizon, Annals of Applied Probability, **12** (2002), 173–195.

[98] H. Nagai and S. Peng, Risk-sensitive optimal investment problems with partial information on infinite time horizon, Recent developments in Mathematicl finance, Ed. J. Yong, World Scientific, (2002), 85–98.

杉田 洋

[99] H. Sugita, An analytic approach to secure pseudo-random generation, Proceedings of 2003 Ritsumeikan Symposium on Stochastic Processes and its Applications to Mathematical Finace, World Scientific, (2004) 355–368.

[100] 杉田 洋, 複雑な関数の数値積分とランダムサンプリング, "数学", **56**-1, 岩波書店 (2004), 1–8.

[101] H. Sugita, Monte-Carlo integration using cryptographically secure pseudo-random generator, "Numerical Methods and Applications," Lecture Notes in Computer Science 2542, Springer (2003), 140–146.

[102] H. Sugita and S. Takanobu, The probability of two integers to be co-prime, revisited — on the behavior of CLT-scaling limit, Osaka J. Math., 40-4 (2003), 945–976.

[103] H.Sugita, Dynamic random Weyl sampling for drastic reduction of randomness in Monte Carlo integration, Mathematics and Computers in Simulation 62 (2003), 529–537.

[104] H. Kubota and H. Sugita, Probabilistic proof of limit theorems in number theory by means of adeles, Kyushu Jour. Math., 56 (2002), 391–404.

[105] H. Sugita, Robust numerical integration and pairwise independent random variables, Jour. Comput. Appl. Math., 139 (2002), 1–8.

高信 敏

[106] S. Takanobu, On the strong-mixing property of skew product of binary transformation on 2-dimensional torus by irrational rotation, *Tokyo J. Math.*, **25**, 1–15, 2002.

[107] H. Sugita and S. Takanobu, The probability of two integers to be co-prime, revisited — on the behavior of CLT-scaling limit, *Osaka J. Math.*, **40**, 945–976, 2003.

[108] 高信敏, Multidimensional Brownian local times in the Malliavin calculus, 数理解析研究所講究録 **1351**「確率数値解析に於ける諸問題，VI」, 1–24, 2004 年 1 月.

関根 順

[109] J. Sekine, On superhedging under delta constraints, Applied Mathematical Finance, **9** (2002), 103–121.

[110] J. Sekine, An approximation for exponential hedging, Stochastic Analysis and Related Topics in Kyoto, In honour of Kiyosi Itô, ASPM, **41** (2004), 279–299.

[111] J. Sekine, Dynamic minimization of worst conditional expectation of shortfall, Mathematical Finance. **14**/4, (2004), 605–618.

盛田 健彦

[112] T. Morita, Piecewise C^2 perurbation of Lasota-Yorke maps and their ergodic properties, Osaka J. Math., **40** (1) (2003), 207–233

[113] T. Morita, Construction of K-stable foliations for two-dimensional dispersing billiards without eclipse, J. Math. Soc. Japan **56** (3) (2004) 803–831.

松本 裕行

[114] H. Matsumoto and M. Yor, Interpretation via Brownian motion of some independence properties between GIG and gamma variables, Stat. Prob. Lett., **61** (2003), 253–259.

[115] H. Matsumoto On Dufresne's relation between the probability laws of exponential functionals of Brownian motions with different drifts, J. Appl. Prob., **35** (2003), 184–206.

[116] H. Matsumoto annd Y. Ogura, Markov or non-Markov property of $cM - X$ processes, J. Math. Soc. Japan, **56** (2004), 519–540.

2: 著書リスト

[B1] I. Shigekawa, "*Stochastic analysis*," Translations of Mathematical Monographs, 224, Iwanami Series in Modern Mathematics, American Mathematical Society, Providence, 2004, pp. 182.

[B2] Li Shoumei, Y. Ogura, V. Kreinovich, *Limit Theorems and Applications of Set-valued and Fuzzy-valued Random Variables*, Kluwer Academic Publishers, 391+xii pages, 2002.

[B3] 舟木直久・内山耕平，ミクロからマクロへ，1. 界面モデルの数理，シュプリンガー・フェアラーク東京，2002 年 4 月，283+xi ページ.

[B4] 内山耕平・舟木直久，ミクロからマクロへ，2. 格子気体の流体力学極限，シュプリンガー・フェアラーク東京，2002 年 12 月，303+xvi ページ.

[B5] T. Funaki and H. Osada (editors): Stochastic Analysis on Large Scale Interacting Systems, the Proceedings of Shonan/Kyoto meetings, 2002, Advanced Studies in Pure Mathematics, **39**, Mathematical Society of Japan, 2004, 395+11 pages.

[B6] 舟木直久， 確率論，朝倉書店，2004 年 11 月，263+viii ページ.

[B7] 今野 紀雄，コンタクト・プロセスの相転移現象，横浜図書，2002 年

[B8] P. Embrechts and M. Maejima, Selfsimlar Processes Princeton University Press, 2002.

[B9] 仁科 一彦・小谷 真一・長井 英生 編 「金融工学」大阪大学出版会 (2003)

[B10] 盛田 健彦，実解析と測度論の基礎，培風館 ，2004 年 5 月.

[B11] 松本 裕行，応用のための確率論・確率過程，サイエンス社，2004 年.

3: 研究成果

重川 一郎

Wiener 空間上を中心とする無限次元空間上での拡散過程に関わる問題を考察した．以下項目別に述べる．

(1) Littlewood-Paley 不等式に関する研究．ここでは対数 Sobolev 不等式を仮定し，抽象的に Ricci にあたるような Γ_2 の負の部分の指数可積分性を基本的な仮定として Littlewood-Paley 不等式を示し，それから勾配作用素と，生成作用素の平方とのノルムの同地性を導いた．

(2) Wiener 空間の部分空間における Hodge-Kodaira 型の作用素のスペクトルの跳びについて．部分集合は境界があるために境界条件を設定する必要があるが，よく知られている絶対境界条件と相対境界条件の 2 種類について考察した．ともに境界が凸である状況を考えたが，これらは境界の第二基本形式の正値性によって記述できる．Malliavin 解析の枠組みで部分積分の公式の境界からの寄与を記述することが基本的である．

(3) 分数冪対数 Sobolev 不等式．最近 Wang は L^2 の枠組みにおいて，分数冪対数 Sobolev 不等式と，強い Poincaré 不等式，さらに Beckner 型の不等式との同値性を証明したが，これを L^p の場合にまで一般的に拡張を行った．またエントロピーの概念を Orlicz 空間の枠組みで定式化し，その一般化を与えることもできた．

(4) Wiener 空間上の Schrödinger 作用素を考察．ここでは $L+V$ (L は Ornstein-Uhlenbeck 作用素）の形の作用素のスペクトルについて調べた．本質的自己共役性，定義域の特徴付け，スペクトルの跳びなどのための十分条件を与えた．ここで特に重要な働きをするのが対数 Sobolev 不等式で，従来知られていた 2 次形式による表現を生成作用素による直接的な不等式の形に書き直して簡潔な証明を与えた．

小倉 幸雄

確率変数の取る値の空間を一般化する研究は，理論の上からも，応用数学の立場からも重要なテーマであろう．それをファジィ集合の空間に取り，極限定理を調べるのが本研究の目的である．この空間では，位相の入れ方によって，可分性が壊れることがあるので注意を要する．本研究の一つの成果は，大数の法則，中心極限定理それにマルチンゲール収束定理は，可分性が壊れる一様位相を入れた空間でも成り立つことを突きとめたことである．方法としては，単調性を用いる方法と，分割を細かくするときのパラメータに関するエントロピーの可積分性を出して，経験分布の理論に持ち込む手法を取った．大偏差原理については，可分性がより大きな影響を与えるが，Lévy の距離による位相についてまでは，自然な条件の下で成り立つことを得た．Skorohod 位相と一様位相の場合は，やゝ強い条件の元で成り立つ．速度関数を具体的に求める問題は，簡単な場合しか出来ていないが，一つの例では，二つの測度の相対エントロピーになることが分かった．別のテーマだが，一次元ブラウン運動 $B(t)$ とその時刻 t までの最大値 $M(t)$ について，$cM - X$ がマルコフ過程になるのは，$c = 0, 1, 2$ の場合のみであることを得た．これは，Lévy の定理 ($c = 1$ の場合) と Pittman の定理 ($c = 2$ の場合) を補完するものである．

富崎 松代

1 次元ディリクレ形式のスムース測度，エネルギー測度が絶対連続であり，その密度関数が一致している場合，即ち，1 次元変形ブラウン運動についての研究を行った．変形ブラウン運動において興味ある現象を示す例では，尺度関数と速度測度が共通の不連続点を持っており，小倉幸雄氏の双一般化拡散過程の理論 (1989) の大前提である「尺度関数と速度測度が共通の不連続点を持たない」ことに反する．小倉幸雄氏の理論をそのまま適用することは出来ないので，これを避けるために，グラフ上の拡散過程を考察することにより，一般化拡散過程の理論を適用できることが分かった．これは，小倉幸雄氏，塩谷隆氏との共同研究である．

拡散過程の条件付漸近分布について，これまでに得られているクラスよりもかなり広いクラスの拡散過程に対して適用可能な結果を導いた．広義拡散作用素のスペクトルが離散的な場合は，到達確率の条件付きで考えると非自明な極限分布が現れることが特別な例の場合には直接計算で得

られていた．これの一般化を行い，集団遺伝学への応用を試みた．これは，飯塚勝氏，前野みゆき氏との共同研究である．

また，Li 氏，志賀徳造氏との共同研究により，広義拡散過程の速度測度が正則変化する場合には，到達確率の条件付きで考えると，適当な補正関数を伴った極限過程としてベッセル過程から導かれる meander が現れることを示した．

竹田 雅好

ファインマン－カッツ汎関数の可積分性の問題は gaugeability の問題と呼ばれ, シュレディンガー作用素に対する劣臨界性, すなわち, 正値グリーン関数の存在や正値解の存在などと関連する問題で, ポテンシャルが無い場合にはマルコフ過程の再帰性, 非再帰性の判定と同値な問題である．本研究では，加藤クラスの測度をポテンシャルにもつファインマン-カッツ汎関数が可積分であるための必要十分条件を与えた．実際, 対応する加法的汎関数による時間変更過程を考え, その第一固有値が 1 より大きいことで必要十分条件は与えられる．このことは, 時間変更過程の第一固有値が, 測度 (または対応する加法的汎関数) の大きさを計る基準の役割を果たすことを示唆する．そこで，ファインマン-カッツ半群がブラウン運動の半群と同様な超縮小性を持つための必要十分条件，分枝ブラウン運動において閉集合に到達する分枝数の期待値が有限になるための必要十分条件などについても考察し，それらも時間変更過程の第一固有値が 1 より大きいことで与えられることを示した．これらの結果は, 対称安定過程の場合に拡張できる．

以上の研究においては, 時間変更過程の第一固有値の評価が重要になる．そこで, ドンスカー-バラダァーンの I-function とディリクレ形式の対応を用いて, バルタの不等式を一般の対称マルコフ過程に拡張した．

測度に対応する加法的汎関数の大偏差原理に関連して, スペクトル関数の微分可能性についても考察し, 臨界性の判定, 詳しくは零臨界的であるか正臨界的であるかが, スペクトル関数の微分可能性と関係することを示した．そして, 次元が対称安定過程の指数の 2 倍以下であるときには, 対称安定過程を主要部とするシュレディンガー型作用素が零臨界的になり, スペクトル関数が微分可能であることを証明した．

長田 博文

対数干渉ポテンシャルをもつ無限粒子系の構成とフラクタル上の拡散過程の構成を主に研究した．前者については，部分的な結果ではあるが，成果を [21] で発表した．この論文の主結果は，Fermion 測度に対する distorted Brownian motion をあらわす Dirichlet 形式考えるとして，その可閉性は，非自明な問題だが，それをとく代わりに，最大可閉部分をとりそれを完備かした Dirichlet 空間を考えると，常に正則な Dirichlet 空間になる，と言うことを示したものである．また，これらは適切な有限次元拡散過程の極限になっている．したがって,（退化するかどうかは別にして）自然な拡散過程が常に存在することを示すことができた．

このテーマに関する研究は，その後著しく発展し，ランダム行列に関係する興味深いクラスについて,（最大可閉部分をとるのではなく）前 Dirichlet 空間の可閉性を示し，その拡散過程を構成する一般的な手法を開発できた．

後者については，上記 [20] の論文で，フラクタル上の拡散過程の構成について偏微分方程式論から必要な準備を行った．

熊谷 隆

a) グラフや測度付き距離空間における自己共役作用素の大域的性質の解析を行なった．B.M. Hambly 氏との共同研究で，グラフ上の放物型 Harnack 不等式や劣ガウス型 の熱核の評価が，rough isometry と呼ばれる変換で不変であることを証明し，雑誌に掲載された．また，測度付き 距離空間上の一般化された放物型 Harnack 不等式と同値な条件を与えることにより，このような Harnack 不等式の安定性を示し， Barlow 氏，Bass 氏との共著論文にまとめた．さらに，対応する拡散過程が強再帰的な場合に，有効抵抗を用いたより検証し やすい同値条件を与え，Barlow 氏，Coulhon 氏との共著論文にまとめた．

b) 空間内に複雑な系が可算無限個存在し，各系については熱伝導に関する情 報がある程度分かっ

ている時に，それぞれの系にしみ込む拡散過程を構成してその性質を調べるという問題を取り扱った．ベソフ空間のトレースの理論を援用することにより，2次形式の正則性を示した．熱核の短時間挙動についての詳しい評価を得て，これを用いて，短時間挙動における「最も起こりやすいパス」をエネルギー関数の変分問題の解として表現した．これらの結果はB.M. Hambly氏との共著で雑誌に掲載された．この問題に関連して現在，フラクタル上のベソフ空間のトレース理論に関する研究を日野正訓氏（京都大）と共同で進行中である．

c) フラクタルを典型例として持つd-setと呼ばれるクラスの上に自然な3タイプの飛躍型対称確率過程を構成し，これらのDirichlet形式が同値であることを証明した．さらにこれらの飛躍型確率過程が，Triebel氏を初めとした関数空間の専門家が研究している作用素とどのような関係にあるかを調べた．また，このうち2タイプの確率過程について，熱核の詳しい評価を得た．熱核のoff-diagonalの評価では確率論を用いた議論が用いられ，実解析学と確率論の手法をうまく融合させている．熱核に関する結果は，Z.Q. Chen氏との共著で雑誌に掲載された．

原 啓介

Wiener空間上の二次汎関数の性質について研究した．主な興味は，一般の汎関数に対する振動積分型の期待値の漸近挙動の研究の足掛りとするため，具体的な計算を通じて，二次汎関数の特性関数の性質を調べることである．また，最近では，二次汎関数の特性関数が，他の数学分野，特にソリトン理論などと深く関係することが次第に分かってきており，多分野との関係や，応用面にも注目している．

この期間中には，二次汎関数とグラスマン多様体についての池田信行氏との以前の研究を整理した[37]と，二次汎関数の特性関数を決める行列式型の関数の，複素関数論からのアプローチ[36]を論文として発表した．[36]での議論のポイントは，この行列式に零を与える値が二次汎関数に対応するHilbert-Schmidt作用素の固有値に他ならないことで，この事実から，Wierstrass-Hadamardのentire functionについての古典的な議論を用いて，二次汎関数の特性関数の性質を議論することができる．また，一般の二次汎関数の特性関数が，ある金利モデルの一般化を与えることを，赤堀次郎氏（立命館大）との共同研究で示し，現在投稿中である．

舟木 直久

論文[40]では，弱い自己ポテンシャルをもつ$\nabla\varphi$界面モデルの平衡系に対して大偏差原理を考察し，総表面張力と界面の値の正負による優位性を表す項の和が，速度汎関数として現れることを示した．この結果から大数の法則が従い，極限は自由境界を含む変分原理によって記述されることが証明できた．これは，偏微分方程式論においてAlt，Caffarelliらが論じた変分問題と同等である．特に1次元ではδ-ピンニングとよばれる特異なポテンシャルを扱うことが可能である．さらに，[38]では，壁上の界面モデルの非平衡系について流体力学極限を論じ，発展的変分不等式，すなわち障害をもつ非線形偏微分方程式が導かれることを示した．

また，[41], [42]では，2体間距離が$a > 0$のときに最小値をとるようなポテンシャルから定まる相互作用Brown粒子系について，粒子数を無限大にし，同時に温度パラメータを零に近づける極限を考察した．これはWulff形状，つまり相共存・相分離問題における結晶，の運動の解明を視野に入れた研究である．上記の極限操作の下で粒子系は等間隔aで配置される堅牢な格子結晶構造を形成し，そのような結晶構造の巨視的な運動を特徴付ける回転および平行移動成分のランダムな動きを，適切な時間スケール下で完全に決定することができた．1次元の場合には複数個の結晶構造の合体についても調べた．

その他，擬似Winterbottom形状の運動，特異項をもつ確率偏微分方程式，二曲線間のパス空間上のWiener測度に対する部分積分公式，およびそれに関連して3次元Bessel bridgeに関する確率積分などについて考察した．

樋口 保成

主に2次元Widom-Rowlinson modelについて相構造と相転移下の相境界の揺らぎの研究を行ない，それぞれ部分的であるが，以下のような結果を得た．

１）十分密度が大きい時，水平方向または垂直方向の空間的平行移動で不変なギブス分布は μ_+ と μ_- と記述される良く知られたギブス分布の重ね合わせのみである．また，この事が正しい密度の下からの評価を与えた．これは，現在このモデルに対して相転移が起きる密度の下からの最良の評価と一致している．また，相転移が起きている密度に対して外部磁場をかけると，相は一意的になることも示した．(大学院生の 竹居正登 氏との共同研究)
２）十分密度が大きい時，有限な正方形の箱の中に二つの相が共存するように境界条件をつけると，二つの相を分離するエネルギーの高い領域が現れる．この領域が通常の Brownian scaling で Brownian bridge に収束するが，さらに，分離された片側の相の占める面積を指定して条件をつけた極限はやはり Gauss 過程となり，その特徴づけも出来る（岡山大の村井浄信氏，北京交通大学の王軍氏との共同研究）

南 就将

離散時間の分枝過程（Galton-Watson 過程）の軌跡として得られるランダムな樹形図を Galton-Watson tree と呼ぶことにする．1949 年に R. Otter は Galton-Watson tree の頂点数の分布の漸近評価，および頂点数と端点数の結合分布に対する大数の弱法則を得ていた．この研究の発展として，以下に挙げるような結果を得た．Otter の論文はその優れた内容にもかかわらず長い間忘れられていたように思われる．特に Otter の研究をさらに発展させる研究も今まで殆どなされてこなかったように見える．
(1) Galton-Watson tree の頂点総数を Z とするとき，$P(Z=n)$ の $n\to\infty$ での漸近展開を求めた．
(2) 子供の数が k 以下であるような頂点の数 $\mathcal{Y}_k$ は，別の Galton- Watson tree の頂点総数に分布の意味で等しい．これより $P(\mathcal{Y}_k=n)$ の $n\to\infty$ での漸近展開もが得られる．さらに $P(\mathcal{Y}_k=n)$ の漸近挙動と $P(Z=n)$ の漸近挙動との関連も調べた．
(3) $\mathcal{Y}_k$ を頂点総数とする Galton-Watson tree をもともとの Galton-Watson tree の中に隠れた樹形図として具体的に構成した．
(4) 子供の数がちょうど k であるような頂点の数を Y_k とする．事象 $\{Z=n\}$ の下での $\{Y_k\}_{k\geq 0}$ の条件付結合分布は $n\to\infty$ において正規分布に弱収束することを示した．さらに極限分布が非退化であるための必要十分条件も与えた．
(5) 上記の結果は計算機科学の研究者が uniform binary tree と称するものに対して得た結果 (H.M. Mahmoud, Algorithmica(1995)13: 313–323) を特別な場合として含んでいる．また本研究の副産物としてある種の条件を備えた tree の個数についての組み合わせ論の結果に別証明を与えることもできた．
　以上の成果は論文 [46] にまとめられている．

今野 紀雄

量子ウォークは，通常の古典ランダムウォークの確率の代わりに行列を用いた量子系モデルである．しかし，古典ランダムウォークが単純なモデルでありながら，様々な分野で大変重要な役割を担っているのと同様に，量子ウォークも種々の量子系モデルに対する基本的なモデルとなりつつある．実際にごく最近では，量子ウォークを用いた古典モデルでは実現し得なかったような高速のアルゴリズムが幾つか開発されたり，ファインマンの経路積分への応用，量子ラチェット，量子ゲームのモデルとしても着目を浴びたり，またさらには強相関電子系や量子色力学との関係も研究され始めている．
　上記の１次元量子ウォークの分布は，干渉効果により基本的に両側にピークをもち，また中心部分の存在確率が小さいなど，古典ランダムウォークの場合と著しく異なる．我々はその分布に関する様々な性質，特に分布の対称性と期待値との関係について，結び目と関連する代数構造を持ったＰＱＲＳ法を用いることにより，初期キュービット状態に対する具体的表現を求めた．さらに，量子ウォークの分布をスケール変換することにより，従来古典ランダムウォークの場合に知られていた中心極限定理とは異なる新しいタイプの極限定理を見つけることに成功した．上記の結果により，古典ランダムウォークの場合には，標準偏差が時刻 n に対してルート n のオーダーで

大きくなるのに対し，量子ウォークの場合には，n のオーダーで大きくなることが導かれる．そして，この違いを上手く利用し，巡回セールスマン問題などの複雑な探索問題への様々な応用が試み始められている．

また，半無限系と有限系の到達（吸収）確率に関して，従来未解決であった予想問題を，ＰＱＲＳ法を援用することにより，古典系との対応が明確になる形で解くことが出来た．一方，円環上の時間平均に対する揺らぎに関して，今まで得られなかった結果を数多く得ることに成功した．さらに長距離まで移動できる場合に，分布の局在化が起こる現象を発見した．また同様の手法により，量子ウォークの研究分野では非常に奇妙な現象と思われていた，２次元のグローヴァー・ウォークに関する局在化についてその数理的構造を明らかにするとともに，このような特性を表すクラスの特徴づけにも成功した．

吉田 伸生

高分子の数学模型に対する局在／非局在相転移の解析を目標とした．ランダムウォークやブラウン運動は理論物理／化学の領域で高分子の数学模型として用いられることがある．特に多数の高分子が相互作用によって引き付けあう様子，或は溶媒中の不純物が高分子の形状に与える影響は興味深い．不思議なことにこうした現象は統計物理の他の問題（濡れ転移，結晶の成長，浸透理論での最速通過，...）と類似していて，背後には共通の数学的構造が潜んでいると期待される．筆者達の目標はこうした数学的構造をランダムウォークやブラウン運動に基づいた模型を用いて描き出すことである．この分野で筆者達が得た主な成果は以下の通りである．

(i) 互いの間に吸着力が働く複数のランダムウォーク (フレンドリーウォーカー) についての局在／非局在相転移．吸着力の強さをパラメーター β で表したとき，ある臨界値 β_c の前後でランダムウォーク達の長時間挙動に質的な差が生じること，即ち $\beta < \beta_c$ ではあたかも吸着力が働いていないかのように自由勝手に行動するが，$\beta > \beta_c$ では互いに遠ざかることなく固まって行動する．

(ii) 溶媒中の不純物が高分子の形状に与える影響をランダムウォーク，ブラウン運動の模型を使って解析．不純物が強い場合，その影響が通常のランダムウォークや，ブラウン運動とは異なる特異な長時間挙動として現われることを示す．

白井 朋之

大きく分けて二つの事柄について研究を行なった．１つはラプラス変換がフレドホルム行列式によってあらわされるランダム場についての研究で (1,2,3,4)，もう１つは無限グラフの幾何的性質とラプラシアンのスペクトルとの関係を明らかにする研究である (5,6,7)．以下はその研究に関係する論文の概要である

(1) d-次元格子上のフェルミオン点過程を可逆測度とするグラウバーダイナミクスを構成して，そのダイナミクスのエルゴード性を調べた．

(2) フェルミオンランダム場とその一般化であるボゾンランダム場の構成をし，そのランダム場についての極限定理など基本的な性質を研究した．

(3) フェルミオンランダム場から自然に定まるシフト力学系のエルゴード論的な性質の研究をした．

(4) ボゾンランダム場とその一般化の構成についていくつかのコメントをした．

(5) アーベル被覆グラフ上の非等方的なランダムウォークの漸近挙動にあらわれる定数を基礎となるグラフと被覆変換群の諸量により表現した．

(6) 双曲的グラフの特別な例 (d,f)-正則平面グラフの等周定数を決定した．

(7) 無限グラフの幾何はその上のラプラシアンのスペクトルに影響しているが，例えば，スペクトルの上端はグラフが本質的に二部グラフがどうかにかかわることを示した．

会田 茂樹

主に (1) ウィーナー空間に代表される無限次元空間上でのシュレーディンガー型作用素の準古典極限の問題の研究，(2) ラフパス解析の無限次元解析への応用の研究，を行った．(1)，(2) について簡単に説明する．

(1) ウィーナー空間上のシュレーディンガー型作用素 (分散を変えるものと変えないものの両方) の最小固有値の準古典極限がポテンシャル関数の零点でのヘッシアンで決まることを示した (論文

[77, 78]). また，ダブルウエルタイプのポテンシャルのとき，最小固有値とその上のスペクトルギャップの大きさが準古典極限のもとで指数的に減少すること (トンネル効果にあたる) を示した (論文 [77]). また，コンパクトリー群の始点と終点が固定された道の空間上でウィッテンラプラシアンを考え，準古典解析から予想される最小固有値の振舞を求めた (論文 [79]).
(2) ラフパス解析は確率微分方程式の解をブラウン運動の汎関数と考えたとき，パス自身とそれを逐次積分した二つの量の連続な汎関数であることを主張する．論文 [80] では，確率微分方程式の解で定義されるウィーナー空間の"連結"な集合 (通常の位相では連結ではない) 上で弱ポアンカレ不等式の成立をラフパス解析を用いて示した．

日野 正訓

局所対称 Dirichlet 形式に付随して定まる対称 Markov 半群に関して，Varadhan 型の短時間漸近挙動評価が成立することを弱い仮定の下 で証明した．副産物として，フラクタル上のウォーク次元に関する一般的な不等式を得た．また，自明でない例としてコンパクトリー群上のループ空間につい て，漸近評価式中に現れる内在距離の幾何学的表示を与えた．

抽象 Wiener 空間上の関数空間について研究を行なった．凸領域上で定義された 1 階の L^2-Sobolev 空間が弱い意味での extension property を持つことを証明し，付随する Dirichlet 形式が自然な反射壁確率過程に対応することを示した．更に，Wiener 空間上の BV 関数について，Sobolev 空間との包含関係及び超関数微分の滑らかさについて調べ，従前の結果を精密化した．

フラクタル上で定義された標準的な Dirichlet 形式に関するエネルギー測度は，Hausdorff 測度などの幾何学的に自然な測度とは互いに特異 であることが予想されていた．これは p.c.f. と呼ばれるフラクタルのクラスについては知られていたが，今回無限分岐的なフラクタルをも含む枠組にお いて測度が特異となるための条件を与えた．特に 2 次元 Sierpinski carpet について予想を肯定的に解決した．

前島 信

(1) Kesten や Vervaat によって研究されてきた確率差分方程式の連続版として，Langevin 方程式と Black-Sholes 方程式を同時に含む確率微分方程式を定式化した．その解の存在と一意性は一般論から得られるが，定常な解が存在する条件を示し，ある特別な場合について，その定常解の分布が無限分解可能であることを示した．この定常解は，最近，一般化 Ornstein-Uhlenbeck 過程という名の下で研究が盛んなクラスの特別なケースになっており，初めて具体的な分布を決定した．(新山洋平との共同研究)
(2) 半自己分解可能分布のサブクラスに属する確率変数について，その確率積分表現を必要十分の形で求めた．そこでは，前島が導入した概念 semi-Lévy 過程に関する佐藤健一とのとの共同研究の結果が重要な役割を果たした．(三浦学との共同研究)
(3) Barndorff-Nielsen が導入したレヴィ測度の新しい変換 Υ 変換についてその性質を深く研究し，Bondesson class と Thorin class がその変換で特徴づけられることを発見し証明した．(佐藤健一，Barndorff-Nielsen との共同研究)
(4) 増加レヴィ過程とは限らない増加過程による，確率過程の時間変更について，無限分解可能性，自己分解可能性との関係で，多くの定理を証明した．これらは数理ファイナンスの分野での応用が期待される．(佐藤健一，Barndorff-Nielsen との共同研究)

長井 英生

(1) 線形ガウス型ファクターモデルおよび一般的なファクターモデルのリスク鋭感的ポートフォリオ最適化問題について，無限時間範囲の場合の問題を考察した．エルゴード型ベルマン方程式の解の存在を示し，その解から最適戦略を明示的に構成する結果を得た．線形線形ガウス型ファクターモデルの場合には証券価格の過去の情報のみを用いる部分情報の場合についても，最適戦略を明示的に構成する結果を得た．
(2) 証券価格の過去の情報のみを用いてポートフォリオを構成する部分情報下の問題に関して，有限時間範囲の場合に最適戦略の満たすべき必要条件を逆向き確率偏微分方程式を用いて最大値原理の形で求めた．

(3) 危険資産への投資比率は，取引が介在しない間は単体上の拡散過程 (a risky fraction process) を定義するが，その拡散過程の衝撃制御問題として，取引費用を考慮したポートフォリオ最適化問題を定式化し，最適ポートフォリオを変分不等式の解を用いて構成した．その際，ある座標変換を通じて，risky fraction process が定係数のずれをもつブラウン運動に変換されることを見出したことがポイントとなった．
部分情報下の問題で，ファクターが有限状態マルコフ連鎖の場合に係数が退化したベルマン方程式の解により最適戦略が明示的に構成できることを示した．

杉田 洋

(1) 確率数値解析に関する研究成果
複雑な問題に対する解決にはランダム性が是非とも必要であることを，数値積分の場合に立証した．すなわち，複雑な関数の数値積分においては，固定された一つのサンプル点列でサンプリングを行うのは誤差が非常に大きくなる危険があり，ランダムなサンプル点列を考えて，統計的に積分値を推定するという作業 (= ランダムサンプリング) が最も安全なことを見出した．この際，サンプル点列のランダム性が小さいほど使用する疑似乱数の総数が少なくて済むので，実際には安定した数値計算法を提供することになる．これに関して，ペアごとに独立なサンプル点列による汎用的実用的なサンプリング法を構成した．また，1995 年に杉田が開発した無理数回転の応用による疑似乱数生成器 (*Monte Carlo Methods Appl.* **1-1** (1995), 35–57) について特殊な次ビット検定の族に対する安全性を解析的に明らかにした．
(2) 確率的数論に関する研究成果
古典的に知られる数論の密度定理を厳密な確率論の極限定理として定式化するために，有限整アデール環とその上のハール測度を用いる手法を開発した．アデールの距離は p-進距離に基づく一見特殊な距離であるが，とくに密度定理の精密化 (中心極限定理に相当するもの) を考えるとき，アデールによって初めて正しい理解が得られる場合があることが分かった．

高信 敏

整数 x, y に対して，x と y が互いに素ならば 1, そうでないならば 0 を返す関数を $X(x, y)$ とすると，ディリクレより $\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N^2}\sum_{m,n=1}^{N}X(x+m, y+n)=\frac{6}{\pi^2}$, $\forall(x,y)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ となることが知られている．ここで $\mathbb{Z}$ は整数全体の集合を表わす．

この収束は，$\mathbb{Z}$ を適当にコンパクト化し，それを $\hat{\mathbb{Z}}$ と表わしたとき，確率空間 $(\hat{\mathbb{Z}}, \lambda)$ (λ は $\hat{\mathbb{Z}}$ の平行移動に関して不変は確率測度，即ち，ハール確率測度) 上での概収束，所謂，大数の強法則，となる．すると，次なる問題はこれの中心極限定理スケーリングについてである:

「$Y_N(x,y) \;=\; N\left(\frac{1}{N^2}\sum_{m,n=1}^{N}X(x+m,y+n)-\frac{6}{\pi^2}\right)$ の
$N\to\infty$ のときの挙動はどうなっているのか？」

通常の極限定理の類推より，これは正規分布に収束するのではと思いたくなる．が，答は「Ｎｏ！」これが上記論文 [107] で分かったことである．少しだけ，その結果について述べると，$Y_N(x,y)$ は N が無限大に発散する様 (さま) に応じて，異なるものに収束する．この様 (さま) を定量的に測るものさしが次で与えられる $\mathbb{Z}$ 上の擬距離 $\tilde{d}$ である:

$$\tilde{d}(x,y)=\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{2^m}(1-\mathbf{1}_{p_m|x-y}),\quad x,y\in\mathbb{Z}.$$

(ここで $\{p_m\}_{m=1}^{\infty}$ は素数を小さい順に並べて得られる数列，また，$p|x-y$ は $x-y$ が p で割り切れることを表わす)．このものさし $\tilde{d}$ により，無限大に発散する自然数列 $\{N_k\}$ と $\{M_k\}$ が $\tilde{d}(N_k, M_k)\to 0$ or $\not\to 0$ に従って

$$\lim_{k\to\infty}Y_{N_k}(x,y)=\lim_{k\to\infty}Y_{M_k}(x,y)\quad\text{or}\quad\lim_{k\to\infty}Y_{N_k}(x,y)\neq\lim_{k\to\infty}Y_{M_k}(x,y)$$

となるのである．

大数の強法則を第1段階の極限定理，中心極限定理スケーリングの極限定理を第2段階とするならば，第3段階の極限定理は次である:

「無限大に発散する自然数列 $\{N_k\}$ が $\tilde{d}(N_k, 0) \to 0$ なるものとするとき，容易に $\lim_{k\to\infty} Y_{N_k}(x,y) = 0$ となる．このとき，その標準偏差 (= 分散の平方根) で renormalize したもの (の分布) は，標準正規分布に収束する.」

今のところこれは予想である (内輪では，杉田予想とよんでいる)．これを示すのが，現在の問題である．

関根 順

デリバティブの優複製問題を保有戦略に制約を設けた条件下で考察し，いくつかの閉じた形での確率的表現を得た [109]．また非完備な市場での指数効用ヘッジ問題について，後退確率微分方程式を用いた解法に基づいた解釈を行った [110]．更に期待損失を最小にする問題を α % 以上の確率で発生しうる "最悪シナリオ" で条件付けて考察し，その鞍点を閉じた形で計算した [111].

盛田 健彦

数年前に，食無しの条件をみたす2次元散乱開撞球系にリプシッツ連続な不変葉層構造が存在することを示した．その応用として撞球系のゼータ関数原点を含む半平面まで有理型に解析接続し，原点での特殊値が障害物の個数を与えるという主張を得ることができるのであるが，リプシッツ連続性に関する主張が理解しにくい証明であった．ここ数年の成果としては，この部分について，より構成的で，初等的な証明を得たことがあげられる．結果は論文としてまとめ，[113] に掲載された．ゼータ関数の有理型解析に関する結果についても，改良を加え現在投稿中である．

上記の研究に引き続き，食無しの条件をみたす2次元散乱開撞球系のゼータ関数の正則域と自己相関係数の減少率の研究と関連して temporal distance function と呼ばれる非可積分性の目安となる関数の値域の次元についての研究を行った．考えている撞球系に対しては，temporal distance function を具体的に書き下すことによって，その値域が撞球系の離散時間化として定まる撞球変換の nonwandering set の次元の半分以上の次元をもつことを証明し，2004 年の日本数学会秋季総合分科会一般講演で発表した．尚，論文自体は現在投稿準備中である．

確率解析とその周辺

このシンポジウムは数理解析研究所のプロジェクト研究として2002年9月4日～7日 に数理解析研究所および国際会議場において開催された．本科学研究費補助金から，外国人招聘，日本人の参加のための援助を行った．またこのプロジェクトでは関連してテーマを限定した次の4つの研究会が開催された．

- 「Stochastic Processes and their Applications」(5月29日～31)
- 「確率解析と統計物理」(7月29日～30日)
- 「無限次元空間上の確率解析」 (11月6日～8日)
- 「確率過程の表現と filtration の同型問題」 (2月5日～7日)

なお詳細については Web Page http://www.kurims.kyoto-u.ac.jp/ kenkyubu/proj02/indexj.html を参照．

以下に「確率解析とその周辺」のプログラムを付す．

September 4

10:00 – 10:50 I. Karatzas
Convex duality in probability, mathematical staistics, and finance
11:00 – 11:50 H. Nagai
Risk-sensitive portfolio optimization, ergodic control and large deviation
13:30 – 14:20 N. El Karoui
Convex semimartingale, duality and optimisation (with P. Bank)
14:30 – 15:20 J. Sekine
Exponential hedging by solving another BSDE
15:50 – 16:40 T. Hida
A frontier of white noise analysis, in line with Ito calculus
16:50 – 17:40 H. Kunita
Representation of junp martingales and applications to mathematical finance

September 5

10:00 – 10:50 M. Röckner
L^p-analysis for the Kolmogorov operators of stochastic Burgers and Navier-Stokes equationns
11:00 – 11:50 M. Takeda
Conditional gaugeability of generalized Schrödinger operators
13:30 – 14:20 T. J. Lyons
The signature of a rough control
14:30 – 15:20 T. Kumagai
Sub-Gaussian estimates of heat kernels on a class of fractal-like graphs and the stability under rough isometry
15:50 – 16:40 M. Fukushima
Function spaces and symmetric Markov processes
16:50 – 17:40 R. K. Getoor
1. Recollections of times with K. Ito at Princeton and later
2. Additive functionals and measures

September 6

10:00 – 10:50 A. S. Üstünel
Measure transport, Monge-Ampere equation and the Girsanov theorem on Wiener spaces
11:00 – 11:50 I. Shigekawa
Square root of a Schrödinger opetator and its L^p norms
13:30 – 14:20 M. Hino
A weak verson of the extension theorem for infinite dimensional Dirichlet spaces
15:50 – 16:40 S. Watanabe
A duality in one-dimensional diffusions, stochastic flows and noises
16:50 – 17:40 D. Elworthy
Invariant diffusions on principal bundles

September 7

10:00 – 10:50 H. P. McKean
Probalility and the nonlinear Schrödinger equation
11:00 – 11:50 S. Kusuoka
A limit theorem for a stochastic mechanical process
13:40 – 14:30 D. W. Stroock
Ito's geometric interpretation of Ito's stochastic differential equations
14:40 – 15:30 N. Ikeda
Quadratic Wiener functionals and Ito's stochastic calculus
16:00 – 16:50 P. Malliavin
Stochastic analysis on the group of diffeomorphisms of the circle

Stochastic Analysis and Markov Processes

2002年9月8日(日)–9月10日(火)
神戸研究学園都市大学交流センター UNITY

研究会世話人
福島　正俊　(関西大学工学部)
大島　洋一　(熊本大学工学部)
富崎　松代　(奈良女子大学理学部)

2002年8月20日から8月28日まで北京でICM 2002が開催され，それに引き続いて8月29日から9月3日まで，Sino-German CenterでFirst Sino-German Meeting on Stochastic Analysisが開催され，更に9月4日から9月7日までは，京都大学数理解析研究所で国際研究集会Stochastic Analysis and Related Topicsが開催された．本研究会は，これらのシンポジウムに続いて開催されたものであり，特に若手研究者の研究成果の発表の場として企画されたものである．参加者は45名であり，活発な研究交流が行われた．以下に，研究会の概要を紹介する．

プログラム

9月8日(日)

14:30–15:20　K. Th. Sturm (Univ. of Bonn)
Martingales in metric spaces and harmonic map heat flow

15:30–16:20　M. Grothaus (Univ. of Bonn)
Stochastic dynamics in classical continuous systems

16:30–17:00　Y. Ogura (Saga Univ.)
One-dimensional bi-generalized diffusion processes - revisited

9月9日(月)

9:30–10:20　R. K. Getoor (Univ. California SanDiego)
Additive Functionals, Characteristic Measures and Kernels

10:30–11:20　M. Röckner (Univ. of Bielefeld)
Distorted Brownian motion: some new results and applications to finite particle systems with singular interactions

11:30–12:00　S. Aida (Osaka Univ.)
Semiclassical limit of the lowest eigenvalue of a supersymmetric Hamiltonian related with QFT

13:30–14:20 W. Stannat (Univ. of Bielefeld)
On $(\mathcal{A}, \Psi)$-superprocess with immigration

14:30–15:20 A. Eberle (Oxford Univ.)
Local spectral gaps on loop spaces

15:40–16:30 L. Zambotti (Univ. of Bielefeld)
Stochastic Partial Differential Equations with Reflection and Random Strings

16:40–17:10 K. Kuwae (Yokohama City Univ.)
Conservativeness of diffusion processes by a drift transformation

9月10日(火)

9:30–10:20 R. L. Schilling (Univ. of Sussex)
Feller processes and their symbols

10:30–11:20 N. Jacob (Univ. of Swansea)
Function Spaces and the Theory of Dirichlet Forms

11:30–12:00 Y. Oshima (Kumamoto Univ.)
On an optimal stopping problem of time inhomogeneous diffusion processes

13:30–14:20 W. Hoh (Univ. of Bielefeld)
A variational approach to L^p-theory for sub-Markovian semigroups

講演要旨

1. Stochastic dynamics in classical continuous systems
M. Grothaus (Univ. of Bonn)

We investigate a scaling limit of gradient stochastic dynamics associated to Gibbs states in classical continuous systems on $\mathbb{R}^d$, $d \geq 1$. The aim is to derive macroscopic quantities from a given micro- or mesoscopic system. The scaling we consider has been investigated by T. Brox (1980), H. Rost (1981), H. Spohn (1986), and M.Z. Guo, G. Papanicolaou (1986), under the assumption $d \leq 3$ and that the underlying potential is in C_0^3 and positive. We prove that the Dirichlet forms of the scaled stochastic dynamics converge on a core of functions to the Dirichlet form of a generalized Ornstein–Uhlenbeck process. The proof is based on the analysis and geometry on the configuration space which was developed by S. Albeverio, Yu.G. Kondratiev, M. Röckner (1998), and works for general Gibbs measures of Ruelle type. Hence, the underlying potential may have a singularity at the origin, only has to be bounded from below, and may not be compactly supported. Therefore, singular interactions of physical interest are covered, as e.g. the one given by the Lennard–Jones potential, which is studied in the theory of fluids. Furthermore, using the Lyons–Zheng decomposition we give a simple proof for the tightness of the scaled processes. In order to indentify the limit it is sufficient to prove the so called Boltzmann-Gibbs principle. This is still an open problem for physically relevant potentials as described above. A first step into this direction we have done by establishing a finite particle approximation of the infinite particle stochastic dynamics in terms of an N/V-limit.

2. Distorted Brownian motion: some new results and applications to finite particle systems with singular interactions
M. Röckner (Univ. of Bielefeld)

We prove strong Feller properties for a class of distorted Brownian motions on R^d. We also construct a weak solution to the corresponding stochastic differential equation starting from any point in $\{\varrho \neq 0\}$ and staying in $\{\varrho \neq 0\}$ before possibly going out of any ball in R^d. Here ϱ is the Lebesgue density of the symmetrizing measure μ. Our condition on the logarithmic derivative $\frac{\nabla \varrho}{\varrho}$ is that it should be locally in $L^{d+\varepsilon}$, but only with respect to the symmetrizing measure $\mu = \varrho\, dx$, not necessarily the Lebesgue measure dx. This allows applications to singular situations. In particulare, finite particle systems with two body interactions with infinitely strong repulsion can be treated by our results. Among other things it is shown that particles never meet no matter what their starting configuration was. Another application treats diffusions in random media.

3. On $(\mathcal{A}, \Psi)$-superprocess with immigration
W. Stannat (Univ. of Bielefeld)

We study global properties of transition semigroups $(p_t^{v,\Psi,\mathcal{A}})$ of $(\mathcal{A}, \Psi)$-superprocess over compact type spaces with possibly nonzero immigration v in verious function spaces. In particular, we compare the different rates of convergence of $(p_t^{v,\Psi,\mathcal{A}})$ to equilibrium. OUr analysis is based on an explicit formula for the Gateau derivative of $p_t^{v,\Psi,\mathcal{A}}F$.

4. Local spectral gaps on loop spaces
A. Eberle (Oxford Univ.)

We prove Poincaré inequalities w.r.t. the distributions of Brownian bridges on sets of loops with jumps of limited size over compact Riemannian manifolds. Moreover, we study the asymptotic behaviour of the second Dirichlet eigenvalues as the time parameter T of the underlying Brownian bridge tends to 0. This behaviour depends crucially on the geodesics contained in the set of loops considered. In particular, for different choices of a Riemannian metric on the base manifold, qualitatively different asymptotic behaviours can occur. The proof of the basic Poincaré inequality is based on the construction of the Brownian bridge by consecutive bisection of the parametrization interval.

5. Stochastic Partial Differential Equations with Reflection and Random Strings
L. Zambotti (Univ. of Bielefeld)

In this talk we consider two Stochastic Partial Differential Equations (SPDE): on one hand, the SPDE with reflection introduced by Nualart and Pardoux (PTRF 1992), and on the other hand the linear $\mathbb{R}^3$-valued stochastic heat equation, first studied by Funaki (1982) and more recently by Mueller and Tribe (EJP 2002). We give a review of some recent results which show that a deep connection exists between these two processes: indeed, many geometric properties of the first process near the reflecting obstacle, like optimal hitting and behaviour of occupation densities, are dictated by geometric properties of the second process. All such results depend on the fact that the Dirichlet Form which is associated with the first process is the *radial part* of the Dirichlet Form associated with the second one. This simple observation and the general Theory of Dirichlet Forms reduce the study of important properties of the highly non-linear Nualart-Pardoux's SPDE to the study of an explicitly known Gaussian process.

6. Feller processes and their symbols
R. L. Schilling (Univ. of Sussex)

We show that a pseudo differential opeartor $-p(x,D)$ generates a Feller process whenever its symbol $p(x,\xi)$ is separetely continuous, negative definite in ξ, uniformly continuous at $\xi=0$ and has bounded coefficients in the sense that $\sup_x |p(x,\xi)| \leq \kappa_p(1+|\xi|^2)$.

7. A variational approach to L^p-theory for sub-Markovian semigroups
W. Hoh (Univ. of Bielefeld)

Non-local generators of Markov transiton semigroups often give rise to L^p-semigroups. We give a new approach obtained jointly with N. Jabob to corresponding (r,p)-capacities based on the theory of monotone operators. The link is given by the fact that the Gateaux derivative of the energy functional defined by the (r,p)-norm is a monotone operator and therefore the theory of Browder and Minty can be used to solve the associated nonlinear problem. In this way we show the existence of associated (r,p)-equilibrium potentials and capacities. Moreover, equilibrium potentials can be characterized as unique solutions of a corresponding variational inequality. The results are illustrated in several explicit examples.

研究費

本研究会開催にあたり，次の研究費から援助を頂いた．

科学研究費補助金 [基盤研究 (A)(1)] 「確率論の総合的研究」(研究代表者 重川一郎)，

科学研究費補助金 [基盤研究 (C)(2)] 課題番号 13640143 「対称拡散過程の確率演算とその応用」(研究代表者 福島正俊)，

科学研究費補助金 [基盤研究 (C)(2)] 課題番号 13640122 「変動する領域における拡散過程の研究」(研究代表者 大島洋一)，

科学研究費補助金 [基盤研究 (C)(2)] 課題番号 14540113 「複雑な系における確率論と実解析学の接点」(研究代表者 熊谷隆)，

科学研究費補助金 [基盤研究 (C)(2)] 課題番号 12640125 「ディリクレ空間の収束と拡散過程の収束に関する研究」(研究代表者 富崎松代)，

『Wiener 空間上の汎関数の解析』

2002 年 11 月 21 日 (木) − 23 日 (土)

佐賀大学理工学部 6 号館

研究集会『Wiener 空間上の汎関数の解析』は 2002 年 11 月 21 日 (木) − 23 日 (土) に佐賀大学理工学部 6 号館に於いて開催された．参加者は 29 名であった．集会の講演の構成は，二つの 3 コマの連続講演

谷口 説男 (九州大学)
Ornstein-Uhlenbeck 過程と無反射ポテンシャル

三苫 至 (佐賀大学)
Chern-Simons 理論に対する Wiener 汎関数解析

と，一つの 2 コマの連続講演

原 啓介 (立命館大学)
焦線近傍における漸近展開 (Review),

それに，二つの 1 コマ講演から成るものであった．具体的なプログラムは次のページに掲げる通りである．講演は何れも，Wiener 空間上の無限次元確率解析に関するもので，特に上の連続講演は，物理学に関係するものであった．

谷口説男氏，植村英明氏，桑田和正氏の講演の予稿は，そのままプログラムの後に紹介する．

三苫至氏の講演は，数理物理学における Chern-Simons 積分

$$\int_{\boldsymbol{\mathcal{A}}} F(A) e^{L(A)} \boldsymbol{\mathcal{D}}(A),$$

$$L(A) = -\frac{ik}{4\pi} \int_M Tr\{A \bigwedge dA + \frac{2}{3} A \bigwedge A \bigwedge A\}.$$

に関するものであった．ここで，k, はレベルと呼ばれる自然数であり，$\boldsymbol{\mathcal{D}}(A)$ がいわゆる "flat measure" である．M は compact oriented 3-dimensional manifold であり，$\boldsymbol{\mathcal{A}}$ は接続 1-forms の空間である． 内容は，まず積分をスーパー・フィールドの方法と呼ばれる物理の手段で摂動型に書き換え，指数 3 乗の項を有限部分と残りの無限和の部分に 2 分し，有限部分と剰余の評価の各々に伊藤の方法を用いて， abstract Wiener space setting によって意味をつけた． 2 回目の講演では数学的に意味づけされた有限部分について，Malliavin-Taniguchi 公式を用いて，チャージ（レベルの逆数）の冪展開を示した．この時，被積分関数 $F(A)$ の解析性の検証が必要になる．$F(A)$ として正則化されたホロノミー作用素を取った場合に検証した． 3 回目の講演では数学的に意味づけされた剰余部分について，漸近評価について議論した．ある種の意味づけを行えば肯定的であることを有限次元近似と Cauchy の積分定理を使った直接評価から示した．

また，原啓介氏の講演は，プロパゲータのファインマン積分による積分表示を有限メッシュに切って近似する式

$$G^{(N)}(b,T;a,0)=\left(\frac{m}{2\pi i\mathrm{h}'}\right)^{(N+1)/2}\int dx_1\cdots dx_N\exp\left[\frac{iS^{(N)}(x_1,\ldots,x_N)}{\mathrm{h}'}\right]$$

を，プランク係数 $\mathrm{h}'\to 0$ での漸近展開する問題で，

$$S^{(N)}(x_1,\ldots,x_N)=\sum_{j=0}^{N}\varepsilon\left\{\frac{m}{2}\left(\frac{x_{j+1}-x_j}{\varepsilon}\right)^2-V(x_j)\right\},\quad x_0=a,\quad x_{N+1}=b,\quad \varepsilon=\frac{T}{N+1}$$

の二次変分が消える場合を論じたものであった．その際，Airy 関数に急降下法を適用する方法が有効である．

プログラム

１１月２１日（木）

13:30 – 14:50　三苫 至 (佐賀大学)
Chern-Simons 理論に対する Wiener 汎関数解析 I

15:00 – 16:20　原 啓介 (立命館大学)
焦線近傍における漸近展開 (Review) I

16:30 – 17:20　植村 英明 (愛知教育大)
多次元 Brown 運動に対する田中の公式

１１月２２日（金）

10:30 – 12:00　谷口 説男 (九州大学)
Ornstein-Uhlenbeck 過程と無反射ポテンシャル I

13:30 – 14:50　三苫 至 (佐賀大学)
Chern-Simons 理論に対する Wiener 汎関数解析 II

15:00 – 16:20　原 啓介 (立命館大学)
焦線近傍における漸近展開 (Review) II

16:30 – 17:20　桑田 和正 (京都大学)
Sample path large deviations for a class of random currents

１１月２３日（土）

10:30–12:00　谷口 説男 (九州大学)
Ornstein-Uhlenbeck 過程と無反射ポテンシャル II

13:30 – 14:50　谷口 説男 (九州大学)
Ornstein-Uhlenbeck 過程と無反射ポテンシャル III

15:00 – 16:30　三苫 至 (佐賀大学)
Chern-Simons 理論に対する Wiener 汎関数解析 III

Ornstein-Uhlenbeck 過程と無反射ポテンシャル

谷口　説男　(九州大学大学院数理学研究院) *†‡

平成 14 年 11 月 22,23 日 (reviced ver.)

序

Gauss 過程と無反射ポテンシャルの対応は小谷真一氏の研究により明らかにされた．この講演では Ornstein-Uhlembeck 過程の super-position から得られる Gauss 過程の L^2 ノルムのラプラス変換が Cameron-Martin の変換理論を通じて詳細に表現できることを示し，この場合に小谷氏により与えられた Gauss 過程と無反射ポテンシャルとの対応をより詳しく求めうることを紹介する．Cameron-Martin は Sturm-Liouville 方程式が変換のヤコビアンの計算で基本的な役割を果たすことを示したが，それの拡張として得られる常微分方程式が我々の考察でも重要である．この方程式の解に関する Grassmannian での考察についても紹介する．

1. Cameron-Martin 変換と Ornstein-Uhlenbeck 過程

$\boldsymbol{p} = {}^t(p_1, \ldots, p_n), \boldsymbol{c} = {}^t(c_1, \ldots, c_n) \in \mathbb{R}^n$ は，$p_i \neq p_j$ $(i \neq j)$，$c_i > 0$ $(1 \leq i \leq n)$ を満たすと仮定する．$a > 0$ とし，

(1.1) $$D(\boldsymbol{p}) = \mathrm{diag}[p_1, \ldots, p_n], \quad E(a) = D(\boldsymbol{p})^2 + a^2 \boldsymbol{c} \otimes \boldsymbol{c}$$

とおく．以下しばしば $D(\boldsymbol{p})$ を単に D と表す．

1.1. ODE's

$\phi_a(s)$ を $n \times n$ 行列値常微分方程式

(1.2) $$\phi'' - E(a)\phi = 0, \quad \phi(0) = I,\ \phi'(0) = -D$$

の解とする．

$\psi_a = \phi_a' + D\phi_a$ とおき，積行列 $\phi_a \psi_a$ の微分を計算すれば，$\det \phi_a(s) \neq 0$ $(\forall s \geq 0)$ となることを示すことができる．Cole-Hopf 変換

(1.3) $$\beta_a(s) := \phi_a'(s)\phi_a^{-1}(s)$$

---

*based on the joint work with N. Ikeda

†E-mail: taniguch@math.kyushu-u.ac.jp,

‡URL: http://www.math.kyushu-u.ac.jp/~taniguch/

により，β_a が $n \times n$ 行列値 Riccati 方程式

$$\beta' + \beta^2 - E(a) = 0, \quad \beta(0) = -D \tag{1.4}$$

に従うことがいえる．逆に，β_a が Riccati 方程式 (1.4) の解であり，ϕ_a を (1.3) により定義すれば，ϕ_a は常微分方程式 (1.2) に従っている．

1.2. Cameron-Martin 変換

$t > 0$ とし，$\mathcal{W}^n$ を $[0,t]$ 上の n 次元古典的 Wiener 空間，すなわち原点を出発する連続関数 $w : [0,t] \to \mathbb{R}^n$ の全体とし，P を $\mathcal{W}^n$ 上の Wiener 測度とする．

$\mathcal{W}^n$ 上の Cameron-Martin 変換

$$K_{a,t}[w](s) = w(s) + \int_0^s \beta_a(t-u)w(u)du, \tag{1.5}$$

$$L_{a,t}[w](s) = w(s) + \phi_a(t-s)\int_0^s (\phi_a^{-1})'(t-u)w(u)du \tag{1.6}$$

を考える．$[0,t]$ 上の部分積分を行うことで

$$K_{a,t}[L_{a,t}[w]] = L_{a,t}[K_{a,t}[w]] = w, \quad \forall w \in \mathcal{W}^n \tag{1.7}$$

となることが容易に示される．本講演の中心となるのがこの変換である．この変換は Cameron-Martin [1] により，調和振動子に対応する Feynman-Kac 汎関数 $\int_0^t |w(s)|^2 ds$ のラプラス変換の計算に用いられた変換に若干の拡張を加えたものとなっている．

1.3. 変換公式

$\xi_{\boldsymbol{p}}(s) = {}^t(\xi_{\boldsymbol{p}}^1(s), \ldots, \xi_{\boldsymbol{p}}^n(s))$ を $\mathbb{R}^n$ 値確率微分方程式

$$d\xi(s) = dw(s) + D\xi(s)dt, \quad \xi(0) = 0$$

の解とする．各成分の一次結合 (super-position)

$$X_{\boldsymbol{p},\boldsymbol{c}}(s) = \langle \boldsymbol{c}, \xi_{\boldsymbol{p}}(s)\rangle$$

を考えよう．ただし $\langle \cdot, \cdot \rangle$ は $\mathbb{R}^n$ の内積を与えるものとする．$X_{\boldsymbol{p},\boldsymbol{c}}(s)$ は平均 0 共分散

$$R(u,v) = \sum_{j=1}^n \frac{c_j^2}{2p_j}\left(e^{p_j(u+v)} - e^{p_j|u-v|}\right) \tag{1.8}$$

をもつ Gauss 過程である．

$$I_{\boldsymbol{p},\boldsymbol{c},a}(t) = \int_{\mathcal{W}^n} \exp\left[-\frac{a^2}{2}\int_0^t X_{\boldsymbol{p},\boldsymbol{c}}(s)^2 ds\right] dP \tag{1.9}$$

とおく．先に述べた Cameron-Martin 変換 (1.5)，(1.6) により，つぎのような表現式を得る．

Proposition 1.1. 任意の有界 Wiener 汎関数 $f : \mathcal{W}^n \to \mathbb{R}$ に対し，次式が成立する．

$$\int_{\mathcal{W}^n} f(\xi_{\boldsymbol{p}}) \exp\left[-\frac{a^2}{2}\int_0^t X_{\boldsymbol{p},\mathbf{c}}(s)^2 ds\right] dP = \sqrt{\frac{1}{\det \phi_a(t)}}\, e^{-(t/2)\mathrm{tr} D} \int_{\mathcal{W}^n} f(L_{a,t}) dP. \tag{1.10}$$

とくに

$$I_{\boldsymbol{p},\mathbf{c},a}(t) = \sqrt{\frac{1}{\det \phi_a(t)}}\, e^{-(t/2)\mathrm{tr} D}. \tag{1.11}$$

1.4. $E(a)$ の固有値

上の変換式をより詳しく見るために，$E(a)$ の固有値について調べる．必要ならば $p_1, \ldots, p_n$ を並べ直すことで

$$(\mathrm{H})_m \quad \begin{aligned} &|p_j| \leq |p_{j+1}| \ (j = 1, 2, \ldots, n) \text{ かつ } p_{j(\ell)} > 0, \\ &|p_{j(\ell)}| = |p_{j(\ell)+1}| \ (\ell = 1, \ldots, m) \end{aligned}$$

を満たす m と $1 \leq j(1) < \cdots < j(m) \leq n$ が見つかるとしてよい．ただし，$m = 0$ のときは，単に $|p_1| < |p_2| < \cdots < |p_n|$ を意味するものとする．

測度 $\sigma_\pm$ を

$$\sigma_+(du) = 2a^2 \sum_{i:p_i \geq 0} c_i^2 \delta_{-p_i^2}(du), \quad \sigma_-(du) = 2a^2 \sum_{i:p_i < 0} c_i^2 \delta_{-p_i^2}(du), \tag{1.12}$$

と定義し，$\mathbb{C}^+ = \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Im} z > 0\}$ 上に対応する Herglotz 関数 $h_{\boldsymbol{p},\mathbf{c},a}$ を

$$h_{\boldsymbol{p},\mathbf{c},a}(z) = \frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{1}{u - z}\{\sigma_+ + \sigma_-\}(-du) = a^2 \sum_{j=1}^n \frac{c_j^2}{p_j^2 - z}$$

により定義する．このとき $h_{\boldsymbol{p},\mathbf{c},a}(\lambda + t\sqrt{-1})$ は $t \searrow 0$ のとき

$$h_{\boldsymbol{p},\mathbf{c},a}(\lambda + 0\sqrt{-1}) = a^2 \sum_{j=1}^n \frac{c_j^2}{p_j^2 - \lambda}$$

に収束する．$E(a)$ はつぎのように対角化される．

Lemma 1.1. $(\mathrm{H})_m$ が成り立つと仮定する．$r_1 < \cdots < r_{n-m}$ を方程式 $h_{\boldsymbol{p},\mathbf{c},a}(r + 0\sqrt{-1}) = -1$ の解とし (これらで尽きる)，$0 < q_1 < \cdots < q_n$ を

$$\{q_1, \ldots, q_n\} = \{p_{j(1)}, \ldots, p_{j(m)}, \sqrt{r_1}, \ldots, \sqrt{r_{n-m}}\}$$

により定義する．$R = \mathrm{diag}[q_1, \ldots, q_n]$ とおく．このとき $U \in O(n)$ が存在し，

$$E(a) = UR^2U^{-1} \tag{1.13}$$

が成り立つ．さらに，もし $(\mathrm{H})_0$ が成り立てば，

$$U = \left(\frac{(D^2 - r_1 I)^{-1}\boldsymbol{c}}{\left|(D^2 - r_1 I)^{-1}\boldsymbol{c}\right|}, \dots, \frac{(D^2 - r_n I)^{-1}\boldsymbol{c}}{\left|(D^2 - r_n I)^{-1}\boldsymbol{c}\right|} \right) \in O(n) \tag{1.14}$$

である．

1.5. More Precisely

Lemma 1.1 の通り，$0 < q_1 < \cdots < q_n$ をとる．また $R = \mathrm{diag}[q_1, \dots, q_n]$ し，$U \in O(n)$ を $E(a) = UR^2U^{-1}$ となるように選ぶ．このとき，

$$\phi_a(s) = U\{\cosh(sR) - \sinh(sR)R^{-1}U^{-1}DU\}U^{-1} \tag{1.15}$$

となる．ただし $n \times n$ 行列 A に対し，$\cosh(A) = (e^A + e^{-A})/2$，$\sinh(A) = (e^A - e^{-A})/2$ とおいた．

よって Proposition 1.1 より次が従う．

Theorem 1.1. 任意の有界 Wiener 汎関数 $f : \mathcal{W}^n \to \mathbb{R}$ に対し，

$$\begin{aligned} &\int_{\mathcal{W}^n} f(\xi_{\boldsymbol{p}}) \exp\left[-\frac{a^2}{2} \int_0^t X_{\boldsymbol{p},\boldsymbol{c}}(s)^2 ds \right] dP \\ &\quad = \left\{ \det\left(\cosh(tR) - \sinh(tR)R^{-1}U^{-1}DU \right) \right\}^{-1/2} e^{-(t/2)\mathrm{tr}D} \int_{\mathcal{W}^n} f(L_{a,t}) dP. \end{aligned} \tag{1.16}$$

とくに

$$I_{\boldsymbol{p},\mathbf{c},a}(t) = \left\{ \det\left(\cosh(tR) - \sinh(tR)R^{-1}U^{-1}DU \right) \right\}^{-1/2} e^{-(t/2)\mathrm{tr}D}.$$

1.6. 拡散過程として

等式 (1.16) の左辺の Wiener 積分は，$t \to \infty$ において $\exp[-t\sum_{j=1}^n (p_j + q_j)]$ という速さで減衰することが従う．これは $\sum_{j=1}^n (p_j + q_j)$ が，$L^2(\mathbb{R}^n; e^{\langle Dx,x \rangle}dx)$ (測度 $e^{\langle Dx,x \rangle}dx$ に関する $\mathbb{R}^n$ 上の自乗可積分関数の全体) 上の微分作用素 $\mathcal{L}_{\boldsymbol{p},\mathbf{c},a} = (1/2)\Delta + \langle Dx, \nabla * \rangle - (a^2/2)\langle \boldsymbol{c}, x \rangle^2$ の最小固有値となっていることに由来している．

実際，$L^2(\mathbb{R}^n; dx)$ 上の微分作用素 $\widetilde{\mathcal{L}}_{\boldsymbol{p},\mathbf{c},a} = (1/2)\Delta - (1/2)\langle E(a)x, x \rangle - (1/2)\mathrm{tr}D$ のスペクトル $\sigma(\widetilde{L}_{\boldsymbol{p},\mathbf{c},a})$ は

$$\sigma(\widetilde{\mathcal{L}}_{\boldsymbol{p},\mathbf{c},a}) = \left\{ -\sum_{j=1}^n n_j q_j - \frac{1}{2}\sum_{j=1}^n (p_j + q_j) : n_j \in \mathbb{Z}_+, j = 1, 2, \dots \right\}$$

で与えられる (多重度を込めて)([4])．等距離写像 $S : L^2(\mathbb{R}^n : dx) \to L^2(\mathbb{R}^n : e^{\langle Dx,x \rangle}dx)$ を $Sf(x) = e^{-\langle Dx,x \rangle/2}f(x)$ と定義すれば，$S \circ \widetilde{\mathcal{L}}_{\boldsymbol{p},\mathbf{c},a} \circ S^{-1} = \mathcal{L}_{\boldsymbol{p},\mathbf{c},a}$ となる．したがって

$$\sigma(\mathcal{L}_{\boldsymbol{p},\mathbf{c},a}) = \left\{ -\sum_{j=1}^n n_j q_j - \sum_{j=1}^n (p_j + q_j) : n_j \in \mathbb{Z}_+, j = 1, 2, \dots \right\}.$$

$\{T_t\}_{t\geq 0}$ で $L^2(\mathbb{R}^n : e^{\langle Dx,x\rangle}dx)$ 上の $\mathcal{L}_{\boldsymbol{p},\boldsymbol{c},a}$ により生成される半群を表せば，

$$T_t f(0) = \int_{\mathcal{W}^n} f(\xi_{\boldsymbol{p}}(t)) \exp\left[-\frac{a^2}{2}\int_0^t X_{\boldsymbol{p},\boldsymbol{c}}(s)^2 ds\right] d\mu$$

となる．

1.7. フィルタリング理論との関連

$(n+1)$ 次元古典的 Wiener 空間 $\mathcal{W}^{n+1}$ 上において次のようなフィルタリング問題を考える．

$$\begin{aligned} d\xi_{\boldsymbol{p}}(s) &= dw(s) + D\xi_{\boldsymbol{p}}(s)ds, & \xi(0) &= 0, & &\text{(system)}, \\ dY(s) &= db(s) + a\langle \boldsymbol{c}, \xi_{\boldsymbol{p}}(s)\rangle ds, & Y(0) &= 0, & &\text{(observation)}. \end{aligned}$$

ただし $(w,b) \in \mathcal{W}^n \times \mathcal{W}^1 = \mathcal{W}^{n+1}$．$\mathcal{F}_t^Y$ を $Y(s)$ $(s \leq t)$ の生成する σ 集合体とし，Kalman-Bucy フィルター $\widehat{\xi}_{\boldsymbol{p}}(s) = E[\xi_{\boldsymbol{p}}(s)|\mathcal{F}_s^Y]$ を考える．誤差行列

$$P_a(s) = \int_{\mathcal{W}^{n+1}} \big(\xi_{\boldsymbol{p}}(s) - \widehat{\xi}_{\boldsymbol{p}}(s)\big)^t \big(\xi_{\boldsymbol{p}}(s) - \widehat{\xi}_{\boldsymbol{p}}(s)\big)\, dP$$

は $n \times n$ 行列値 Riccati 方程式

$$P'(s) = DP(s) + P(s)D - a^2 P(s)(\boldsymbol{c}\otimes\boldsymbol{c})P(s) + I, \quad P(0) = 0$$

に従う．

$$\rho_{\boldsymbol{p},\boldsymbol{c}}(s) = \int_{\mathcal{W}^{n+1}} \Big| X_{\boldsymbol{p},\boldsymbol{c}}(s) - E[X_{\boldsymbol{p},\boldsymbol{c}}(s)|\mathcal{F}_s^Y] \Big|^2 dP$$

とおく．次が成り立つことは容易に分かる．

$$\rho_{\boldsymbol{p},\boldsymbol{c}}(s) = \sum_{i,j=1}^n c_i c_j P_{ij}(s) = \mathrm{tr}\big[(\boldsymbol{c}\otimes\boldsymbol{c})P_a(s)\big]. \tag{1.17}$$

$\beta_{a,t}(s) = -\beta_a(t-s)$，$\gamma_{a,t}(s) = \beta_{a,t}(s) - D$ とおく．このとき

$$-\int_0^t \mathrm{tr}\big[a^2(\boldsymbol{c}\otimes\boldsymbol{c})P_a(s)\big]ds = \exp\left[\int_0^t \mathrm{tr}\gamma_{a,t}(u)du\right] = \frac{e^{-t\mathrm{tr}D}}{\det\phi_a(t)}. \tag{1.18}$$

(1.16) とあわせて

$$\int_{\mathcal{W}^n} \exp\left[-\frac{a^2}{2}\int_0^t X_{\boldsymbol{p},\boldsymbol{c}}(s)^2 ds\right] dP = \exp\left[-\frac{a^2}{2}\int_0^t \rho_{\boldsymbol{p},\boldsymbol{c}}(s)ds\right] \tag{1.19}$$

となる．M.L. Kleptsyna and A. Le Breton[2] により同様の結果がより一般の設定で得られている．

2. 無反射ポテンシャル

2.1. Kotani's result

散乱データ $\eta_j > 0$, $m_j > 0$ $(1 \le j \le n)$ を持つ無反射ポテンシャルとは次で与えられる関数 q のことをいう;

$$q(x) = -2\frac{d^2}{dx^2}\log\det(I + A(x)).$$

ただし

$$A(x) = \left(\frac{\sqrt{m_i m_j}}{\eta_i + \eta_j}e^{-(\eta_i+\eta_j)x}\right)_{1\le i,j\le n}. \tag{2.1}$$

無反射ポテンシャルの全体を $\mathcal{Q}_0$ と表す.

散乱データ $\eta_j > 0$, $m_j > 0$ $(1 \le j \le n)$ に対し，新たに η_j, $m_j(t) = m_j\exp[8\eta_j^3 t]$ により散乱データを与え，対応する無反射ポテンシャルを $q(x,t)$ と表せば，$q(x,t)$ は KdV 方程式

$$\frac{\partial q}{\partial t} - 6q\frac{\partial q}{\partial x} + \frac{\partial^3 q}{\partial x^3} = 0 \tag{2.2}$$

の初期条件 $q(x,0) = q(x)$ を満たす解となっている.

Σ を

$$\int_{(-\infty,0]} e^{\lambda\sqrt{-x}}\sigma_\pm(dx) < \infty, \quad \forall\lambda > 0$$

なる $(-\infty,0]$ 上の非負測度 $\sigma_\pm$ の組 $\sigma = (\sigma_+,\sigma_-)$ の全体とする．$\sigma \in \Sigma$ に対し，正定値積分核 $G(u,v;\sigma)$ を

$$\begin{aligned}G(u,v;\sigma) = \frac{1}{4}\int_{-\infty}^{0}\frac{1}{\sqrt{-x}}\left(e^{\sqrt{-x}(u+v)} - e^{\sqrt{-x}|u-v|}\right)\sigma_+(dx)\\ + \frac{1}{4}\int_{-\infty}^{0}\frac{1}{\sqrt{-x}}\left(e^{-\sqrt{-x}|u-v|} - e^{-\sqrt{-x}(u+v)}\right)\sigma_-(dx)\end{aligned}$$

と定義する．核 $G(u,v;\sigma)$ をもつ $L^2[0,x]$ 上の積分作用素を G_x^σ とし，$q^\sigma(x) = -2(d/dx)^2\log\det(I + G_x^\sigma)$ とおく．そのような q^σ の全体を $\mathcal{Q}$ と表す．このとき $\mathcal{Q}$ は無反射ポテンシャルの広義一様収束極限として得られる一般化された無反射ポテンシャルの全体となる ([3])．明らかに $\mathcal{Q}_0 \subset \mathcal{Q}$ である.

平均 0 共分散 $G(u,v;\sigma)$ を持つ Gauss 過程を X^σ と表し，$\mathcal{G}$ をそのような X^σ の全体とする．$\mathcal{G}$ と $\mathcal{Q}$ は Σ を仲立ちとして

$$q^\sigma(x) = 4\frac{d^2}{dx^2}\log E\left[\exp\left(-\frac{1}{2}\int_0^x |X^\sigma(s)|^2 ds\right)\right]$$

という関係式で結ばれている．ただし E は Gauss 過程を実現する確率測度に関する期待値である.

2.2. Ornstein-Uhlenbeck 過程の定める散乱データ

$\boldsymbol{p}, \boldsymbol{c} \in \mathbb{R}^n$ は先の通りとし，$\sigma \in \Sigma$ を (1.12) により定義する．このとき $G(u,v;\sigma) = a^2 R(u,v)$ である ((1.8) 参照)．したがって X^σ は $a^2 X_{\boldsymbol{p},\boldsymbol{c}}$ により実現される．この場合に $\mathcal{G}$ と $\mathcal{Q}$ との対応を厳密に与えよう．

Theorem 2.1. $(\mathrm{H})_m$ が成り立つとする．$0 < q_1 < \cdots < q_n$ を Lemma 1.1 の通りに定める．散乱データ $\eta_i, m_i > 0$ $(i = 1, \ldots, n)$ を，$\eta_i = q_i$，

$$m_i = \begin{cases} -2\eta_i \dfrac{c_{j(\ell)+1}^2}{c_{j(\ell)}^2} \displaystyle\prod_{k\neq i} \frac{\eta_k + \eta_i}{\eta_k - \eta_i} \prod_{k\neq j(\ell), j(\ell)+1} \frac{p_k + \eta_i}{p_k - \eta_i}, & \text{if } \eta_i = p_{j(\ell)}, \\ -2\eta_i \displaystyle\prod_{k\neq i} \frac{\eta_k + \eta_i}{\eta_k - \eta_i} \prod_{k=1}^{n} \frac{p_k + \eta_i}{p_k - \eta_i}, & \text{otherwise}, \end{cases}$$

により定義する．さらにこの散乱データを用いて $A(t)$ を (2.1) により定義する．このとき

$$\frac{d}{dt}\log(I_{\boldsymbol{p},\boldsymbol{c},a}(t)) = -\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(p_i + \eta_i) - \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\log\det(I + A(t)). \tag{2.3}$$

とくに

$$4\frac{d^2}{dt^2}\log(I_{\boldsymbol{p},\boldsymbol{c},a}(t)) = -2\frac{d^2}{dt^2}\log\det(I + A(t)).$$

2.3. The proof of Theorem 2.1

まず，証明において繰り返し用いる Cauchy の等式 (cf. [6]) を述べておく．

$$\det\left(\left(\frac{1}{\alpha_i + \beta_j}\right)_{1\le i,j\le n}\right) = \frac{\prod_{1\le i<j\le n}(\alpha_i - \alpha_j)(\beta_i - \beta_j)}{\prod_{i,j=1}^{n}(\alpha_i + \beta_j)}, \quad \forall \alpha_1, \beta_1, \ldots, \alpha_n, \beta_n \in \mathbf{C}. \tag{2.4}$$

Lemma 2.1. $(\mathrm{H})_0$ が成り立つと仮定する．

$$X = \left(\frac{1}{p_j + \sqrt{r_i}}\right)_{1\le i,j\le n}, \quad Y = \left(\frac{1}{p_j - \sqrt{r_i}}\right)_{1\le i,j\le n} \tag{2.5}$$

とおけば

$$\det \phi_a(t) = \det(X - e^{-2tR}Y)e^{t\mathrm{tr}R} \prod_{i=1}^{n} \frac{c_i}{2r_i|(D^2 - r_i I)^{-1}\mathbf{c}|} \tag{2.6}$$

が成り立つ．

Lemma 2.2. $\eta_j, m_j > 0$ $(1 \le j \le n)$ を散乱データとし，$A(t)$ を (2.1) で定義する．このとき

$$\begin{aligned} &\det(I + A(t)) \\ &= 1 + \sum_{p=1}^{n} \sum_{1\le i_1<\cdots<i_p\le n} \prod_{j=1}^{p} \frac{m_{i_j}}{2\eta_{i_j}} \prod_{1\le j<k\le p} \left(\frac{\eta_{i_j} - \eta_{i_k}}{\eta_{i_j} + \eta_{i_k}}\right)^2 e^{-2t\sum_{j=1}^{p}\eta_{i_j}}. \end{aligned} \tag{2.7}$$

Lemma 2.3. $(\mathrm{H})_0$ が成り立つと仮定する．$\eta_j, m_j > 0$ を Theorem 2.1 の通りに，$A(t)$ を (2.1) により，そして X, Y を Lemma 2.1 の通りに定義する．このとき

$$\det(X - e^{-2tR}Y) = \det X \cdot \det(I + A(t)) \tag{2.8}$$

が成り立つ．とくに (2.3) が成立する．

Lemma 2.4. $m \geq 1$ とし，$(\mathrm{H})_m$ を仮定する．このとき (2.3) が成り立つ．

3. Grassmannian

3.1. Grassmannian

Grassmannians について復習する ([7] 参照)．$V(2n)$ を実 $2n$ 次元ベクトル空間とする．Grassmannian $GM(n, V(2n))$ は，$V(2n)$ の n 次元部分ベクトル空間の全体からなる．$V(2n)$ の基底をひとつ固定し，$V(2n)$ の元を長さ $2n$ の縦ベクトルで表す．$V(2n)$ の部分ベクトル空間の基底 $\psi_0, \ldots, \psi_{n-1}$ をひとつ選べば，$2n \times n$ 行列 $\psi = \big(\psi_0, \ldots, \psi_{n-1}\big)$ が定まる．このとき部分ベクトル空間の基底の変更は，ψh $(h \in GL(n))$ なる一般線形変換群の作用として ψ に作用する．$Fr(2n, n)$ でランク n の $2n \times n$ 行列の全体を表せば，$GM(n, V(2n))$ は $Fr(2n, n)/GL(n)$ と同一視できる．$Fr(2n, n)$ の元を n-frame という．

$1 \leq i_0 < i_1 < \cdots < i_{n-1} \leq 2n$ とし，

$$GM(n, V(2n))_{i_0, \ldots, i_{n-1}} = \{\psi \in Fr(2n, n) : \det\big((\psi_{i_k j})_{0 \leq k, j \leq n-1}\big) \neq 0\}$$

$(\psi_j = {}^t(\psi_{0j}, \ldots, \psi_{2n-1\,j}))$ とおけば，これは Grassmannian $GM(n, V(2n))$ の有限個の座標近傍系である．

3.2. Dynamical motions on Grassmannians

[8] に従い，Riccati 方程式 (1.4) の解 $\beta_a(s)$ は Grassmannian 上の運動を定めることを見よう．ϕ_a を常微分方程式 (1.2) の解とし，n-frame

$$\begin{pmatrix} \phi_a(s) \\ \phi'_a(s) \end{pmatrix} \tag{3.1}$$

を考える．(1.2) の後で述べたように，$\phi_a(s)$ は可逆である，すなわち $\phi_a(s) \in GL(n)$ である．このとき先の n-frame は $GL(n, V(2n))_{0,1,\ldots,n-1}$ に属し，

$$\begin{pmatrix} I \\ \phi'_a(s)\phi_a(s)^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I \\ \beta_a(s) \end{pmatrix}$$

と同一の Grassmannian の点を定める．つまり $\beta_a(s)$ により $GL(n, V(2n))_{0,1,\ldots,n-1}$ 上の運動が定まる．

n-frame $\psi \in Fr(2n, n)$ に対し，$\big(\det\big((\psi_{i_k j})_{0 \leq k, j \leq n-1}\big)\big)_{1 \leq i_0 < i_1 < \cdots < i_{n-1} \leq 2n}$ を対応させる写像は，$h \in GL(n)$ の作用で一斉に $\det h$ 倍される．したがってこれは $\binom{2n}{n} - 1$ 次元射影空間の斉次座標と見なすことができる．この座標を Grassmannian の点 ψ の Plücker 座標という．(3.1) で与えた n-frame の代わりに

$$\big(\psi_0(s), \ldots, \psi_{n-1}(s)\big) = \begin{pmatrix} U^{-1}\phi_a(s)U \\ U^{-1}\phi'_a(s)U \end{pmatrix}$$

という n-frame を考えよう．ただし U は (1.13) で与えた $U \in O(n)$ である．このとき Plücker 座標は

$$\psi_{i_0,\dots,i_{n-1}}(s) = \det\left[\left(\psi_{i_k j}(s)\right)_{0\le k,j\le n-1}\right], \quad 0 \le i_0 < \cdots < i_{n-1} \le 2n-1$$

である．Theorem 1.1 における等式で最も重要となる量は $\det \phi_a(s)$ であった．$\det \phi_a(s) = \psi_{0,1,\dots,n-1}(s)$ となっていることに注意し，この $\psi_{0,1,\dots,n-1}(s)$ の挙動を記述する方程式を求めよう．

$x \in \mathbb{R}$，$n \in \mathbb{N}$ に対し，$[x]$ を x の整数部分，$[x]_n = x - n[x/n]$ とおく．γ_i で横ベクトル $(\psi_{i0}, \dots, \psi_{i\,n-1})$ を表し，$\alpha_j = q_{j+1}$ とおけば，

$$\gamma'_j = \alpha_{[j]_n}^{2[j/n]} \gamma_{[j+n]_{2n}} \tag{3.2}$$

が成り立っている．$\mathcal{I}$ を $0 \le i_0 < \cdots < i_{n-1} \le 2n-1$，$i_j \ne i_k \mod n \ (j \ne k)$ を満たす $I = (i_0, \dots, i_{n-1}) \in \mathbb{Z}^n$ の全体とする．各 $0 \le j \le n-1$ に対し，$I_j : \mathcal{I} \to \mathcal{I}$ を

$$I_j((i_0, \dots, i_{n-1})) = \{i_0, \dots, i_{j-1}, [i_j + n]_{2n}, i_{j+1}, \dots, i_{n-1}\}$$

により定義する．このとき Plücker 座標 $\psi_{i_0,\dots,i_{n-1}}$ は

$$\psi'_{i_0,\dots,i_{n-1}} = \sum_{j=0}^{n-1} \operatorname{sgn}(I_j(i_0, \dots, i_{n-1}))\alpha_{[i_j]_n}^{2[i_j/n]} \psi_{I_j(i_0,\dots,i_{n-1})}$$

を満たす．ただし $\operatorname{sgn}(I_j(i_0, \dots, i_{n-1}))$ は置換

$$\begin{pmatrix} I_j(i_0, \dots, i_{n-1}) \\ i_0, \dots, i_{j-1}, [i_j + n]_{2n}, i_{j+1}, \dots, i_{n-1} \end{pmatrix}$$

の符号である．以上をまとめれば，各成分が

$$G_{IJ}^{(n)} = \begin{cases} \operatorname{sgn}(I_j(I))\alpha_{[i_j]_n}^{2[i_j/n]}, & J = I_j(I),\ j = 1, 2, \dots, n, \\ 0, & \text{それ以外}, \end{cases}$$

で与えられる $2^n \times 2^n$ 行列 G による運動方程式

$$\frac{d}{dt}\left(\psi_I\right)_{I\in\mathcal{I}} = G^{(n)}\left(\psi_I\right)_{I\in\mathcal{I}}$$

に Plücker 座標 $(\psi_I)_{I\in\mathcal{I}}$ が従うといえる．

たとえば

$$G^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 \\ q_2^2 & 0 & 0 & 1 \\ -q_1^2 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & q_1^2 & -q_2^2 & 0 \end{pmatrix},$$

$$G^{(3)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ q_3^2 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ -q_2^2 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & q_2^2 & -q_3^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ q_1^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -q_1^2 & 0 & 0 & -q_3^2 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -q_1^2 & 0 & q_2^2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & q_1^2 & 0 & -q_2^2 & q_3^2 & 0 \end{pmatrix}$$

であり，$G^{(2)}$ は固有値 $\pm q_1 \pm q_2$ を，$G^{(3)}$ は $\pm q_1 \pm q_2 \pm q_3$ を持っている．

3.3. OU 過程と散乱データ (行列として)

Proposition 3.1. $(\mathrm{H})_0$ が成り立つと仮定する. r_i, η_i, m_i $(i=1,\dots,n)$ は Theorem 2.1 の通りとし, $A(t)$ を (2.1) により定める.

$$\sigma(i)=\mathrm{sgn}\left[\frac{\prod_{\alpha\neq i}(\eta_\alpha+\eta_i)}{\prod_{\beta=1}^n(p_\beta-\eta_i)}\right],\quad b(i)=\sigma(i)\left\{-2\eta_i\frac{\prod_{\alpha\neq i}(\eta_\alpha^2-\eta_i^2)}{\prod_{\beta=1}^n(p_\beta^2-\eta_i^2)}\right\}^{1/2},$$

とおき, $B=\mathrm{diag}[b(1),\dots,b(n)]$ とする. このとき次式が成り立つ.

$$\begin{aligned}(3.3)\qquad & U^{-1}\phi_a(t)U\\ &=-\frac{1}{2}\{V(\boldsymbol{c})R^{-1}B\}\big(I+A(t)\big)e^{tR}R^{-1}\{V(\boldsymbol{c})R^{-1}B\}^{-1}V(\boldsymbol{c})XC(\boldsymbol{c})U.\end{aligned}$$

References

[1] R.H. Cameron and W.T. Martin, Evaluation of various Wiener integrals by use of certain Sturm-Liouville differential equations, Bull. A.M.S., **51** (1945), 73–89.

[2] M.L. Kleptsyna and A. Le Breton, A Cameron-Martin type formula for general Gaussian processes — A filtering approach, Stoch. Stoch. Rep., **72** (2002), 229–250.

[3] S. Kotani, Probabilistic approach to reflectionless potentials (in Japanese), Symposium on Random matrices and related topics at Tsukuba Univ., 2000.

[4] H. Matsumoto and N. Ueki, Spectral analysis of Schrödinger operators with magnetic fields, Jour. Funct. Anal., **140** (1996), 218–255.

[5] H. McKean, Stochastic integrals, Academic Press, New York, 1969.

[6] T. Miwa, M. Jinbo and E. Date, Solitons, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2000.

[7] M. Sato and Y. Sato, Soliton equations as dynamical systems on infinite dimensional Grassmann manifold, in "Nonlinear PDE in Applied Sci. US-Japan Seminar, Tokyo 1982", P.D. Lax and H. Fujita eds., North-Holland, 1982, 259–271.

[8] K. Takasakai, Integrable systems as deformations of $\mathcal{D}$-modules, Proc. Sympo. Pure Math., **49** (1989), 143–168.

多次元 Brown 運動に対する田中の公式

植村 英明　　(愛知教育大学)

1. はじめに

多次元 Brown 運動の局所時間 $L(t,x)$ は Imkeller & Weisz [1] により，次の如く定義されている。

$$L(t,x) = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_0^t p_N(\varepsilon, B_s - x)ds. \tag{1}$$

ここで $B_s = (B_s^1, \ldots, B_s^N)$ は N 次元 Brown 運動，$p_N(t,x)$ は N 次元の Gauss 核を表し，残念ながら $x \neq 0$ を仮定する。更に残念なことには，上の収束は Wiener 汎関数の枠組みではとらえられておらず，超関数空間である Watanabe 空間 $\boldsymbol{D}_2^\alpha$ $(\alpha < 1 - N/2)$ を準備しておく必要がある。(Watanabe 空間の定義は次節に述べる。) 大雑把にいうと (1) は occupation time formula を念頭において $\int_0^t \delta_x(B_s)ds$ でもって局所時間がつかまえられることを示している。

さて，1 次元 Brown 運動に対しては，その局所時間をとらえるための有用な公式が今一つある。言わずと知れた Tanaka の公式である。

$$|B_t - x| = |B_0 - x| + \int_0^t \mathrm{sgn}(B_s - x)dB_s + L(t,x). \tag{2}$$

本講では，この Tanaka の公式が多次元 Brown 運動に対しても成立することを保証することを第一の目的とする。1 次元の場合，$|\cdot|'' = 2\delta$ が局所時間を生み出す根源であった。そこで多次元の場合，$|\cdot|$ の替わりに Newton ポテンシャル，もしくは対数ポテンシャルの核 (の 2 倍) を用いることにする。即ち

$$U(z) = \begin{cases} -\dfrac{\Gamma(N/2-1)}{2\pi^{N/2}} \cdot \dfrac{1}{|z|^{N-2}}, & \text{if } N \geq 3: \\ \dfrac{1}{\pi} \log|z|, & \text{if } N = 2 \end{cases}$$

に対して

$$U(B_t - x) = U(-x) + \int_0^t \langle \nabla U(B_s - x), dB_s \rangle + L(t,x) \tag{3}$$

を保証することが第一の目的である。ここで $\int_0^t \langle \nabla U(B_s - x), dB_s \rangle = \sum_{i=1}^N \int_0^t \partial_i U(B_s - x)dB_s^i$ である。なお $\nabla U(B_s - x)$ はもはや自乗可積分ではない。従って上式の確率積分は，Itô 積分の自然な拡張である Skorohod 積分として理解することとする。

さて (2) は劣マルチンゲール $|B_t - x|$ の Doob-Meyer 分解を与えている。本講の第 2 の目的は (3) を Watanabe 空間での Doob-Meyer 分解ととらえて，その一意性を示すことである。そこで martingale や natural increasing process 等の概念を Watanabe 空間の元に対しても自然に拡張し，(3) をこの観点から見つめ直す。

2. Watanabe 空間，Skorohod 積分

$I_{\boldsymbol{n}}(f_{\boldsymbol{n}})$ を $f_{\boldsymbol{n}}(s_1^{(1)},\dots,s_{n_1}^{(1)};\cdots;s_1^{(N)},\dots,s_{n_N}^{(N)})\in L^2(ds_1\cdots ds_n)\quad (\boldsymbol{n}=(n_1,\dots,n_N)\in\mathbb{Z}_+^N, n=|\boldsymbol{n}|=n_1+n_2+\cdots+n_N, (s_1,\dots,s_n)=(s_1^{(1)},\dots,s_{n_1}^{(1)},\dots,s_1^{(N)},\dots,s_{n_N}^{(N)}))$ の $\boldsymbol{n}$-重 Wiener 積分とする。

$$I_{\boldsymbol{n}}(f_{\boldsymbol{n}})=\int_0^t\cdots\int_0^t f_{\boldsymbol{n}}(s_1^{(1)},\dots,s_{n_1}^{(1)};\cdots;s_1^{(N)},\dots,s_{n_N}^{(N)})dB^1_{s_1^{(1)}}\cdot\cdot dB^1_{s_{n_1}^{(1)}}\cdots dB^N_{s_1^{(N)}}\cdot\cdot dB^N_{s_{n_N}^{(N)}}.$$

L^2 関数の Itô-Wiener 展開に注意して Watanabe 空間 $\boldsymbol{D}_2^\alpha\quad(\alpha\in\mathbb{R})$ を次で定める。

$$\boldsymbol{D}_2^\alpha=\{F=\sum I_{\boldsymbol{n}}(f_{\boldsymbol{n}}):\quad \|F\|_{2,\alpha}^2=\sum_{n=0}^\infty(1+n)^\alpha\sum_{|\boldsymbol{n}|=n}\boldsymbol{n}!\|f_{\boldsymbol{n}}\|^2<\infty\}.$$

ここで $\|f\|^2=\int\cdots\int|f|^2ds_1\cdots ds_n$, $\boldsymbol{n}!=n_1!n_2!\cdots n_N!$ である。また $\mathbb{R}^N$ 値汎関数に対しても同様に定義し $\boldsymbol{D}_2^\alpha(\mathbb{R}^N)$ と記す。

$f_{\boldsymbol{n}}(s;s_1^{(1)},\dots,s_{n_1}^{(1)};\cdots;s_1^{(N)},\dots,s_{n_N}^{(N)})\in L^2(dsds_1\cdots ds_n)$ に対して B^i による Skorohod 積分 $\int_0^t I_{\boldsymbol{n}}(f_{\boldsymbol{n}}(s))dB_s^i$ を次で定める。

$$\int_0^t I_{\boldsymbol{n}}(f_{\boldsymbol{n}}(s))dB_s^i=I_{\boldsymbol{n}+e_i}(\mathcal{S}_i f_{\boldsymbol{n}}).$$

ここで $\mathcal{S}_i f_{\boldsymbol{n}}$ は関数 $f_{\boldsymbol{n}}(s;s_1^{(1)},\dots,s_{n_1}^{(1)};\cdots;s_1^{(N)},\dots,s_{n_N}^{(N)})$ の，変数 $s,s_1^{(i)},\dots,s_{n_i}^{(i)}$ に関する対称化を表す。また $\boldsymbol{e}_i=(\delta_{1i},\dots,\delta_{Ni})$ （δ_{jk} は Kronecker のデルタ）とする。一般の Watanabe 空間の元 $G(s)=\sum I_{\boldsymbol{n}}(g_{\boldsymbol{n}}(s))$ に対して，その B^i による Skorohod 積分を $\int_0^t G(s)dB_s^i=\sum I_{\boldsymbol{n}+e_i}(\mathcal{S}_i g_{\boldsymbol{n}})$ と定義する。（もちろん左辺が定義できる場合のみ考える。）これは $G(s)$ が $ds\times P$ について自乗可積分で $\mathcal{B}_s$-adapted であるとき Itô 積分と一致する。ここで $\mathcal{B}_s=\sigma\{B_u;u\le s\}$ (Brownian filtration) である。

3. Tanaka の公式

定理 1. $x\neq0,\alpha<1-N/2$ とする。このとき (3) が $\boldsymbol{D}_2^\alpha$ で成り立つ。

証明は U を滑らかな関数 U_ε で近似し，$U_\varepsilon(B_t-x)$ に Itô の公式を適用する。その後 $\varepsilon\to0$ とすればよい。ここにおいて確率積分項をコントロールする際に次の命題が効力を発揮する。

命題 1. $\mathcal{B}_s$-*adapted* である $\boldsymbol{u}(s)\in\boldsymbol{D}_2^\beta(\mathbb{R}^N)$ が $\int_0^t\|\boldsymbol{u}(s)\|_{2,\beta}^2ds<\infty$ のとき，$\int_0^t\langle\boldsymbol{u}(s),dB_s\rangle\in\boldsymbol{D}_2^\beta$ であり，ある定数 C_β に対して

$$\left\|\int_0^t\langle\boldsymbol{u}(s),dB_s\rangle\right\|_{2,\beta}^2\le C_\beta\int_0^t\|\boldsymbol{u}(s)\|_{2,\beta}^2ds$$

が成立する。

4. Doob-Meyer 分解

まず Watanabe 空間 $\boldsymbol{D}_2^\alpha$ における martingale, increasing process についての説明から始めよう。

定義 1. $\gamma \in \mathbb{R}$ とする。$\boldsymbol{D}_2^\gamma$ 値 *process* $\{M_s; 0 \le s \le t\}$ がすべての $s < u$ に対して $E[M_u|\mathcal{B}_s] = M_s$ をみたすとき，M_s は $\boldsymbol{D}_2^\gamma$-*martingale* であるという。

注意 1. $M_s = \sum I_{\boldsymbol{n}}(f_{\boldsymbol{n}}(s; s_1, \ldots, s_n))$ が $\boldsymbol{D}_2^\gamma$-*martingale* であるための必要十分条件は，ある $f_{\boldsymbol{n}}(s_1, \ldots, s_n)$ が存在して $f_{\boldsymbol{n}}(s; s_1, \ldots, s_n) = f_{\boldsymbol{n}}(s_1, \ldots, s_n) \prod_j \mathbf{1}_{[0,s]}(s_j)$ となることである。

定義 2. $\gamma \le 0$ とする。$\boldsymbol{D}_2^\gamma$ 値 *process* $\{A_s; 0 \le s \le t\}$ が $A_0 = 0$ であり，かつ，$F \ge 0$ なるすべての $F \in \boldsymbol{D}_2^{-\gamma}$ に対して $\langle A_t, F\rangle \ge \langle A_s, F\rangle$ が成り立つとき，A_s は $\boldsymbol{D}_2^\gamma$-*increasing* であるという。

定義 3. $\boldsymbol{D}_2^\gamma$-*increasing process* $\{A_s; 0 \le s \le t\}$ が次の性質を満たすとき，A_s は *natural* であるという：すべての $\boldsymbol{D}_2^{-\gamma}$-*martingale* Y_s に対して

$$\lim_{|\Delta| \to 0} \sum_i \langle Y_{s_{i+1}} - Y_{s_i}, A_{s_{i+1}} - A_{s_i}\rangle = 0 \tag{4}$$

が成り立つ。ここで $\Delta = \{0 = s_0 < s_1 < \cdots < s_{n-1} < s_n = s\}$ は $[0, s]$ の分割で $|\Delta| = \max|s_{i+1} - s_i|$.

注意 2. 上の条件 (4) は，A_s が L^1-*increasing* で Y_s が有界 *martingale* のときは次と同値である。

$$E[Y_s A_s] = E\left[\int_0^s Y_{u-} dA_u\right]$$

定義 4. $\boldsymbol{D}_2^\gamma$-*process* $\{X_s; 0 \le s \le t\}$ が次の分解を持つとき，この分解を X_s の $\boldsymbol{D}_2^\gamma$-*Doob-Meyer* 分解という：

$$X_s = M_s + A_s, \quad 0 \le s \le t.$$

ここで M_s は $\boldsymbol{D}_2^\gamma$-*martingale*, A_s は $\boldsymbol{D}_2^\gamma$-*natural increasing process* である。

以上の準備の下，次の結果を得る。

命題 2. $\boldsymbol{D}_2^\gamma$-*Doob-Meyer* 分解は一意的である。

定理 2. $L(t, x)$ は *natural* である。

系 1. $U(B_s - x)$ が $\boldsymbol{D}_2^\gamma$-*Doob-Meyer* 分解をもつ必要十分条件は $\gamma < 1 - N/2$ である。

参考文献

[1] P. Imkeller and F. Weisz, *The Asymptotic Behaviour of Local Times and Occupation Integrals of the N Parameter Wiener Process in* $\mathbb{R}^d$, Probab. Theory Relat. Fields, **98** (1994), 47-75.

[2] H. Uemura, *Tanaka formula for multidimensional Brownian motions*, preprint.

Sample Path Large Deviations for a Class of Random Currents

桒田 和正 (京都大学大学院情報学研究科) *

M を d 次元コンパクト Riemann 多様体とし、$(\{z_t\}_{t\geq 0}, \{\mathbb{P}_x\}_{x\in M})$ を生成作用素 $\Delta/2+b$ に付随する M 上の拡散過程とする ($\Delta=-\delta d$: 非正定値ラプラシアン、b : 滑らかなベクトル場)。本研究では、$\{z_t\}_{t\geq 0}$ を 確率線積分を通じて M 上の 1-カレント (一次微分形式の双対空間) に埋め込み、1-カレントの空間に値を取る確率過程とみなして大偏差原理の評価を与えた。

滑らかな 1 次微分形式の元 α を定める毎に、$\{z\}_{t\geq 0}$ の経路に沿った確率線積分 $X_t(\alpha)$ が定まる。このとき、$X_t(\alpha)$ は半マルチンゲールとなる。以下 $Y_t(\alpha)$ 及び $A_t(\alpha)$ を $X_t(\alpha)$ のマルチンゲール部分及び有界変動部分とする。このとき、次の性質が成り立つ:

(i) 一次完全微分形式 $\alpha=du$ に対して、$X_t(\alpha)=u(z_t)-u(z_0)$,

(ii) $A_t(\alpha)=\displaystyle\int_0^t(\langle b,\alpha\rangle-\frac{1}{2}\delta\alpha)(z_s)ds$,

(iii) $Y_t(\alpha)$ の二次変分 $\langle Y(\alpha)\rangle_t$ は $\langle Y(\alpha)\rangle_t=\displaystyle\int_0^t|\alpha|^2(z_s)ds$ と表される。

α を動かすことにより、X_t, Y_t 及び A_t は滑らかな 1 次微分形式の全体 $\mathscr{D}_1$ 上の汎函数に値を取る確率変数と捉えられる。$\mathscr{D}_1$ 上に以下で定義するセミノルムの族 $\{\|\cdot\|_p\}_{p\geq 0}$ により Schwartz 位相を定める:

$$\|\alpha\|_p:=\left\{\int_M|(1-\Delta_1)^p\alpha|^2dv\right\}^{1/2}$$

(Δ_1 : 1 次微分形式に作用する Hodge-小平ラプラシアン、dv : 正規化された Riemann 測度)
$\mathscr{D}_{1p}$ を $\mathscr{D}_1$ の $\|\cdot\|_p$ による完備化とし、$\mathscr{D}'_{1p}$ をその双対空間とする。この時、$p>d/2$ ならば $\mathscr{C}_p:=C([0,\infty)\to\mathscr{D}'_{1p})$ に値を取る Y の修正が存在する。また $p>(d+1)/2$ ならば $\mathscr{C}_p$ に値を取る X の修正も存在する [4]。従って、以後 X は $\mathscr{C}_p$-値確率変数 ($\mathscr{D}'_{1p}$-値確率過程) とみなす。以下の Y 及び X に関する結果は各々$p>d/2$, $p>(d+1)/2$ の条件下で成立する。

このような埋め込みのもと、長時間漸近挙動に関する各種の極限定理が知られている。

大数の法則 [2]:

$e\in\mathscr{D}'_1$ を $e(\alpha)=\displaystyle\int_M(\langle b,\alpha\rangle-\frac{1}{2}\delta\alpha)dm$ で定める (dm: $\{z_t\}_{t\geq 0}$ の不変確率測度)。このとき、$\dfrac{1}{t}X_t$ は $t\to\infty$ で e に概収束する。

中心極限定理 [4]:

$Y_t^\lambda:=\dfrac{1}{\sqrt{\lambda}}Y_{\lambda t}$, $X_t^\lambda:=\dfrac{1}{\sqrt{\lambda}}(X_{\lambda t}-\lambda te)$ とおく。$\mathscr{C}_p$ に値を取る確率変数 (カレント値 Wiener 過程) W^1, W^2 が存在して、Y^λ, X^λ は各々$\lambda\to\infty$ で W^1, W^2 に分布収束する。

ここで スケールパラメータ $g(\lambda)$ を、$\lim_{\lambda\to\infty}g(\lambda)=\infty$ なるように与え、$\tilde{X}^\lambda:=g(\lambda)^{-1}X^\lambda$, $\tilde{Y}^\lambda:=g(\lambda)^{-1}Y^\lambda$ と置く。このとき、$\tilde{X}^\lambda$ 及び $\tilde{Y}^\lambda$ の $\mathscr{C}_p$ 上の分布について $g(\lambda)$ の発散オーダーの条件のもと、大偏差原理の評価が成り立つ。

*e-mail:kkuwada@acs.i.kyoto-u.ac.jp

Theorem 1 $\lim_{\lambda\to\infty}\sqrt{\lambda}/g(\lambda)=\infty$ と仮定する。

(i) $\tilde{Y}^\lambda$ の分布は、速度関数 L、速さ $g(\lambda)^2$ で $\{z_t\}_{t\geq 0}$ の初期値について一様に大偏差原理を満たす。即ち、任意のボレル可測集合 $A\subset\mathscr{C}_p$ に対して、

$$\begin{aligned}\limsup_{\lambda\to\infty}\frac{1}{g(\lambda)^2}\log\left(\sup_{x\in M}\mathbb{P}_x[\tilde{Y}^\lambda\in A]\right) &\leq -\inf_{w\in\bar{A}}L(w),\\ \liminf_{\lambda\to\infty}\frac{1}{g(\lambda)^2}\log\left(\inf_{x\in M}\mathbb{P}_x[\tilde{Y}^\lambda\in A]\right) &\geq -\inf_{w\in\mathring{A}}L(w).\end{aligned}$$

(ii) $\tilde{X}^\lambda$ の分布は、速度関数 $\hat{L}$、速さ $g(\lambda)^2$ で z_0 の分布について一様に大偏差原理を満たす。

速度関数 L 及び $\hat{L}$ は次の形で与えられる。

$$L(w)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^\infty\|w_t'\|^2_{L_1^2(m)}\,dt & w\text{ は }L_1^2(m)\text{-値絶対連続関数で }w_0=0,\\ \infty & \text{その他の場合},\end{cases}$$

$$\hat{L}(w)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^\infty\|w_t'\|^2_{L_1^2(m)}\,dt & \langle w_t',\alpha_e\rangle=0\text{ が任意の }\alpha\in\mathscr{D}_{1p}\text{ で成立し、}L(w)<\infty,\\ \infty & \text{その他の場合}.\end{cases}$$

但し、u_α を $(\frac{1}{2}\Delta+b)u_\alpha=\langle b,\alpha\rangle-\frac{1}{2}\delta\alpha-\langle e,\alpha\rangle$ の解とし、$\alpha_e=du_\alpha$ で α_e を定める。

$g(\lambda)^{-1}W^1$ 及び $g(\lambda)^{-1}W^2$ の分布は、各々速度関数 L 及び $\hat{L}$、速度 $g(\lambda)^2$ で z_0 の分布について一様に大偏差原理を満たすことを注意しておく。

また、この定理の系として Strassen 型の重複対数法則が得られる。

Theorem 2 $g(\lambda)=\sqrt{\log\log\lambda}$ とおく。$\{\tilde{X}^\lambda\}_{\lambda>0}$, $\{\tilde{Y}^\lambda\}_{\lambda>0}$ は確率 *1* で各々$\mathscr{C}_p$ のプレコンパクト集合になる。更に、$\lambda\to\infty$ での収束部分列の極限のなす集合は、各々$\{L\leq 1\}$, $\{\hat{L}\leq 1\}$ に確率 *1* で一致する。

これらの定理の証明は、Baldi[1] の方法の 1-カレント値確率過程への拡張から得られる。

また、Theorem 2 の系として、非コンパクトアーベル被覆多様体上のブラウン運動の距離関数に関する重複対数法則が従う。即ち、アーベル群 $\Gamma\subset\pi_1(M)/[\pi_1(M),\pi_1(M)]\simeq H_1(M;\mathbb{Z})$ を被覆変換群にもつ M のリーマン被覆多様体 X の距離関数を dist、X 上のブラウン運動を $\{B_t\}_{t\geq 0}$ としたとき、次が成り立つ。

Corollary 3

$$0<\limsup_{t\to\infty}\frac{\mathrm{dist}(B_t,B_0)}{\sqrt{t\log\log t}}<\infty\qquad a.s.$$

References

[1] Baldi, P.: *Large deviations for diffusion processes with homogenization and applications,* Ann. Probab. **19**(1991), 509–524.

[2] Ikeda, N.: *Limit theorems for a class of random currents,* Probabilistic methods in mathematical physics (Katata/Kyoto, 1985), 181–193, Academic Press, Boston, MA, 1987.

[3] Kuwada, K.: *Sample path large deviations for a class of random currents,* preprint.

[4] Ochi, Y.: *Limit theorems for a class of diffusion processes,* Stochastics **15**(1985), 251-269.

確率論と計算数学

確率論における数論的問題，数値解析における確率論的問題について，基本的講演を何人かの方に喋ってもらった．本報告集では，プログラムと 4 人の方々の講演予稿を収録する．

研究会名: 「確率論と計算数学」

日時: 2002 年 12 月 2 日 (月) - 12 月 4 日 (水)

場所: 〒 920-0913 金沢市西町 3 番丁 1 6 番地金沢市西町教育研修館 金沢大学サテライト・プラザ

分担者: 高信 敏 (金沢大学・理学部) (世話人 小川重義 (金沢大学・工学部))

内容: 確率論における数論的問題，数値解析における確率論的問題について，基本的講演を何人かの方にお願いし，また 一般講演も時間的余裕のある限り受け付け，話してもらった．

講演者:

1. 小川重義 (金沢大学・工学部) ヘーゼルグローヴ法に依る数値積分について –考察と実験
2. 杉田 洋 (九州大学大学院・数理学研究院) Weyl 変換による疑似乱数 –多項間相関の指数的減衰 その 1
3. 秋山茂樹 (新潟大学・理学部) Salem 数と一様分布 mod 1
4. 藤田岳彦 (一橋大学・商学部) Markovian type van der Corput sequence and its application to numerical integration
5. 伊藤俊次 (金沢大学・工学部) On double rotation systems
6. 釜江哲朗 (大阪市立大学・理学部) Statistical problems related to 1-dimensional rotations
7. 福山克司 (神戸大学・理学部) 間隙三角級数の概不変原理について
8. 安富真一 (鈴鹿工専) Kesten's proof on 1-dim bounded remainder sets
9. 森 真 (日本大学・文理学部) 1 次元写像から作られる tree の Hausdorff 次元
10. 杉田 洋 (九州大学大学院・数理学研究院) Weyl 変換による疑似乱数 –多項間相関の指数的減衰 その 2
11. 安富健児 (神戸大学・自然科学研究科) Weyl 変換に関する従属性消滅定理： 杉田予想の解決
12. 高信 敏 (金沢大学・理学部) 加法的関数の確率拡張
13. 福山克司 (神戸大学・理学部) 間隙級数の重複対数の法則の上からの最良評価とその実現

Salem 数と一様分布 mod 1

秋山茂樹（新潟大・理）

この仕事は，名古屋大学の谷川好男氏との共同研究である．実数列 (u_n) $n = 1, 2, \ldots$ が一様分布 mod 1 するとは，u_n の小数部分が，$[0, 1)$ に一様に分布するという意味である．正確を期すれば，任意の $[0, 1)$ の部分区間 $I = [a, b)$ に対して $A_N(u_n, I)$ を u_n の小数部分 $\{u_n\}$ が区間 I に入る個数とするとき，

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} A_N(u_n, I) = b - a$$

が成立する事となる．区間として $[a, b)$ の代わりに $[a, b], (a, b], (a, b)$ としても同じである．この条件は任意の $[0, 1]$ 区間の連続関数 f に対して

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} f(\{u_n\}) = \int_0^1 f(x)dx \tag{1}$$

が成立する事と同値となる．連続関数を Fourier 展開することで任意の自然数 h に対して

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} \exp(2\pi hiu_n) = 0$$

が成立することも一様分布と同値であることが示せる．すなわち，複素数値関数の $\exp(2\pi hix)$ に対してのみ，(1) を確かめればよいのである．このことを Weyl の規準といい，左辺の $\sum_{n=1}^{N}\exp(2\pi hiu_n)$ を Weyl 和という．Weyl 和の非自明な評価を得ることは解析数論の大問題である．技巧的な評価方法が多く知られており，一様分布も様々な数列について確かめられている．大雑把に言えば，多項式オーダーの関数については，かなり多くの結果が知られているといってよい．たとえば α を無理数としたとき α を先頭の係数とする多項式 $P(x)$ で $u_n = P(n)$ とすれば一様分布する．一方，指数オーダーの増大度をもつ関数についての一様分布を示す問題は非常に難しい．測度論的な結果として Koksma は $\alpha > 1$ のとき殆どすべての α に対して $u_n = \alpha^n$ は一様分布することを示した．ここで殆どすべてというのは $\mathbb{R}^1$ の Legesgue 測度に関して言う．ここまでの一様分布の一般論については [4] に詳しい．整数論の研究者は，具体的な α で (α^n) が一様分布するものを長期にわたって探してきた．たとえば，3/2 とか一般に代数的数，自然対数の底 e や円周率 π の場合で考えるのだが知られている知識は非常に少ない．たとえば [3] を見よ．測度零を除いて成り立つのだから，一つぐらい具体例が合ってもよかろうとという気がするが，この指数オーダー場合の一様分布の問題は具体的に α を固定すると非常に難しい問題と思われる．[1]

一方奇妙なことに，(α^n) が一様分布しない例は，古くから知られている．Pisot 数とは 1 より大の実代数的整数で，他の根は単位円の内部に含まれるものをいう．Salem 数は 1 より大の実代数的整数で，他の根が単位円の内部または周上にあるもので，さらに少なくとも一つの根が単位円周上に存在するものをいう．Salem 数は 4 次以上の偶数次の相反方程式の根となる．相反方程式とは，ξ が根ならば $1/\xi$ も根となるような方程式である．実は，Pisot 数と Salem 数が (α^n) が一様分布しないことで有名な数である．Pisot 数 α については α^n と整数との距離は $n\to\infty$ で 0 に収束する．また α が Salem 数のときは小数部分 $\{\alpha^n\}$ は $[0,1)$ で稠密となるが一様分布ではない．逆に Salem 数は $\{\alpha^n\}$ が $[0,1)$ で稠密となる知られている唯一の具体的な数である．Pisot 数，Salem 数だけを扱った特色ある本として [2] がある．

従って α が Salem 数ならば (α^n) は一様分布しないのだが，この分布はいったいどれくらい一様分布と離れているのだろうか？．これが本研究の問題意識である．我々は次のような評価を導くことに成功した．

Theorem 1. α を次数 8 以上の Salem 数とする．このとき極限値

$$\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}A_N((\alpha^n),I)$$

が存在して

$$\left|\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}A_N((\alpha^n),I)-|I|\right|\le 2\zeta\left(\frac{\deg\alpha-2}{4}\right)c_0^{\frac{\deg\alpha}{2}-1}|I|, \tag{2}$$

を満たす．ここで $\zeta(s)$ は Riemann ゼータ関数，$\deg\alpha$ は α の次数，$|I|$ は区間 I の長さである．また c_0 は次の定数

$$c_0=\frac{1}{\sqrt{2}\pi}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{32\pi}\right)=0.16\ldots$$

である．

よく知られているように $\zeta(x)$ は 実数 x が大きくなるとき，1 に収束する．したがって，(2) の左辺の $|I|$ の係数は α の次数が大きくなるにつれて急速に小となる．言い換えると，**Salem 数 α の次数が大になると，(α^n) の分布は急速に一様分布に近づく** ことがわかった．

証明には，Kronecker の近似定理，Vaalar, Beuling, Selberg 等による区間の特性関数の一様近似などを用いる．

[1] M.Levin [5] は一様分布する α の構成法を示した．しかし，この α は，いわば一様分布するように逐次近似して構成するので「具体的」といえるかどうか微妙であり，数学者の感性にも依る．

参考文献

[1] S.Akiyama and Y.Tanigawa, Salem numbers and uniform distribution modulo 1, preprint.

[2] M. J. Bertin, A. Decomp-Guilloux, M. Grandet-Hugot, M. Pathiaux-Delefosse and J.P. Schreiber, *Pisot and Salem numbers*, Birkhäuser Verlag, Basel-Boston-Berlin, 1992.

[3] F. Beukers, Fractional parts of powers of 3/2, Prog. Math. 22 (1982) 13–18.

[4] L. Kuipers and H. Niederreiter, *Uniform distribution of sequences*, Pure and Applied Math., John Wiley & Sons, 1974.

[5] M. B. Levin, On the complete uniform distribution of the fractional parts of the exponential function. (Russian) Trudy Sem. Petrovsk. No. 7 (1981), 245–256.

Statistical problems related to 1-dimensional rotations

Teturo Kamae[1] and Hayato Takahashi[2]

Let $\xi = \xi_1\xi_2\cdots\xi_m$ be a finite 0-1-sequence. We denote the length m of ξ by $|\xi|$ and the number of 1 in ξ by $|\xi|_1$. We also denote $\rho(\xi) := |\xi|_1/|\xi|$, the ratio of 1 in ξ. Let $\xi = \xi_1\xi_2\cdots\xi_m$ and $\eta = \eta_1\eta_2\cdots\eta_n$ be finite 0-1-sequences. We say that η is a *factor* of ξ if $n \le m$ and there exists an integer i with $0 \le i \le m-n$ such that $\eta_j = \xi_{i+j}$ $(j = 1, 2, \cdots, n)$. In this case, we denote $\eta \prec \xi$.

For a finite 0-1-sequence $\xi = \xi_1\xi_2\cdots\xi_m$, we denote by Ω_ξ the set of $(\alpha, \beta) \in [0,1] \times [0,1)$ satisfying

$$\xi_i = \lfloor i\alpha + \beta \rfloor - \lfloor (i-1)\alpha + \beta \rfloor \quad (i = 1, 2, \cdots, m), \tag{1}$$

where $\lfloor\ \rfloor$ denotes the floor function.

We call ξ a (finite) *Sturmian* sequence if $\Omega_\xi \ne \emptyset$. We denote by St_m the set of Sturmian sequences of length m.

We may consider $\xi = \xi_1\xi_2\cdots\xi_m$ as a random variable defined by (1) with random element β in the Lebesgue measure space $[0,1)$ and unknown parameter α in $[0,1]$. The sample space is St_m. As usual the probability (expectation, variance) under the parameter α is denoted by P_α (E_α, V_α, respectively). Thus, we have a statistical model $(\mathrm{St}_m, P_\alpha, \alpha \in [0,1])$.

By (1),

$$|\xi|_1 = \lfloor m\alpha + \beta \rfloor = \begin{cases} \lfloor m\alpha \rfloor & (\beta < 1 - \{m\alpha\}) \\ \lfloor m\alpha \rfloor + 1 & (\beta \ge 1 - \{m\alpha\}), \end{cases}$$

where $\{\ \}$ denotes the fractional part. Hence, we have

$$\begin{aligned} E_\alpha(\rho(\xi)) &= (1/m)E_\alpha(|\xi|_1) \\ &= (1/m)(\lfloor m\alpha \rfloor(1 - \{m\alpha\}) + (\lfloor m\alpha \rfloor + 1)\{m\alpha\}) \\ &= (1/m)(\lfloor m\alpha \rfloor + \{m\alpha\}) \\ &= (1/m)(m\alpha) = \alpha \end{aligned} \tag{2}$$

$$\begin{aligned} V_\alpha(\rho(\xi)) &= (1/m^2)E_\alpha((|\xi|_1 - m\alpha)^2) \\ &= (1/m^2)((\lfloor m\alpha \rfloor - m\alpha)^2(1 - \{m\alpha\}) + (\lfloor m\alpha \rfloor + 1 - m\alpha)^2\{m\alpha\}) \\ &= (1/m^2)(\{m\alpha\}^2(1 - \{m\alpha\}) + (1 - \{m\alpha\})^2\{m\alpha\}) \\ &= (1/m^2)\{m\alpha\}(1 - \{m\alpha\}). \end{aligned} \tag{3}$$

[1]Department of Mathematics, Osaka City University, Osaka, 558-8585 Japan (kamae@sci.osaka-cu.ac.jp)

[2]Department of Statistical Science, The Graduate University for Advanced Studies, Tokyo, 106-8569 Japan (takahasi@ism.ac.jp)

Therefore, the sample mean $\rho(\xi)$ is an unbiased estimator of α having the variance given by (3). It is not admissible if $m = 6$ or $m \geq 8$ under the quadratic loss function since it is not based on the minimum sufficient statistic (Theorem 2).

The following theorem is well known.

Theorem 1 (M. Morse, G.A. Hedlund). For any finite 0-1-sequence ξ, ξ is Sturmian if and only if it is balanced.

Let m be a positive integer. Then, we have the partition

$$[0,1] \times [0,1) = \bigcup_{\xi \in \mathrm{St}_m} \Omega_\xi \quad \text{(disjoint)}. \tag{4}$$

This partition is discussed by Yasutomi and Berstel & Pocchiola.

It is proved by Jean Berstel and Michel Pocchiola that for any finite Sturmian sequence ξ, the domain Ω_ξ is surrounded by at most 4 pieces of line segments, at most 2 from above and at most 2 from below. Thus, there are only 3 cases as in Figure 1 for the shape of Ω_ξ.

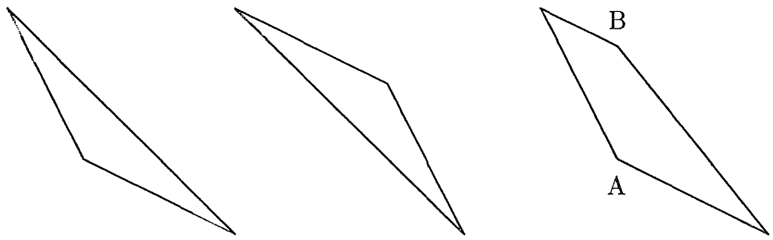


Figure 1: Shape of Ω_ξ

In this talk, we prove that in the 3rd case in Figure 1, the horizontal positions of A and B coincide, which implies that the graph of the likelihood function $P_\alpha(\xi)$ with respect to α given ξ is of triangular shape as in Figure 2.

The value $\hat{\alpha} = \hat{\alpha}(\xi)$ which maximize $P_\alpha(\xi)$ is the *maximal likelihood estimator*. That is,

$$P_{\hat{\alpha}}(\xi) = \max_{\alpha \in [0,1]} P_\alpha(\xi). \tag{5}$$

Let $\xi = \xi_1 \xi_2 \cdots \xi_m$ be a 0-1-sequence. A positive integer p is called a *period* of ξ if

$$\xi_i = \xi_{i+p} \quad (i = 1, 2, \cdots, m-p). \tag{6}$$

This is equivalent to say that for any factor η of ξ with $|\eta| = p$, $\xi \prec \eta^\infty$ holds, where η^∞ implies the infinite time concatenation of η.

Let $\xi = \xi_1 \xi_2 \cdots \xi_m$ be a 0-1-sequence. A positive integer p is called a *period* of ξ if

$$\xi_i = \xi_{i+p} \quad (i = 1, 2, \cdots, m-p). \tag{7}$$

This is equivalent to say that for any factor η of ξ with $|\eta| = p$, $\xi \prec \eta^\infty$ holds, where η^∞ implies the infinite time concatenation of η.

The minimum positive integer p as (6) is denoted by $\mathrm{per}(\xi)$. Note that $\mathrm{per}(\xi)$ exists always since $|\xi|$ is clearly a period of ξ. A factor η of ξ is called a *minimal cycle* of ξ if $|\eta| = \mathrm{per}(\xi)$. We define $\hat{\rho}(\xi) := \rho(\eta)$, where η is any minimal cycle of ξ.

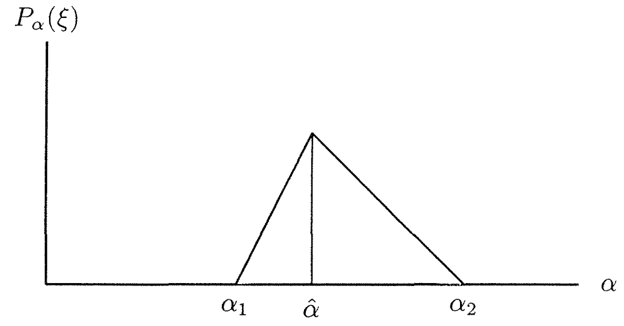


Figure 2: Likelihood function

Recall that a statistic $T = T(\xi)$ is called *sufficient* if for any $\xi \in \mathrm{St}_m$ and t, the conditional distribution $P_\alpha(\xi \mid T = t)$ does not depend on $\alpha \in [0, 1]$ as long as $P_\alpha(T = t) > 0$.

This condition of sufficiency is equivalent to that for any ξ, $\xi' \in \mathrm{St}_m$, $T(\xi) = T(\xi')$ holds if and only if $\hat{\alpha}(\xi) = \hat{\alpha}(\xi')$, $\alpha_1(\xi) = \alpha_1(\xi')$ and $\alpha_2(\xi) = \alpha_2(\xi')$ holds (Figure 2). A sufficient statistics T is called a *minimum* sufficient statistics if for any sufficient statistics T', the partition on St_m induced by T' is finer than that induced by T. Note that a minimum sufficient statistics is unique in the sense of the partition induced on St_m. Clearly, the triple $(\hat{\alpha}, \alpha_1, \alpha_2)$ is a minimum sufficient statistics.

For $\xi \in \mathrm{St}_m$, we define

$$\begin{aligned} \underline{I}(\xi) &:= \left\{ i \in \{0, 1, \cdots, m\};\ \Xi_i - i\hat{\rho}(\xi) = \min_{0 \le j \le m} (\Xi_j - j\hat{\rho}(\xi)) \right\} \\ \overline{I}(\xi) &:= \left\{ i \in \{0, 1, \cdots, m\};\ \Xi_i - i\hat{\rho}(\xi) = \max_{0 \le j \le m} (\Xi_j - j\hat{\rho}(\xi)) \right\}. \end{aligned}$$

The maximum value in $\overline{I}(\xi)$, etc., considered as a function of ξ is denoted by $\max \overline{I}$. We prove that $\max \overline{I}(\xi) - \min \underline{I}(\xi)$ is the slope of the left line segment and $\max \underline{I}(\xi) - \min \overline{I}(\xi)$ is minus of the slope of the right line segment in Figure 2.

In this talk, we prove the following theorem.

Theorem 2. For the statistical model $(\mathrm{St}_m, P_\alpha, \alpha \in [0, 1])$ with the quadratic loss function, we have
(i) The maximal likelihood estimator $\hat{\alpha}$ satisfies that $\hat{\alpha}(\xi) = \hat{\rho}(\xi)$ and the likelihood at $\hat{\alpha}$ satisfies that $P_{\hat{\alpha}}(\xi) = 1/\mathrm{per}(\xi)$.
(ii) As for α_1 and α_2 in Figure 2, it holds for any nontrivial $\xi \in \mathrm{St}_m$ that

$$\alpha_1 = \hat{\alpha} - \frac{1}{(\max \overline{I}(\xi) - \min \underline{I}(\xi))\mathrm{per}(\xi)}$$
$$\alpha_2 = \hat{\alpha} + \frac{1}{(\max \underline{I}(\xi) - \min \overline{I}(\xi))\mathrm{per}(\xi)}$$

(iii) The statistics $(\hat{\rho},\ \max \overline{I} - \min \underline{I},\ \max \underline{I} - \min \overline{I})$ is a minimum sufficient statistics.
(iv) The sample mean $\rho = \rho(\xi)$ is not based on the minimum sufficient statistics and is not admissible if $m = 6$ or $m \ge 8$.

References:

M. Morse and G.A. Hedlund, Symbolic dynamics II: Sturmian sequences, *Amer. J. Math.* **62** (1940), pp.1–42.

Jean Berstel and Michel Pocchiola, Random generation of finite Sturmian words, *Discrete Mathematics* **153** (1996), pp.29–35.

Shin-ichi Yasutomi, The continued fraction expansion of α with $\mu(\alpha) = 3$, *Acta Arith.* **84-4** (1998), pp.337–374.

Teturo Kamae and Hayato Takahashi, Statistical problems related to 1-dimensional rotations (*preprint*).

1次元写像から作られる Tree の Hausdorff 次元

森 真 (日本大学文理学部)

$I = [0,1]$ の上の piecewise linear, expansive, topologically transitive transformation F を考える，すなわち有限集合 $\mathcal{A}$ と $a \in \mathcal{A}$ に対応する区間による I の分割 $\{\langle a\rangle\}_{a\in\mathcal{A}}$ があって

1. $(F|_{\langle a\rangle})'$ は定数.
2. F は expanding: $\xi = \lim_{n\to\infty} \dfrac{1}{n} \operatorname*{ess\,inf}_{x\in[0,1]} \log|F^{n\prime}(x)| > 0$.
3. F は topologically transitive, すなわち, 任意の $x \in I$ とその任意の近傍 U_x があって $F^n(U_x) \supset I$.

word $w = a_1 \cdots a_n$ については以下の記号を用いる.

1. $|w| = n$ (the length of a word w).
2. $\langle w\rangle = \cap_{i=0}^{n-1} F^{-i}(\langle a_{i+1}\rangle)$.

$\mathcal{W}_n$ を長さ n の admissible words 全体を表し，$\mathcal{W} = \cup_{n=0}^{\infty}\mathcal{W}_n$ とおく.

$0 < r < 1$ を 1 つ選び，$R = re^{\xi}$ とおく．このとき，F に対応する tree をまず，空ワードに対応する長さ 1 の branch($\emptyset$) を原点からのばす．その先端に長さ 1 のワードに対応する branch(a) ($a \in \mathcal{A}$) を各々長さ $R|\langle a\rangle|$ でのばす．これを続ける．すなわち，長さ n のワード $w = a_1 \cdots a_n$ に対応した branch (w) は branch ($a_1 \cdots a_{n-1}$) の端点から始まり，長さ $R^{|w|}|\langle w\rangle|$ でのびていて，その先端には $a_1 \cdots a_n b$ に対応する branch が続くものとする.

Definition 1. 1. $T^o = \cup_{w\in\mathcal{W}}(w)$ の閉包を tree T とよぶ.

2. $((w)) = \overline{\cup_{\langle u\rangle\subset\langle w\rangle}(u)}$ を (w) から始まる branch とよぶ.
3. $T\backslash T^o$ を flowers of T とよぶ．flower の各点は I の点に対応する.

Assumption 1. Words $u, v \in \mathcal{W}$ ($|u| \le |v|$) は端点以外では交わらない．さらにある定数 $C_0 > 0$ があって，任意の word $w \in \mathcal{W}$ について $((w)) \cap (T\backslash T^o)$ の直径は $C_0|(w)|$ より大きい.

Theorem 1. F が piecewise linear, expanding, topologically transitive transformation とする．このとき，tree の Hausdorff 次元は $\det(I - \Phi(R^\alpha, \alpha)) = 0$ の最大根になる．ここで，$\Phi(z, \alpha)$ は F に対応する α-Fredholm Matrix で，F の記号力学系への表現から得られる.

定理の基本的なアイディアは以下のようなものである.

tree T の Hausdorff 次元はその flower の次元で決定される．そして，flower は 1 次元の区間と対応することから，tree の次元は同じ長さの word による cover を用いて上から評価できる．さらに力学系を Markov 近似を行い，その記号力学系から flower に対応する新たな 1 次元力学系を構成して

定理 [Billingsley] μ_1, μ_2 を確率測度とし，$\dim_\mu$ で測度 μ に対応する Hausdorff 次元とする．このとき

$$T \subset \{((x)) \colon \lim_{n\to\infty} \frac{\log \mu_1((a^x[1,n]))}{\mu_2((a^x[1,n]))} \ge \alpha\}$$

ならば $\dim_{\mu_2} \ge \alpha \dim_{\mu_1}$

を用いる．ここで $a_1^x a_2^x \cdots$ は点 x の展開を表す．

これを用いて，1次元力学系と flower の測度の Hausdorff 次元を比較し，さらに Markov 型であることから，測度の Hausdorff 次元と Hausdorff 次元が等しいことが示される．以上により，tree の Hausdorff 次元の下からの評価を得て証明を終る．

参考文献

[1] P. Billingsley, *Ergodic Theory and Information*, John Wiley & Sons (1965).

[2] M. Mori, Fredholm determinant for piecewise monotonic transformations, *Osaka J. Math.* **29** (1992), 497–529.

[3] M. Mori, On the convergence of the spectrum of Perron–Frobenius operators, *Tokyo J. Math.* **17** (1994), 1–19.

[4] M. Mori, Dynamical system on Cantor set, *Tokyo J. Math.* **21** (1998), 217–231.

[5] M. Mori, Cantor sets generated by piecewise linear map, *Proceedings of the Institute of Natural Sciences, Nihon University,* **35** (2000), 145–171.

[6] M. Mori, Hausdorff dimension as Thermodynamical Formalism, preprint.

加法的関数の確率拡張

高信 敏 (金沢大学・理学部)

有限整アデール環 $\widehat{\mathbb{Z}}$

$\mathbb{Z}$ を有理整数環とする．素数 p に対して

$$d_p(x,y) = p^{-\alpha_p(x-y)}, \quad x, y \in \mathbb{Z}$$

ここで

$$\begin{aligned}\alpha_p(x) &= \sup\Big\{k\,; p^k \mid x\Big\}\\ &= \sup\Big\{k\,; x \bmod p^k = 0\Big\}\end{aligned}$$

とおく．このとき d_p は $\mathbb{Z}$ 上の距離となり，$(\mathbb{Z}, d_p)$ は全有界な距離空間となる．$\mathbb{Z}_p$ を $\mathbb{Z}$ の d_p による完備化とすると

$\mathbb{Z}_p$ はコンパクト，

$\mathbb{Z}$ は $\mathbb{Z}_p$ で稠密

となる．$\mathbb{Z}$ の代数演算 '$+$', '$\times$' は自然に $\mathbb{Z}_p$ に拡張されコンパクト環となる．とくに $\mathbb{Z}_p$ はコンパクト・アーベル群となり，一般論よりハール確率測度 (即ち，平行移動 $x \to x + a$ に関して不変な確率測度) λ_p が一意的に存在する．

さて，素数を小さい順に並べた列を $p_1 < p_2 < p_3 < \cdots$ として

$$\widehat{\mathbb{Z}} = \prod_{i=1}^{\infty} \mathbb{Z}_{p_i}$$

とおく．$\widehat{\mathbb{Z}}$ の距離として，例えば

$$d(x,y)=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{2^i}d_{p_i}(x_i,y_i),\quad x=(x_i),y=(y_i)\in\widehat{\mathbb{Z}}$$

とすれば $(\widehat{\mathbb{Z}},d)$ はコンパクト距離空間となる．$\widehat{\mathbb{Z}}$ 上の和，積を各座標ごとに，即ち，

$$x+y=(x_i+y_i),\ xy=(x_iy_i)$$

と定義すれば $\widehat{\mathbb{Z}}$ はコンパクト環となる．$\widehat{\mathbb{Z}}$ のハール確率測度 λ は無限直積確率測度 $\prod_{i=1}^{\infty}\lambda_{p_i}$ に他ならない．$\widehat{\mathbb{Z}}$ を有限整アデール環という．

各素数 p に対して，$\mathbb{Z}\subset\mathbb{Z}_p$ であるが，$\mathbb{Z}$ の元 n と $\widehat{\mathbb{Z}}$ の元 $(n,n,\ldots)$ を同一視することにより，$\mathbb{Z}$ は $\widehat{\mathbb{Z}}$ の部分環とみなすことができる．そして $\overline{\mathbb{Z}}^{d_p}=\mathbb{Z}_p\ ({}^{\forall}p)$ より

$$\mathbb{Z}\text{ の距離 }d\text{ による閉包}=\widehat{\mathbb{Z}}$$

となる．次のことに注意:

$$\lambda(\mathbb{Z})=0.$$

何となれば，これは $\lambda(\{x\})=0\ ({}^{\forall}x\in\widehat{\mathbb{Z}})$ と $\mathbb{Z}$ は可算集合であることから直ぐに従う．

mod 関数

(i) $m\in\mathbb{N},\geq 2,\ k\in\{0,1,\ldots,m-1\}$ に対して

$$m\widehat{\mathbb{Z}}+k=\left\{mx+k\,;x\in\widehat{\mathbb{Z}}\right\}$$

とおく．このとき

$$\widehat{\mathbb{Z}}=\sum_{k=0}^{m-1}(m\widehat{\mathbb{Z}}+k)$$

が成り立つ．この事実を使って mod 関数を次のように定義する:

$$x\text{ を }m\text{ で割ったときの余りが }k\underset{\text{def}}{\iff}x\in m\widehat{\mathbb{Z}}+k.$$

この k を $x \bmod m$ と表わす．$m=1$ のときは $x\bmod 1:=0$ と定義する．
(ii) $x\bmod m=0$ のときは，いつものように $m\mid x$ と書く．
(iii) $m\in\mathbb{N}$ に対して $\rho_m:\widehat{\mathbb{Z}}\to\mathbb{R}$ を次で定義する:

$$\rho_m(x)=\begin{cases}1 & \text{if }\ m\mid x,\\[2ex] 0 & \text{if }\ m\nmid x.\end{cases}$$

(iv) 素数 p に対して $\alpha_p:\widehat{\mathbb{Z}}\to[0,\infty]$ を次で定義する:

$$\alpha_p(x)=\sup\left\{k\,;p^k\mid x\right\}.$$

$x\neq 0$ で $\alpha_p(x)=\infty$ となる場合があることに注意！

加法的関数

数論的関数 $f:\mathbb{N}\to\mathbb{R}$ が次をみたすとき加法的 (additive) であるという:

$$k,l\in\mathbb{N}\text{ が互いに素ならば } f(kl)=f(k)+f(l).$$

さらに，次をみたすとき強加法的 (strongly additive) であるという:

$$f(p^m)=f(p),\quad {}^\forall m\in\mathbb{N},{}^\forall p\text{:素数}.$$

注意 1. f が加法的ならば

$$f(n)=\sum_p f(p^{\alpha_p(n)}),$$

さらに強加法的のときは

$$f(n)=\sum_p f(p)\rho_p(n)$$

と表現される.

加法的関数の確率拡張

$\alpha_p(n)$ or $\rho_p(n)$ は $\widehat{\mathbb{Z}}$ 上の関数として定義されているので，形式的に f を $\widehat{\mathbb{Z}}$ 上に拡張すると次のようになる:

$$f(x)=\begin{cases}\sum_p f(p^{\alpha_p(x)})=\sum_p\sum_{m=1}^\infty f(p^m)\mathbf{1}_{\alpha_p(x)=m}, & \text{加法的のとき},\\ \sum_p f(p)\rho_p(x) & \text{強加法的のとき}.\end{cases}$$

この p に関する無限和の概収束・概発散について，次のことが直ぐに分かる:

定理 1. $\sum_p\sum_{m=1}^\infty f(p^m)\mathbf{1}_{\alpha_p(x)=m}$ が概収束するための必要十分条件は次である:

$$\sum_p\frac{f(p)^2\wedge 1}{p}<\infty,\quad \sum_{p;|f(p)|<1}\frac{f(p)}{p}\text{ は収束する}. \tag{1}$$

定義 1. 条件 (1) の下で

$$\sum_p\sum_{m=1}^\infty f(p^m)\mathbf{1}_{\alpha_p(x)=m}$$

を加法的関数 f の確率拡張 (stochastic extension) とよぶ．そして同じ記号 f で表わす.

確率拡張とよぶ理由 (根拠)

Claim 1. (1) の条件の下で次が成り立つ:

$$P_n\Big(f\in\cdot\Big)\Longrightarrow\lambda\Big(f\in\cdot\Big)\quad\text{as } n\to\infty,$$

即ち，${}^\forall\xi\in\mathbb{R}$ に対して

$$\lim_{n\to\infty}\mathbf{E}^{P_n}\Big[e^{\sqrt{-1}\xi f}\Big]=\mathbf{E}^\lambda\Big[e^{\sqrt{-1}\xi f}\Big].$$

ここで P_n は次のように定義される $(\mathbb{N},\mathcal{P}(\mathbb{N}))$ 上の確率測度である:

$$P_n(A)=\frac{1}{n}\#A\cap\Big\{1,\dots,n\Big\},\quad A\in\mathcal{P}(\mathbb{N}).$$

なお $\lambda,\mathbf{E}^\lambda$ の中の f は確率拡張を表わす.

注意 2. 条件 (1) は Claim 1 が成り立つための必要条件でもある．即ち，$\mathbb{R}$ 上の分布列 $\{P_n(f\in\cdot)\}$ が $n\to\infty$ のとき，ある $\mathbb{R}$ 上の分布に収束するならば (1) が成り立たなければならない．

Claim 2. 条件 (1) を仮定する．このとき，各 $n\in\mathbb{N}$ に対して次が成り立つ:

$$\lim_{k\to\infty}\lambda\left(|f(x)-f(n)|>\varepsilon\;\middle|\;\begin{array}{l} p^{\alpha_p(n)+1}\mid x-n,\ {}^\forall p\in P_0,\\ p\mid x-n,\ {}^\forall p\in\{p_1,\dots,p_k\}\setminus P_0\end{array}\right)=0,\quad {}^\forall\varepsilon>0.$$

ここで $P_0=\{p\,;p\mid n\}$.

f が強加法的のときは，Claim 2 の主張は若干良くなる．

Claim 2′. 強加法的関数 f の表示を

$$f(k)=\sum_p f(p)\rho_p(k),\quad k\in\mathbb{N}$$

とするとき，条件 (1) より強く

$$\sum_p\frac{|f(p)|\wedge 1}{p}<\infty \tag{2}$$

を仮定する (この条件は $\sum_p f(p)\rho_p(x)$ が確率 1 で絶対収束するための条件である！)．このとき，各 $n\in\mathbb{N}$ に対して

$$\lim_{\delta\searrow 0}\lambda\Big(|f(x)-f(n)|>\varepsilon\;\Big|\;\tilde{d}(x,n)<\delta\Big)=0,\quad {}^\forall\varepsilon>0$$

が成り立つ．ここで

$$\tilde{d}(x,y):=\sum_{i=1}^\infty\frac{1}{2^i}(1-\rho_{p_i}(x-y)),\quad x,y\in\widehat{\mathbb{Z}}.$$

注意 3. $\tilde{d}$ は $\widehat{\mathbb{Z}}$ の擬距離である．

<u>support 定理</u>

一般の加法的関数 f についての話に戻る．

定理 2. 条件 (1) を仮定する．このとき

$$f\text{ の確率拡張の分布の support}=\overline{f(\mathbb{N})}.$$

参考文献

[1] P. Billingsley, The probability theory of additive arithmetic functions, *Ann. Probab.*, **2** (1974), 749–791.

[2] P.D.T.A. Elliott, *Probabilistic number theory I*, Springer-Verlag, 1979.

[3] P. Erdős, On the smoothness of the asymptotic distribution of additive arithmetical functions, *Amer. J. Math.*, **61** (1939), 722–725.

[4] P. Erdős and A. Wintner, Additive arithmetical functions and statistical independence, *Amer. J. Math.*, **61** (1939), 713–721.

[5] G.H. Hardy and E.M. Wright, *An introduction to the theory of numbers*, 5-th ed., Oxford Univ. Press, 1979.

[6] P. Lévy, Sur les séries dont les termes sont des variables éventuelles indépendantes, *Studia Math.*, **3** (1931), 119–155.

[7] H. Sugita and S. Takanobu, The probability of two integers to be co-prime, revisited — on the behavior of CLT-scaling limit, to appear in *Osaka J. Math.*

[8] 高信　敏, 強加法的関数の確率拡張に対する極限定理, Preprint (2002).

研究集会　**確率過程とその周辺**

平成１４年度科学研究費基盤（A）「確率論の総合的研究」（研究代表者 重川一郎）により表記の研究集会を開催します。

日程： 平成１４年１２月９日（月）－１２日（木）

場所： 慶応大学　日吉キャンパス（日吉研究室棟「来往舎」内　シンポジウムスペース）

プログラム

１２月９日（月）

13:30–14:20 永幡幸生（東工大・理工学研究科）
Regularity of the diffusion coefficient matrix for the lattice gas with energy

14:30–15:20 西川貴雄（東大・数理科学研究科）
The dynamics of entropic repulsion for the interface model

15:30–16:20 志賀徳造（東工大・理工学研究科）
An asymptotics of a Lévy's functional related to parabolic Anderson models

16:30–17:20 種村秀紀（千葉大・理学部）香取眞理（中央大・理工学部）
Scaling limit of vicious walkers

１２月１０日（火）

10:00–10:50 石渡聡（東北大・理学研究科）
ベキ零被覆グラフ上の Berry-Esseen 型定理

11:00–11:50 河野敬雄（京大・総合人間学部）
ランダム停止時間を持つ繰り返し囚人のジレンマ・ゲームのナッシュ均衡について

13:20–14:10 梁松（名大・多元数理科学研究科）
ユークリッド空間上の拡散過程における大偏差原理の精密評価

14:20–15:10 針谷祐（京大・数理研）
Phase transitions associated with exponential Brownian functionals

15:10–15:40 コーヒーブレイク

15:40–16:30 篠田正人（奈良女子大・理学部）
Phase transition of percolation on Sierpinski carpet lattices

16:40–17:30 土田兼治（東北大・理学研究科）
シュレーディンガー作用素の臨界性とスペクトル関数の微分可能性

18:00– 懇親会

１２月１１日（水）

10:00–10:50 植村英明（愛知教育大・教育学部）
多次元 Brown 運動に対する田中の公式

11:00–11:50 西岡國雄（都立大・理学研究科)
n 階境界条件に対応するブラウン運動

13:20–14:10 新井拓児（東京理科大・理工学部）
Mean-variance hedging for general semimartingale

14:20–15:10 Mu-Fa Chen(Beijing Normal Univ.)
Stochastic model of economics

15:10–15:40 コーヒーブレイク

15:40–17:40 ショートコミュニケーション

１２月１２日（木）

10:00–10:50 志村隆彰（統数研）渡部俊朗（会津大・総合数理科学センター）
Infinite divisibility and generalized subexponentiality

11:00–11:50 平場誠示（東京理科大・理工学部）
多次元安定分布の密度関数の漸近挙動

13:20–14:10 夏井利恵（慶応大・理工学部）
期待値無限大の定常確率変数列における最大値の漸近的挙動について

14:20–15:10 南就将（筑波大・数学系）
Statistics for the number of vertices of Galton-Watson trees

世話人：　前島信（慶応大学理工学部）竹田雅好（東北大学理学研究科）南　就将（筑波大学数学系）

注：　会場のある「来往舎」は東急東横線　日吉駅下車、慶応大学正門から入って左手の２番目のブロックです。理工学部のある矢上キャンパスではありませんのでご注意ください。なお会場周辺の地図は慶応大学のホームページ
http://www.hc.keio.ac.jp/index-jp.html
の中の
http://www.hc.keio.ac.jp/home/map.html
あるいは
http://www.hc.keio.ac.jp/access.html
にあります。

Regularity of the diffusion coefficient matrix for the lattice gas with energy

永幡幸生（東工大・理）

以下のような格子気体を考える．状態空間として $X := \{0, 1, \ldots, k\}^{\mathbf{Z}^d}$ で $d = 1, 2$ とする．配置を $\eta = (\eta_x)_{x \in \mathbf{Z}^d}$ とし，$\eta_x = 0$ ならば点 x は空，$\eta_x \neq 0$ ならば点 x にエネルギー η_x の粒子があるものとする．Markov 過程の作用素を X 上の局所関数に対して

$$Lf(\eta) := \sum_{x,y \in \mathbf{Z}^d : |x-y|=1} \{c_{\mathrm{ex}}(\eta_x)\pi^{(x,y)}f(\eta) + c_{\mathrm{ge}}(\eta_x)\pi^{x \to y}f(\eta)\},$$

とする．但し

$$\begin{aligned} \pi^{(x,y)}f(\eta) &:= \eta_x(1-\eta_y)(f(\eta^{(x,y)}) - f(\eta)), \\ \pi^{x \to y}f(\eta) &:= 1_{\{\eta_x \geq 2, 1 \leq \eta_y \leq k-1\}}(f(\eta^{x \to y}) - f(\eta)), \end{aligned}$$

$$(\eta^{(x,y)})_z := \begin{cases} \eta_y, & \text{if } z = x, \\ \eta_x, & \text{if } z = y, \\ \eta_z, & \text{otherwise,} \end{cases} \qquad (\eta^{x \to y})_z := \begin{cases} \eta_x - 1, & \text{if } z = x, \\ \eta_y + 1, & \text{if } z = y, \\ \eta_z, & \text{otherwise,} \end{cases}$$

で $c_{\mathrm{ex}}, c_{\mathrm{ge}}$ は $\{0, 1, \ldots, k\}$ から $\mathbf{R}$ への関数で真に正であるとする．

$$\bar{P}_{p,\rho}(\{\eta : \eta_x = l\}) := \begin{cases} 1 - p & \text{if } l = 0, \\ p\dfrac{1}{Z_{\alpha(p,\rho)}} & \text{if } l = 1, \\ p\dfrac{1}{Z_{\alpha(p,\rho)}} \dfrac{(\alpha(p,\rho))^{l-1}}{c_{\mathrm{ge}}(2)c_{\mathrm{ge}}(3) \cdots c_{\mathrm{ge}}(l)} & \text{if } 2 \leq l \leq k \end{cases}$$

（但し Z は正規化定数で，α は $\bar{E}_{p,\rho}[\eta_x] = \rho$ となるように与える）で与えられる直積確率測度を考えると L の対称な不変測度になる．これらを用いて以下のような 2×2 行列 $D(p, \rho)$ を考える．

$$D(p,\rho) = \tilde{D}(p,\rho)\chi^{-1}(p,\rho)$$

但し χ^{-1} は

$$\chi(p,\rho) := \begin{pmatrix} \bar{E}_{p,\rho}[\eta_0^2] - \rho^2 & (1-p)\rho \\ (1-p)\rho & p(1-p) \end{pmatrix}$$

の逆行列で，$\tilde{D}$ は対称行列で以下のような変分形式で与えられる．

$$\begin{aligned} &(a \cdot \tilde{D}(p,\rho)a) \\ &= \sum_{i,j \in \{E,P\}} a_i \tilde{D}_{i,j}(p,\rho)a_j \\ &:= \inf_u E_{p,\rho}\Big[c_{\mathrm{ex}}(\eta_0)\{\pi^{(0,e)}(a_1\eta_0 + a_2 1_{\{\eta_0 \neq 0\}}) + \sum_x \pi^{(0,e)}\tau_x u\}^2 \\ &\qquad + c_{\mathrm{ge}}(\eta_0)\{\pi^{0 \to e}(a_1\eta_0 + a_2 1_{\{\eta_0 \neq 0\}}) + \sum_x \pi^{0 \to e}\tau_x u\}^2\Big] \end{aligned}$$

（但し inf は局所関数全体の上でとる.）この $D(p, \rho)$ はこのモデルに対して流体力学極限をとった時の拡散係数行列になっている．

定理 1 この拡散係数行列 $D(p, \rho)$（の各成分）は p, ρ の滑らかな関数である．

この定理を導くために Green–Kubo 公式と呼ばれるもう一つの拡散計数行列の与え方を導入する.
$G = G(p,\rho)$ を 2×2 対称行列とし以下で与える.

$$\begin{aligned}(1)\quad & (a\cdot G(p,\rho)a) \\ &= E_{p,\rho}[c_{\mathrm{ex}}(\eta_0)\{\pi^{(0,e)}(a_1\eta_0 + a_2 1_{\{\eta_0\neq 0\}})\}^2] \\ &\quad + E_{p,\rho}[c_{\mathrm{ge}}(\eta_0)\{\pi^{0\to e}(a_1\eta_0 + a_2 1_{\{\eta_0\neq 0\}})\}^2] \\ &\quad -\frac{1}{2}\int_0^\infty \sum_x E_{p,\rho}[w_a\tau_x e^{Lt} w_a]dt\end{aligned} \tag{1}$$

このとき $\tilde{D} = G$ である.
これより (1) の最終行の中心極限定理の分散の滑らかさを示せばよい.

定理 2 $\int_0^\infty \sum_x E_{p,\rho}[w_a\tau_x e^{Lt} w_a]dt$ は p,ρ に関して滑らかな関数である.

証明の概要. $\mathcal{A}$ を

$$\mathcal{A} := \{A = (A_1,\dots,A_k) : A_i \subset\subset \mathbf{Z}^d,\ \text{with } A_i\cap A_j = \emptyset \text{ if } i\neq j\},$$

と定義し $A\in\mathcal{A}$ に対して

$$\Psi_A(\eta) := \prod_{i=1}^k \prod_{x\in A_i} 1_{\{\eta_x = i\}}(\eta).$$

とすると $\{\Psi_A\}_{A\in\mathcal{A}}$ は X 上の (sup norm に関する) 連続関数に対して基底になる. 局所関数 f をこの基底に関して展開したときの係数を $\hat{f}$ で表し, $Lf = \sum_{A\in\mathcal{A}} \hat{Lf}\Psi_A$ とする. このとき $\hat{Lf}(A) = \hat{L}\hat{f}(A)$ を満たす作用素 $\hat{L}$ は Markov 過程の作用素になる. $A\in\mathcal{A}$ と特殊な配置 $\eta^A \in X$

$$(\eta^A)_x := \begin{cases} i & x\in A_i \text{ for } i = 1,2,\dots k \\ 0 & \text{otherwise}\end{cases}$$

を対応させることにより, 特に $A\in\mathcal{A}$ から出発した Markov 過程は元の Markov 過程のうち η^A から出発したものと同値になる. X, E_A をこの Markov 過程および A から出発した Markov 過程に対する期待値とすると局所関数 f の係数 $\hat{f}$ に対して

$$\hat{g}_\lambda(A) := E_A \int_0^\infty \hat{f}(X_s)e^{-\lambda s}ds$$

ととると $g_\lambda = \sum_A \hat{g}_\lambda(A)\Psi_A$ は resolvent equation $\lambda g_\lambda - Lg_\lambda = f$ の解になる. これより中心極限定理の分散は以下の関数の $\lambda\to 0$ への極限で与えられる.

$$\begin{aligned}F_\lambda(p,\rho) &= \sum_{B\in\mathcal{A}} h(B,p,\rho)\sum_{C\in\mathcal{A}} \tilde{f}(C)m(C,p,\rho) \\ &\quad \times\{-E_C\int_0^\infty I_{\mathcal{B}(B)}(X_s)e^{-\lambda s}ds + E_{\theta_e C}\int_0^\infty I_{\mathcal{B}(B)}(X_s)e^{-\lambda s}ds\}\end{aligned}$$

但し $h(B,p,\rho)$ は有限個の $B\in\mathcal{A}$ を除いて 0 であり p,ρ の関数として滑らか, $\tilde{f}$ は有限個の $B\in\mathcal{A}$ を除いて 0 であり m は p,ρ の関数として滑らかであり $\mathcal{B}(B)\subset\mathcal{A}$ はある無限集合. この関数は λ と無関係な有限個の滑らかな関数の λ に依存した係数をもつ線形結合で表されている.

Lemma 3 $E_C\int_0^\infty I_{\mathcal{B}(B)}(X_s)e^{-\lambda s}ds$ は $\lambda\to 0$ で, $d=1$ では $1/\sqrt{\lambda}$ のオーダーで, $d=2$ では $-\log\lambda$ のオーダーで発散するが, その差分 $E_C\int_0^\infty I_{\mathcal{B}(B)}(X_s)e^{-\lambda s}ds - E_{\theta C}\int_0^\infty I_{\mathcal{B}(B)}(X_s)e^{-\lambda s}ds$ は $\lambda\to 0$ で, $d=1,2$ ともに収束する.

この補題から F_λ の極限関数も滑らかであることがわかる.

The dynamics of entropic repulsion for the interface model

西川貴雄 （東京大学数理科学研究科, 日本学術振興会特別研究員）

December, 2002

本講演では、界面モデルにおける entropic repulsion と呼ばれる現象について論ずる。entropic repulsion とは「界面モデルに対して壁をおいたとき、そのノイズの効果によって界面がどれぐらいの高さに押し上げられるか」を調べる問題である。

平衡系と呼ばれる有限 Gibbs 分布 μ_Λ^+ に対しては [1], [2], [3] などの結果がある。ここで、μ_Λ^+ は

$$\mu_\Lambda^+(d\phi) = \left(Z_\Lambda^+\right)^{-1} \exp\left(\sum_{\substack{x,y\in\mathbb{Z}^d \\ |x-y|=1}} V(\phi(x)-\phi(y))\right) \prod_{x\in\Lambda} d\phi^+(x) \prod_{x\in\mathbb{Z}^d\setminus\Lambda} \delta_0(d\phi(x)), \quad \Lambda\subset\mathbb{Z}^d,$$

により定義され、 $d\phi^+(x)$ は $[0,\infty)$ 上の Lebesgue 測度、V は以下の条件を満たす関数である：

1. (smoothness) $V\in C^2(\mathbb{R})$,
2. (symmetricity) $V(x)=V(-x)$, $x\in\mathbb{R}$
3. (strict convexity) 定数 $c_-, c_+>0$ が存在して

$$c_-\le V''(x)\le c_+$$

このとき、 $\mu_N^+ := \mu_{\Lambda_N}^+$, $\Lambda_N=[-N,N]^d\cap\mathbb{Z}^d$ とおくと、$d\ge 2$ のとき、定数 $C_1\le C_2$ が存在して

$$\lim_{N\to\infty}\mu_N^+\left(\phi(x)\le\sqrt{C\log_d(N)}\right)=0, \quad C<C_1 \tag{1}$$

$$\lim_{N\to\infty}\mu_N^+\left(\phi(x)\ge\sqrt{C\log_d(N)}\right)=0, \quad C>C_2 \tag{2}$$

が成立することが知られている。ここで、

$$\log_d(x)=\begin{cases}\log x, & d\ge 3,\\ (\log x)^2, & d=2,\end{cases}$$

である。特に、Gauss 場、つまり $V=x^2$ のときは $C_1=C_2=4\mathbf{G}_d$ となることがわかっている。ここで、$\mathbf{G}_d$ は

$$\mathbf{G}_d=\begin{cases}\lim_{t\to\infty}\int_0^t \mathbf{P}_s^{\mathrm{RW}}(0,0)\,ds, & d\ge 3\\ \lim_{t\to\infty}\dfrac{1}{2\log t}\int_0^t \mathbf{P}_s^{\mathrm{RW}}(0,0)\,ds, & d=2\end{cases}$$

にて与えられる。ここで、$\mathbf{P}_s^{\mathrm{RW}}(0,0) = \exp(s2\Delta)(0,0)$ は 2Δ により生成される simple random walk の transition kernel である。

同様に、Gibbs 分布を可逆測度とする時間発展に対しても、$t \to \infty$ のとき同様に界面が押し上げられていくと予想される。次の確率微分方程式により時間発展 ϕ_t を導入する：

$$d\phi_t(x) = -\mathbb{V}(x, \phi_t)\, dt + d\ell_t(x) + \sqrt{2} dw_t(x), \quad x \in \mathbb{Z}^d \tag{3}$$

ここで、$\mathbb{V}$ は以下で定義する：

$$\mathbb{V}(x, \phi) = \sum_{y \in \mathbb{Z}^d : |x-y|=1} V'(\phi(x) - \phi(y))$$

この V は上記の条件を満たすと仮定する。また、$\{w_t(x)\}$ は独立な一次元 Brownian motion の族であり、$\ell_t(x)$ は $\phi_t(x)$ に対する local time である。この時間発展 ϕ_t に対する $t \to \infty$ のときの挙動を議論の対象とする。

本講演の主結果は以下の通りである：

Theorem 1 (Deuschel-N.,[4]). 初期条件 ϕ_0 は独立同分布であり、$\phi_0(0)$ の２次モーメントは有界であると仮定する。このとき、$d \geq 2$ の下で、定数 $C_1 \leq C_2$ が存在して、

$$\lim_{t \to \infty} \mathbb{P}_{\phi_0} \left(\phi_t(x) \leq \sqrt{C \log_d (t^{1/2})} \right) = 0, \quad C < C_1 \tag{4}$$

$$\lim_{t \to \infty} \mathbb{P}_{\phi_0} \left(\phi_t(x) \geq \sqrt{C \log_d (t^{1/2})} \right) = 0, \quad C > C_2. \tag{5}$$

が成立する。特に、 $V(x) = x^2$ であるならば、$C_1 = C_2 = 4\mathbf{G}_d$ が成立する。

我々の結果 (4),(5) は、平衡系の結果 (1),(2) において $t = N^2$ としたものと符合することがわかる。特に、Gauss 場の場合の定数も完全に符合している。これは、(3) のスペクトル・ギャップが N^2 のオーダーであることと密接に関連している。

参考文献

[1] E. Bolthausen, J.-D. Deuschel, and G. Giacomin, *Entropic repulsion and the maximum of the two-dimensional harmonic crystal*, Ann. Probab. **29** (2001), 1670–1692.

[2] E. Bolthausen, J.-D. Deuschel, and O. Zeitouni, *Entropic repulsion of the lattice free field*, Comm. Math. Phys. **170** (1995), 417–443.

[3] J.-D. Deuschel and G. Giacomin, *Entropic repulsion for the free field: pathwise characterization in* $d \geq 3$, Commun. Math. Phys. **206** (1999), 447–462.

[4] J.-D. Deuschel and T. Nishikawa, *The dynamics of entropic repulsion for the interface model*, in preparation, 2002.

An asymptotics of a Lévy functional related to the parabolic Anderson model

志賀　徳造　(東京工業大学理工学研究科)

This is a joint work with M. Cranston and T. Mountford.

Let $\{L_x(t)\}_{x\in Z^d}$ be independent copies of a centered Lévy process $L(t)$ defined on a probability space $(\Omega, \mathcal{F}, \boldsymbol{Q})$, which is given by

$$L(t) = \alpha B(t) + \int_{[0,t]\times R} u\tilde{N}(dsdu),$$

where $\{B(t)\}$ is a Brownian motion, $\{\tilde{N}(dsdu)\}$ is a compensated Poisson random measures on $[0, \infty) \times \boldsymbol{R}$ with the Lévy measure ρ. For $\{L_x(t)\}_{x\in Z^d}$ let us introcuce the following Lévy's functional $A^x_{[a,b],m}$ by

$$A^x_{[a,b],m} = \sup_{\gamma\in\Gamma^x_{[a,b],m}} \int_a^b dL_{\gamma(s)}(s) \quad (x \in \boldsymbol{Z}^d, 0 \le a < b),$$

where $\Gamma^x_{[a,b],m}$ denotes the totality of the continuous time d-dimensional simple random walk paths with m jumps during the time interval $[a, b]$.

Assume the following condition.

$$\int_1^\infty e^u \rho(du) < \infty. \tag{1}$$

Then for every $a > 0$ there exists a constant $0 < c_L(a) < \infty$ such that

$$\lim_{t\to\infty} \frac{A^x_{[0,t],[at]}}{t} = c_L(a) \quad \boldsymbol{Q} - a.s.$$

In the Brownian case: $L(t) = B(t)$ it holds that

$$c_B(a) = c_B(1)\sqrt{a} \quad (0 \le a < \infty),$$

which follows from the scaling invariance of the Brownian motion.

Our main concern of this lecture is to investigate an asymptotics of $c_L(a)$ as $a \searrow 0$. Then we obtain the following result.

Theorem 1 In addition to (1) assume further that

$$\int_{R\setminus\{0\}} u^2 \rho(du) < \infty. \tag{2}$$

Then

$$c_L(a) \sim \sigma^2 c_B(1)\sqrt{a} \quad (a \searrow 0). \tag{3}$$

where $\sigma^2 = E_Q(L(1)^2)$.

Therem 1 is applied to the parabolic Anderson model with Lévy noise, which is a heat equation with Lévy noise potential over Z^d:

$$du(t,x) = \kappa\Delta u(t,x)dt + u(t-,x)dY_x(t) \quad (x \in Z^d), \tag{4}$$

where $\kappa > 0$ is a constant, Δ denotes the discrete Laplacian over Z^d and $\{Y_x(t)\}_{x\in Z^d}$ be independent copies of Lévy processes $Y(t)$ starting at 0, defined on a probability space $(\Omega, \mathcal{F}, Q)$ with $E_Q(|Y(t)|) < \infty$ and

$$E_Q(e^{izY(1)}) = \exp\left(-\frac{\alpha^2}{2} + \int_{[-1,\infty)} (e^{izu} - 1 - izu)\widehat{\rho}(du)\right).$$

Then (4) has the unique nonnegative solution satisfying $E_Q(u(t,x)) < \infty$.
Then we obtain

Theorem 2 There exisits a constant $\lambda(k)$ such that for every nonnegative bounded non-zero function $u(0,x)$

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \log u(t,x) = \lambda(\kappa) \quad Q - a.s.$$

Furthermore, applying Theorem 1 we obtain

Theorem 3 Assume further that

$$\int_{(-1,-1/2)\setminus\{0\}} (\log(1+u))^2 \widehat{\rho}(du) < \infty. \tag{5}$$

Then

$$\lambda(\kappa) - \lambda(0) \sim \frac{\sigma^2 c_B(1)^2}{4\log(1/\kappa)} \quad (\text{as} \quad \kappa \searrow 0), \tag{6}$$

where $\lambda(0)$ and σ^2 are explicitely expressed.

References:

R. Carmona, L. Koralov and S. Stanislav: Asymptotics for the almost sure Lyapunov exponent for the solution of the parabolic Anderson problem. Random Oper. Stochastic Equations 9, 77–86, 2001.

M. Cranston, T. Mountford, T. Shiga: Lyapunov exponents for the parabolic Anderson model. (To appear in Acta Math. Univ. Comm.)

M. Cranston, T. Mountford, T. Shiga: Lyapunov exponents for the parabolic Anderson model with Lévy noise. (submitted to PTRF.)

Scaling limit of vicious walks

香取 眞理　　(中央大学理工学部)
種村 秀紀　　(千葉大学理学部)

$(\{\mathbf{S}_j\}_{j\geq 0}, P^{\mathbf{z}})$ を各座標が独立な対称単純ランダムウォークである $\mathbf{z} = (z_1, z_2, \ldots, z_N)$ から出発する N-次元マルコフ連鎖とする. ただし、出発点 $\mathbf{z}$ はつねに

$$\mathbf{Z}^N_< = \{\mathbf{z} = (z_1, z_2, \ldots, z_N) \in 2\mathbf{Z}^N \ ; \ z_{k+1} - z_k \in 2\mathbf{Z}_+, \ k = 1, \ldots, N-1\}, \qquad (1)$$

の要素であり、$\mathbf{Z}_+$ は正の整数全体の集合とする. さて、すべてのウォークが時刻 m までに衝突しない条件：

$$S^1_j < S^2_j < \ldots < S^N_j, \quad j = 1, 2, \ldots, m. \qquad (2)$$

を考え、この事象を Λ_m と書き、$Q^{\mathbf{z}}_m(\cdot) = P^{\mathbf{z}}(\cdot|\Lambda_m)$ とおく. この条件付ランダムウォーク $(\{\mathbf{S}_j\}_{j\geq 0}, Q^{\mathbf{z}}_m)$ は vicious walkers (up to time m) とよばれており、組み合わせ論における Young tableaux の理論、表面成長過程における KPZ 普遍性、ランダム行列理論との関係についてさかんに研究されている. ([2]). この講演では

1. vicous walkers に対する Functional central limit theorem ([4]).
2. 極限拡散過程とランダム行列の関係 ([3]).
3. ウォーク数 N を無限大にしたときの拡散過程の漸近挙動. ([6]).

について説明する.

各ランダムウォークの diffusion scaling limit はブラウン運動であることから、vicious walks の diffusion scaling limit は、非衝突条件をつけられた N-ブラウン粒子系になる. 非衝突条件が有限の時刻 T までの場合、この非衝突ブラウン粒子系 $X(t)$ は 時間非斉次拡散過程になるが、これは Brownian meander とよばれる 1 次元拡散過程の多次元版に対応する. また T を無限大にしたときは、非衝突ブラウン粒子系 $Y(t)$ は Wyle chamber 内の吸収壁ブラウン運動の H 変換にであり、Dyson's Brownian motion と呼ばれている時間斉次拡散過程である. ([1]).

非斉次拡散過程 $X(t)$ における $0 < t << T$ のときと $t = T$ のときの分布は, それぞれ Gaussian unitary ensemble (GUE) と Gaussian orthogonal ensemble (GOE) にある $N \times N$ ランダム行列の固有値の分布で表される. GUE と GOE との間の転移は、Pandey-Mehta [8] の two-matrix model で調べられているが、$X(t)$ はこの GUE から GOE への確率分布の転移を確率過程として実現する.

拡散過程 $X(t)$ の時空間相関関数は、すべて四元数行列の行列式の形でかけることがわかる. さらに、 $N \to \infty$ の極限における四元数要素の漸近形を考えることに

より時空間相関数の収束を調べることができる．非衝突条件を N に依存する時間 T_N まで与えるとする．$T_N - N \to \infty$ の場合、時刻 N での分布はFermion 点過程に収束し、$X(N+\cdot)$ は、Dyson 型の相互作用無限ブラウン粒子系に収束する．([10], [7])．また $T_N = N$ の場合、$X(T_N)$ および $X(T_N - \cdot)$ に対して直交アンサンブルの普遍性を特徴づける相関関数があらわれる．

一方、$T_N - N^{1/3} \to \infty$ の場合、時刻 $N^{1/3}$ での位置 $x_N = N^{2/3}$ から観察した粒子の分布は、Airy 関数で表せる要素をもつ行列に対する determinantal 点過程に収束し、$X(N^{1/3}+\cdot) - x_N$ は Airy process に収束する．([9])．また $T_N = N^{1/3}$ の場合、$X(T_N) - x_N$ および $X(T_N - \cdot) - x_N$ に対してやはり直交アンサンブルの普遍性を特徴づける相関関数があらわれる．

参考文献

[1] Dyson, F. J.: A Brownian-motion model for the eigenvalues of a random matrix, J. Math. Phys. **3**, 1191 (1962)

[2] Fisher, M. E.: Walks, walls, wetting, and melting, J. Stat. Phys. **34** 667-729 (1984)

[3] Katori, M. and Tanemura, H. : Scaling limit of vicious walkers and two-matrix model, Phys. Rev. E **66** (2002) ; cond-mat/0203549

[4] Katori, M. and Tanemura, H. : Functional central limit theorems for vicious walkers, arXiv:math.PR/0203286

[5] Mehta, M. L. : *Random Matrices*, second edition, Academic Press, London 1991

[6] Nagao, T., Katori, M. and Tanemura, H. : Dynamical correlations among vicious random walkers, to appear in Physics Letters A :cond-mat/0202068

[7] Osada, H. : Dirichlet form approach to infinite-dimensional Wiener processes with singular interactions, Commun. Math. Phys. **176**, 117-131 (1996)

[8] Pandey, A. and Mehta, M.L. : Gaussian ensembles of random Hermitian intermediate between orthogonal and unitary ones, Commun. Math. Phys. **87**, 449-468 (1983)

[9] Prähofer. M. and Spohn, H.: Scale invariance of the PNG droplet and the Airy process, preprint : math.PR/0105240

[10] Spohn H.: Interacting Brownian particles: a study of Dyson's model, in *Hydrodynamic Behavior of Interacting Particle Systems*, IMA Volumes in Mathematics and its Applications 9, ed. G. Papanicolaou, (Springer, Berlin, 1987)

ベキ零被覆グラフ上の Berry-Esseen 型定理

石渡 聡　(東北大・理)

本研究の目的はランダム・ウォークの挙動に表れるグラフの幾何学的性質を見出すことである. 本講演では特に, ベキ零被覆グラフ上の対称ランダム・ウォークの時刻無限大での挙動と, グラフのある性質との関連について説明する.

定義　向き付けられた連結かつ局所有限なグラフ $X=(V,E)$ がベキ零被覆グラフであるとは, 有限グラフ X_0 の被覆グラフで被覆変換群 Γ が有限生成ベキ零群のときをいう.

本講演では特に Γ はねじれのないものとする. V は頂点の集合, E は辺の集合とし, $e\in E$ に対し, $o(e), t(e)$ をそれぞれ辺 e の始点, 終点, $\bar{e}$ を e の逆辺という. また $x\in V$ に対し, $E_x=\{e\in E\,|\,o(e)=x\}$ とする.

X 上の対称ランダム・ウォークとは, 重み $m:V\to\mathbb{R}_{>0}$ に対し, $p:E\to\mathbb{R}_{>0}$ で $\sum_{e\in E_x}p(e)=1, m(o(e))p(e)=m(o(\bar{e}))p(\bar{e})$ を満たす関数により定まる運動のことである. $p(e)$ は時刻 1 で粒子が $o(e)$ から $t(e)$ に移動する確率を表している. ここでは特に m,p はΓ 不変であると仮定する. この p を用いると, $x\in V$ にいる粒子が時刻 n で $y\in V$ にいる確率は

$$p_n(x,y)=\sum_{\substack{c=(e_1,e_2,\dots,e_n),\\ o(e_1)=x,t(e_n)=y}}p(e_1)p(e_2)\cdots p(e_n)$$

と表すことができる.

グラフを対応する連続なモデルに埋め込むとき, 時刻 n を無限大にすると同時にグラフのメッシュを縮めていくと推移確率 p_n は連続モデル上の熱核に (弱) 収束させることができるという (関数解析的) 中心極限定理が知られている ([4]). **Berry-Esseen** 型定理とは, p_n の $n\uparrow\infty$ での収束のスピードに関する定理のことである. この定理は Γ に関する Cayley グラフの場合には G. Alexopoulos によって得られている [1]. また, 小谷・砂田によって Γ が abel 群の時に局所中心極限定理が得られている [6].

ベキ零被覆グラフ X の連続モデルとして, 作用 Γ を格子として含むベキ零 Lie 群 G_Γ をとる. G_Γ の Lie 環 $\mathfrak{g}$ はベキ零であるから, $\mathfrak{n}_1=\mathfrak{g}$, $\mathfrak{n}_{i+1}=[\mathfrak{g},\mathfrak{n}_i]$ としたとき, filtration

$$\mathfrak{n}_1\supset\mathfrak{n}_2\supset\cdots\supset\mathfrak{n}_r\neq\{0\}\supset\mathfrak{n}_{r+1}=\{0\}$$

の構造を持っている. このとき, $\mathfrak{n}_k=\mathfrak{g}^{(k)}\oplus\mathfrak{n}_{k+1}$ を満たす $\mathfrak{g}$ の部分空間 $\mathfrak{g}^{(1)},\dots,\mathfrak{g}^{(r)}$ をとる. グラフを G_Γ へ埋め込む写像として, Γ 同変写像 $\Phi:X\to G_\Gamma$ で,

$$\sum_{e\in E_x}p(e)\exp^{-1}\Phi(o(e))^{-1}\Phi(t(e))\big|_{\mathfrak{g}^{(1)}}=0$$

を満たす写像をとる. この Φ は Abel 群 $G_\Gamma/[G_\Gamma,G_\Gamma]$ への準同型との合成 $\pi\circ\Phi:X\to G_\Gamma/[G_\Gamma,G_\Gamma]$ が調和という条件と同値であることから, グラフからリーマン多様体への調和写像の理論によって存在と $\mathfrak{g}^{(1)}$ 方向に関する一意性が成り立つ ([4],[5]). G_Γ 上の **sub-Laplacian** Ω を,

$$\Omega=-\frac{1}{2m(X_0)}\sum_{e\in E_0}m(e)X_e^2$$

と定義する. ここで $X_e=\exp^{-1}\Phi(o(e))^{-1}\Phi(t(e))\big|_{\mathfrak{g}^{(1)}}$ である. h_t を Ω に関する熱核とするとき次を得た.

定理 1 (**Berry-Esseen** 型定理 [3]) 任意の $0<\epsilon<1/2$ に対し, 次を満たす定数 $C_\epsilon>0$ が存在する.

1. X が 2 部グラフでないとき,

$$\sup_{x,y\in V}\left|p_n(x,y)-\frac{|G_\Gamma/\Gamma|}{m(X_0)}h_n(\Phi(x),\Phi(y))\right|\le C_\epsilon n^{-\frac{D+1/2-\epsilon}{2}}.$$

2. X が 2 部グラフであるとき，頂点の分解を $V = A\coprod B$ とすると，

(a) $x,y \in A$ または $x,y \in B$ で，時刻 n が奇数ならば $p_n(x,y)=0$. 時刻 n が偶数のとき，

$$\sup_{x,y\in V}\left|p_n(x,y) - 2\frac{|G_\Gamma/\Gamma|}{m(X_0)}h_n(\Phi(x),\Phi(y))\right| \leq C_\epsilon n^{-\frac{D+1/2-\epsilon}{2}}.$$

(b) $x \in A,\ y \in B$ または $x \in B,\ y \in A$ で，時刻 n が偶数のとき，$p_n(x,y)=0$. 時刻 n が奇数のとき，

$$\sup_{x,y\in V}\left|p_n(x,y) - 2\frac{|G_\Gamma/\Gamma|}{m(X_0)}h_n(\Phi(x),\Phi(y))\right| \leq C_\epsilon n^{-\frac{D+1/2-\epsilon}{2}}.$$

ここで D は群 Γ の増大度である．

この定理が収束のスピードに関する best possibility を与えているかはわかっていない．また，次の条件が成り立てば収束のスピードが $n^{-\frac{D+1}{2}}$ で評価できることがわかった．

(1) 各頂点から出ている辺をベクトルと見た時，$\mathfrak{g}^{(2)}$ 方向の力がつりあっている．即ち，

$$\sum_{e\in E_x} p(e)\exp^{-1}\Phi(o(e))^{-1}\Phi(t(e))\big|_{\mathfrak{g}^{(2)}} = 0 \quad (x \in V).$$

(2) G_Γ 上の 2 階の微分作用素

$$\sum_{e\in E_x} p(e)X_e^2$$

は $x \in V$ によらない．

この条件を満たすグラフとしては，Γ に関する Cayley グラフ，三角格子，六角格子などがある．しかしこの条件を満たさないグラフも存在する．例えば，かごめ格子は (2) を満たさない．

定理 1 の証明に 推移作用素の核関数 $k_n(x,y) = p_n(x,y)m(y)^{-1}$ とその gradient の Gaussian bound を使った．

定理 2 ([3], [7] cf. [2]) *X は 2 部グラフでないとする．k_n の gradient を*

$$\nabla^y k_n(x,y) = \sup_{d_X(y,z)=1}|k_n(x,z) - k_n(x,y)|$$

と定める．このとき次を満たす定数 $C, c' > 0$ が存在する．

$$\begin{aligned} k_n(x,y) &\leq Cn^{-\frac{D}{2}}\exp(-\frac{d_X(x,y)^2}{c'n}), \\ \nabla^y k_n(x,y) &\leq Cn^{-\frac{D+1}{2}}\exp(-\frac{d_X(x,y)^2}{c'n}). \end{aligned}$$

参考文献

[1] G. Alexopoulos, *Convolution powers on discrete groups of polynomial volume growth*, Canad. Math. Soc. Conf. Proc. **21** (1997), 31-57.

[2] W. Hebisch and L. Saloff-Coste, *Gaussian estimates for Markov chains and random walks on groups*, Ann. Probab. **21** (1993), no. 2, 673-709.

[3] S. Ishiwata, *A Berry-Esseen type theorem on a nilpotent covering graph*, preprint.

[4] S. Ishiwata, *A central limit theorem on a covering graph with a transformation group of polynomial growth*, to appear in J. Math. Soc. Japan.

[5] M. Kotani and T. Sunada, *Standard realizations of crystal lattices via harmonic maps*, Trans. Amer. Math. Soc. **353** (2001), no. 1, 1–20.

[6] M. Kotani and T. Sunada, *Albanese maps and off diagonal long time asymptotics for the heat kernel*, Comm. Math. Phys. **209** (2000), 633-670.

[7] C. Pittet, L. Saloff-Coste, *On the stability of the behavior of random walks on groups*, J. Geom. Anal. **10** (2000), no. 4, 713–737.

ランダム停止時間を持つ繰り返し囚人のジレンマ・ゲームのナッシュ均衡について

河野 敬雄 (京都大学総合人間学部)

1 Introduction

1950年ランド研究所におけるある種の心理実験の研究から生れた，いわゆる「囚人のジレンマ・ゲーム」は合理的に判断する人間にとっては他人と協力するよりは裏切るべきである，という結論が導かれたことによって，多くの研究者の注目を集めた。
囚人のジレンマが生れた経緯や逸話に関しては

ウィリアム・パウンドストーン (1992) :「囚人のジレンマ」松浦俊輔他訳 (1995)，青土社

に詳しい。ゲーム理論，と言っても1944年に発表された，フォン・ノイマンーモルゲンシュテルンの「ゲームの理論と経済行動」がすべての始まりである，というわけではない。実際，ゲーム理論誕生から50年目の1994年度ノーベル経済学賞を受賞したのはフォン・ノイマンーモルゲンシュテルンの直系とは言い難い非協力ゲーム理論を発展させたナッシュ達3名であった。

「囚人のジレンマ」とは，最も簡単な2人対称ゲームであって，利得行列は次のように表される。

	C	D
C	R	S
D	T	P

囚人のジレンマ，という場合は $T > R > P > S$ と $2R > T + S$ を仮定する。($2R > T + S$ は仮定しない場合もある）この2人対称ゲーム（利得がマトリックスで与えられるからマトリックスゲームともいう）の意味は，プレーヤーIが戦略 C(ooperate) を，プレーヤーIIが同じく戦略Cを選択した場合のプレーヤーIの（同じ戦略だからプレーヤーIIも同じ）利得が $u(C, C) = R$，プレーヤーIが戦略C，プレーヤーIIが戦略 D(efect) を選択した場合のプレーヤーIの利得が $u(C, D) = S$，(この時，プレーヤーIIの利得は対称だから $u(D, C) = T$)，... であることを示している。
さて，仮定より $T > R, P > S$ だから，2人とも合理的なプレーヤーで，かつお互いに相手も合理的である，ということを知っているならば，まったく当然に2人とも戦略Dを選択するはずあり，結果として2人とも利得Pを得る。ところが，もしお互いに相手を信頼して戦略Cを選択したならば，利得は2人ともRであって，仮定から $R > P$ であり，何故，Cを選択し

ないのか，と疑問に思うかも知れない。しかし，相手がCを選択するならば，自分はDを選択すれば利得 $T(>R)$ が得られるはずであるから，合理的プレーヤーはDを選択するだろう，ということである。もし，相手がDを選択した場合に自分の方がCを選択した場合，自分の利得はSであって最悪である。かくて，お互いにDを選択する以外にない，というわけである。裏切りは悪であって，普通の人間はそのような行動は取らない，と結論づけることはたやすい。しかし，人間社会に如何して道徳が定着したのか，という根源的な問いにまで突き詰めると，ことは容易ではない。社会学の分野では17世紀に「リヴァイアサン」を書いて人間の本性を冷静に分析したHobbesに因んでホッブス問題とか秩序問題，社会的ジレンマと呼ばれている。ジレンマ，という理由は人間社会には利己的合理主義だけでは理解できない協力行動はいくらでも観察されるからである。むしろ，人間は本来協力行動をとるものである，という論者には秩序問題は存在しない。その場合，非協力行動をとる人間の方をむしろ例外的人間とみることになる。例えば，輸入牛肉を国産肉と称して高価に売りつける人間は必ず存在する。それを当然と考えるか，あってはならない，と考えるかで見解は分かれる。

その意味では，本稿におけるゲーム理論的立場は，検証する手段がなければ，輸入肉を国産肉と偽る行為はむしろ合理的判断である，という立場をとっていることになる。

2 Repeated Prisoner's Dilemma

上記のように1回きりの囚人のジレンマ・ゲームでは裏切り（D）を選択するのが合理的であっても，同じ状況のゲームは繰り返し行われている，と見るのが現実的である。当然，最初に裏切ると将来的に相手に協力を期待することは出来ない。しかし，逆に相手が裏切るまでは協力の姿勢を見せることは無意味ではないであろう。ただし，その場合，将来にわたる利得を次のように計算することにする。たとえば、両者とも絶えずC（協力）を選択した場合、の利得を $0<\delta<1$ に対して

$$R+R\delta+R\delta^2\cdots \doteqdot \frac{R}{1-\delta}\ \dots (1)$$

とする。一方、最初はCを選択するが相手が本当は絶えずD（裏切り）を出すつもりの場合（All-D戦略という）相手がDを出した以後はずっとDを出し続ける決心をしていた（トリガー戦略という）場合、プレーヤーIの各回の手 (move) は $C, D, D, \ldots$ であり，プレーヤーIIの手は $D, DD \ldots$ となるから，プレーヤーIIの利得は、

$$T+P\delta+P\delta^2\cdots = T+\frac{P\delta}{1-\delta}\ \dots (2)$$

と考える。(1) と (2) の大小を比べると

$$\frac{R}{1-\delta} > T+\frac{P\delta}{1-\delta} \Longleftrightarrow 1>\delta>\frac{T-R}{T-P} \qquad (*)$$

となって、協力し合っている時に、裏切ることが必ずしも得にならないことがわかる。

では、この δ は何を意味しているのであろうか。標準的ゲーム理論の教科書には次のような2通りの解釈が行われている。

(1) 割引因子 (discount facter)：1期先の将来的予想利得は現在の価値より δ だけ割り引かれる、という考え方。この考え方はゲームをあくまで現在のみに限定して考えて、繰り返しゲーム

はあくまで仮想の主観的概念操作である、とする。ゲーム理論の教科書ではこの解釈を取る場合が多いように思われる。

(2) 次回のゲームが行われる確率が δ である、という考え方。たとえば、表が出る確率が δ の硬貨を投げて、表が出たら次回のゲームを続ける、と想定する。この場合は、もし今裏切ると将来相手も裏切るであろうからその場合、ゲームが続く可能性が高い場合は協力を続ける方が得(合理的) である、というわけである。現実に例えば観光地のみやげ物が粗悪品であったり、逆に商売では長期の信用を大事にする、という現象をよく説明しているように思われる。

この講演では (2) の立場に立ちつつ、現実にゲームを繰り返し、あるランダムな時間にゲームを止める、という定式化を行う。このように定式化すると，δ^{n-1} は停止時間 ζ の分布が幾何分布をしていることである，と理解できる。従って，一般の停止時間に対して，その分布と条件 $(*)$ の関係が明らかにできる。

Theorem 1. We assume that the stopping time ζ is independent of any strategies of both players with the finite expectation (i.e. $E[\zeta] < +\infty$) and set $Prob(\zeta = n) = \zeta_n$. If

$$\forall n, \ (R-P)\sum_{k=1}^{+\infty} k\,\zeta_{k+n} \geq (T-R)\sum_{k=n}^{+\infty}\zeta_k$$

holds, then "Trigger" is a Nash equilibrium. Conversely, if the above condition does not hold at some n, then "Trigger" is not a Nash equilibrium.("all-D" is trivially a Nash equilibrium.)

Corollary. If $\exists\, n_0 = \min\{n\,;\,\zeta_n > 0\} < +\infty$, (i.e. a finite game) then "Trigger" is not a Nash equilibrium. In fact, in Theorem 1, $\sum_{k=1}^{+\infty} k\,\zeta_{k+n_0} = 0$ but $\sum_{k=n_0}^{+\infty}\zeta_k = \zeta_{n_0} > 0$.

Example. If ζ has geometric distribution $G(\delta)$, i.e. $\zeta_n = (1-\delta)\delta^{n-1}$, then we have $\sum_{k=1}^{+\infty} k\,\zeta_{k+n} = \delta^n/(1-\delta)$ and $\sum_{k=n}^{+\infty}\zeta_k = \delta^{n-1}$. So the above inequality turns out $\delta \geq (T-R)/(T-P)$ which is the well known inequality.

以上

ユークリッド空間上の拡散過程における大偏差原理の精密評価

梁　松　（名古屋大学多元数理科学研究科）

次の方程式で与えられる$\mathbf{R}^d$ 上の拡散過程 $\{X_t\}_{t\geq 0}$ を考える。

$$dX_t^i = \sum_{j=1}^{d} \sigma_{ij}(X_t)dB_t^j + b_i(X_t)dt, \quad X_0^i = x_i, \qquad i = 1, \cdots, d, \tag{1}$$

ただし、$(B_t^1, \cdots, B_t^d)$ は d-次元ブラウン運動であり、$x = (x_1, \cdots, x_d) \in \mathbf{R}^d$ は初期条件である。$\sigma_{ij}, b_i, i, j = 1, \cdots, d$ は $\mathbf{R}^d$ 上の滑らかな関数で、次の条件を満たす。

A1. $a_{ij} = \sum_{k=1}^{d} \sigma_{ik}\sigma_{jk}$ のように定義された行列 $(a_{ij}(x))_{i,j=1}^{d}$ は一様楕円型である。

A2. 定数 $C_0, C_1, C_2, C_3 > 0, \gamma_1 > 1, \gamma_2 \in [\gamma_1, \gamma_1 + \frac{1}{2}(\gamma_1 - 1))$ が存在し、任意の $x, \xi \in \mathbf{R}^d$ に対して、

$$\sum_{i,j=1}^{d} \xi_i \xi_j \nabla_i b_j(x) \leq C_0 \sum_{i=1}^{d} \xi_i^2,$$

$$x \cdot b(x) \leq C_1 - C_2|x|^{\gamma_1+1}, \tag{2}$$

$|b(x)| \leq C_3(1+|x|^{\gamma_2}), |\nabla b(x)| \leq C_3(1+|x|^{\gamma_2})$. ただし、$b(x) = (b_1(x), \cdots, b_d(x))$.

これによって定められる $C([0,\infty), \mathbf{R}^d)$ 上の確率測度の族を $\{P_x\}_{x\in\mathbf{R}^d}$ と書き、対応する半群を $\{P_t\}_{t\geq 0}$ と書く。$L_t = \frac{1}{t}\int_0^t \delta_{X_s} ds$ と置く、ただし、$\delta.$ はデルタ測度を表す。また、Φ を $\mathbf{R}^d$ 上の符号付測度全体 $\mathcal{M}(\mathbf{R}^d)$ 上の有界関数で、$\Phi\Big|_{\wp(\mathbf{R}^d)}$ は Prohorov 距離に関して連続であるとする。ただし、$\wp(\mathbf{R}^d)$ は $\mathbf{R}^d$ 上の確率測度の全体である。任意の $x, y \in \mathbf{R}^d$ に対して、

$$Z_T^{x,y} \equiv \left[\exp\left(T\Phi(\frac{1}{T}\int_0^T \delta_{X_t} dt)\right)\Big|X_T = y\right]$$

の $T \to \infty$ のときの漸近挙動を知りたい。

大偏差原理により、$T \to \infty$のとき、$\frac{1}{T}Z_T^{x,y} \to \sup\{\Phi(\nu) - I(\nu); \nu \in \wp(\mathbf{R}^d)\} \equiv \lambda$ となることが分かる。ただし、I はエントロピー関数である。この講演では、さらに精密に $Z_T^{x,y}$ の $T \to \infty$ の $o(1)$ オーダーの評価を調べる。

次の条件を仮定する。(精密な数学表示は講演で与える)。

A3. $\Phi - I$ は $\wp(\mathbf{R}^d)$ で唯一の元 ν_0 で最大値を attain する。

A4. $\Phi : \mathcal{M}(\mathbf{R}^d) \to \mathbf{R}$ は3回連続 Fréchet 微分可能で、3回までの Fréchet 微分は連続関数 $\Phi^{(i)}(\nu; x_1, \cdots, x_i)$, $i = 1, 2, 3$, に関する積分で表せる。

A5. 逆時間に対応する半群 $\{P_t^*\}_{t\geq 0}$ は次の条件を満たす半群 $\{R_t\}_{t\geq 0}$ と $c \in C^\infty(\mathbf{R}^d)$ を用いてある測度変換によって表すことができる。$\{R_t\}_{t\geq 0}$ は A2 をみたす、また、ある定数 $a_0 \in [0, \frac{\gamma_1 - 1}{2} - (\gamma_2 - \gamma_1))$ が存在し、$(1+|x|^2)^{-a_0} c \in C_b(\mathbf{R}^d)$.

A6. $I - D^2\Phi(\nu_0)$ は非退化である。

A7. 任意の $\delta > 0$ に対して、ある連続関数に関する積分で表される $\wp(\mathbf{R}^d) \times \wp(\mathbf{R}^d)$ 上の関数で、Hilbert-Schmidt ノルムが δ 以下であるような $\widetilde{K_\delta}$ が存在し、Φ の ν_0 の十分小さい近傍での3回 Fréchet 微分は $\widetilde{K_\delta}$ で押さえられる。

定理 1 以上の条件 *A1* $\sim$ *A7* の下で、任意の $x, y \in \mathbf{R}^d$ に対して、

$$\lim_{T\to\infty} e^{-T\lambda} Z_T^{x,y} = \frac{h(x)}{h(y)} \cdot \exp\left\{\frac{1}{2}\int (\overline{G} \otimes I)\Phi^{(2)}(\nu_0; \cdot, \cdot)\Big|_{(u,u)} \nu_0(du)\right\}$$
$$\times det_2(I_H - D^2\Phi(\nu_0))^{-1/2}.$$

ただし、$\overline{G}$ は $\{P_t\}_{t\geq 0}$ と Φ によって定義され、ν_0 を不変確率測度として持つ半群 $\{Q_t\}_{t\geq 0}$ に対応するグリーン作用素の対称化であり、H はそれによって定義される ($\mathcal{M}_0(\mathbf{R}^d)$ ($\mathbf{R}^d$ 上の全測度が 0 であるような符号付き測度の全体)の稠密な部分空間と見なせる) *Hilbert* 空間である。(直観的には、H のノルムは I の ν_0 での2回 *Fréchet* 微分を表している)。

上記の条件を満たす例を講演時に与える。証明は以下の2つのキー結果を使う。

補題 2 任意の $\beta > 0$ に対して、定数 C_β が存在し、任意の $f \in C_b(\mathbf{R}^d)$ と任意の $x \in \mathbf{R}^d$ に対して、

$$|\nabla G f(x)| \leq C_\beta (1 + |x|^2)^{\frac{\gamma_2 - \gamma_1 + 1 + \beta}{2}} ||f||_\infty,$$
$$|\nabla G^* f(x)| \leq C_\beta (1 + |x|^2)^{\frac{\gamma_2 - \gamma_1 + 1 + \beta + a_0}{2}} ||f||_\infty.$$

ただし、G^* は G の $L^2(d\nu_0)$ での対偶作用素を表す。

補題 3 半群 $\{R_t\}_{t\geq 0}$ の生成作用素が条件 *A1* と *A2* を満たすとする。このとき、任意の $\beta < \gamma_1 + 1$、任意の $T > 0$ と任意の $C > 0$ に対して、

$$\sup_{x\in\mathbf{R}^d, t\geq T} E^{R_x}\left[\exp\left(C|X_t|^\beta\right)\right] < \infty.$$

Phase Transitions associated with exponential Brownian functionals [1]

Yuu Hariya (RIMS, Kyoto)

Let $B = \{B_t, t \geq 0\}$ be a 1-dimensional Brownian motion starting from 0. We assume the Brownian motion B is defined on a suitable probability space with P as a probability measure. For $\mu \in \mathbb{R}$, let $B^{(\mu)} = \{B_t^{(\mu)} \equiv B_t + \mu t, t \geq 0\}$. We consider the exponential Brownian functional

$$A_t^{(\mu)} \equiv A_t(B^{(\mu)}) = \int_0^t \exp(2B_s^{(\mu)})\, ds, \quad t \geq 0,$$

which plays an important role in many fields such as mathematical finance, diffusion processes in random environments, stochastic analysis on hyperbolic spaces, and so on. Recently in [2], Matsumoto and Yor have obtained the following generalization of an identity relating $A^{(-\mu)}$ and $A^{(\mu)}$, originally due to Dufresne:

Theorem 1 ([2], Theorem 1.1). *Let $\mu < \nu$ and set $\delta = (\nu - \mu)/2$ and $m = (\mu + \nu)/2$. Then, for every $t > 0$ and for every non-negative functional F on $C((0,t];\mathbb{R})$, one has*

$$e^{\mu^2 t/2} E[F(\frac{1}{A_s^{(\mu)}}, 0 < s \leq t)(\frac{1}{A_t^{(\mu)}})^m] = e^{\nu^2 t/2} E[F(\frac{1}{A_s^{(\nu)}} + 2\gamma_\delta, 0 < s \leq t)(\frac{1}{A_t^{(\nu)}})^m], \quad (1)$$

where γ_δ is a gamma variable of index δ independent of $B^{(\nu)}$.

Let $\mathcal{C} = C([0,\infty);\mathbb{R})$. We denote by P^μ the law on $\mathcal{C}$ of $B^{(\mu)}$: $P^\mu = P \circ (B^{(\mu)})^{-1}$. The motivation of this talk is to obtain a better understanding of the role of the powers of the exponential functional A, which appear as Radon-Nikodym densities on both sides of (1). As one step towards this goal, for fixed $\mu, m \in \mathbb{R}$, we introduce the family $\{\mathcal{P}_T^{(\mu,m)}\}_{T>0}$ of probability measures on $\mathcal{C}$ defined by

$$d\mathcal{P}_T^{(\mu,m)}(X) = (\Delta_T^{(\mu,m)})^{-1} \left(\frac{1}{A_T(X)}\right)^m dP^\mu(X)$$

(where $\Delta_T^{(\mu,m)}$ denotes the normalization), and discuss the existence of a limit measure as $T \to \infty$ and a characterization of this limit measure. To state the main result, we introduce the path transformation $\mathbb{T}_z : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ indexed by $z > 0$:

$$\mathbb{T}_z(X)(t) = X_t - \log\{1 + zA_t(X)\}, \quad t \geq 0.$$

Theorem 2. *$\mathcal{P}_T^{(\mu,m)}$ converges weakly to the law of the process $Y = \{Y_t, t \geq 0\}$ given as follows:*
(i) *if $\mu \geq 0$ and $2m > \mu$,*

$$Y = \mathbb{T}_{2\gamma_{m-\frac{\mu}{2}}}(B^{(0)});$$

[1] This talk is based on the joint work [1] with Marc Yor (Paris VI).

(ii) *if* $m \leq \mu$ *and* $2m \leq \mu$,

$$Y = B^{(\mu-2m)};$$

(iii) *if* $\mu < 0$ *and* $m > \mu$,

$$Y = \mathbb{T}_{2\gamma_{m-\mu}}(B^{(-\mu)}).$$

In both (i) *and* (iii), *the gamma variables are independent of* $B^{(0)}$ *and* $B^{(-\mu)}$, *respectively.*

This result shows some phase transitions under the limit measures $\mathcal{P}_{\infty}^{(\mu,m)}$, $\mu, m \in \mathbb{R}$, which are closely related to the difference in the asymptotic behaviors of $\Delta_T^{(\mu,m)}$ as $T \to \infty$ according to a partition of the (μ, m)-plane.

Proposition 1. *The normalization* $\Delta_t^{(\mu,m)}$ *has the asymptotics* $\lim_{t\to\infty} \Delta_t^{(\mu,m)}/f(t) = 1$, *where the function* $f \equiv f^{(\mu,m)}$ *is given as follows:*
(i) *if* $2m > \mu$ *and* $\mu > 0$,

$$f(t) = 2^{m-5/2}\pi^{-1/2}\Gamma(m)\{B(\frac{\mu}{2}, m - \frac{\mu}{2})\}^2 \times t^{-3/2}e^{-\mu^2 t/2};$$

(ii) *if* $2m = \mu$ *and* $\mu > 0$,

$$f(t) = 2^{m-1/2}\pi^{-1/2}\Gamma(m) \times t^{-1/2}e^{-\mu^2 t/2};$$

(iii) *if* $m < \mu$ *and* $2m < \mu$,

$$f(t) = \frac{2^m\Gamma(\mu - m)}{\Gamma(\mu - 2m)}e^{-2m(\mu-m)t};$$

(iv) *if* $m = \mu$ *and* $\mu < 0$,

$$f(t) = \frac{2^{\mu+1}(|\mu|)}{\Gamma(|\mu|)}t;$$

(v) *if* $m > \mu$ *and* $\mu < 0$,

$$f(t) \equiv \frac{2^m\Gamma(m - \mu)}{\Gamma(|\mu|)};$$

(vi) *if* $m > 0$ *and* $\mu = 0$,

$$f(t) = 2^{m-1/2}\pi^{-1/2}\Gamma(m)t^{-1/2}.$$

References

[1] Y. Hariya, M. Yor, Limiting distributions associated with moments of exponential Brownian functionals, preprint

[2] H. Matsumoto, M. Yor, On Dufresne's relation between the probability laws of exponential functionals of Brownian motions with different drifts, to appear in Adv. Appl. Probab.

Phase transition of percolation on Sierpinski carpet lattices

篠田 正人 (奈良女子大学理学部)

$\mathbf{Z}^2$ の部分グラフとしての一般化された Sierpinski carpet 格子を考える. $L \geq 2$, $T \subset \{0,1,\dots,L-1\}^2$ とする. ただし $(0,0) \in T$ を仮定する. グラフ $G_T = (V_T, E_T)$ を以下のように構成する.

$$V_T^0 = \mathbf{Z}^2 \cap \{(x,y) \mid 0 \leq x,y \leq 1\}, \quad V_T^{n+1} = \bigcup_{(i,j)\in T} \left(V_T^n + (iL^n, jL^n)\right) \quad (n \geq 0),$$

$$V_T = \bigcup_{n=0}^{\infty} V_T^n, \quad E_T = \{\langle u,v\rangle \mid u,v \in V_T, \|u-v\|_1 = 1\}.$$

$L=3$, $T = \{(i,j)|0 \leq i,j \leq 2, (i,j) \neq (1,1)\}$ のときの G_T が最も知られた Sierpinski carpet 格子である (図 1). また $L=2$, $T = \{(i,j)|0 \leq i,j \leq 1, (i,j) \neq (1,1)\}$ のときは Sierpinski gasket 格子に対応する.

G_T における percolation および oriented percolation を考える. E_T に含まれる各辺がそれぞれ独立に確率 p で open, 確率 $1-p$ で closed であるものとする. 原点から open な辺のみを通って到達できる点が無限個あるという確率を $\theta(p)$ で表す. また open な辺を x, y の正方向 (右向きまたは上向き) にしか通れない, という条件の下で到達できる点が無限個ある確率を $\vec{\theta}(p)$ とする. このとき臨界確率 $p_c(G_T)$, $\vec{p_c}(G_T)$ を

$$p_c(G_T) = \inf\{p \mid \theta(p) > 0\}, \quad \vec{p_c}(G_T) = \inf\{p \mid \vec{\theta}(p) > 0\}$$

で定める. $p = p_c(G_T)$ および $p = \vec{p_c}(G_T)$ で相転移が起こる, と考えられる. この相転移が自明なものでないかどうか, すなわち $p_c(G_T)$ および $\vec{p_c}(G_T)$ が 1 より真に小さいかどうかを調べる.

$p_c(G_T)$ については以下のことが知られていた.

Theorem 1 ([K]) $\{(i,j) \mid i \in \{0, L-1\} \text{ or } j \in \{0, L-1\}\} \subset T$ ならば $p_c(G_T) < 1$.

この結果を以下のように拡張した.

Theorem 2 ([S1]) $T_l = \{j|(0,j) \in T\}$, $T_r = \{j|(L-1,j) \in T\}$, $T_d = \{i|(i,0) \in T\}$, $T_u = \{i|(i,L-1) \in T\}$ とする. (i) 任意の $t \in T$ に対し $T \setminus \{t\}$ は連結, (ii) $|T_l \cap T_r| \geq 2$ かつ $|T_d \cap T_u| \geq 2$, の両方が満たされていれば $p_c(G_T) < 1$ である.

また, 自明でない相転移が存在するための必要条件として次の結果が得られた.

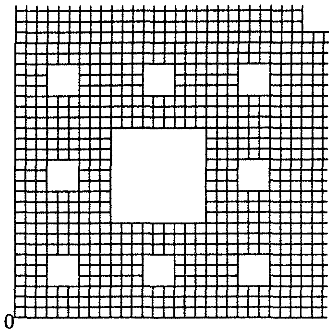


図 1: the Sierpinski carpet lattice

Theorem 3 ([S1]) ある i_0 に対し $\left|\{j \mid (i_0, j) \in T\}\right| \leq 1$ ならば $p_c(G_T) = 1$.

oriented percolation の場合については, 以下の結果が得られた.

Theorem 4 ([S2]) $L = 2a + b$, $T_{a,b} = \{0, 1, \ldots, L-1\}^2 \setminus \{(i,j) \mid a \leq i, j \leq a + b - 1\}$ とする. このとき $1 \leq a \leq b$ ならば $\vec{p_c}(G_{T_{a,b}}) = 1$.

これらの結果により, 例えば図 1 の格子においては $p_c(G_T) < 1$ であるものの $\vec{p_c}(G_T) = 1$ である. この結果は $p_c(\mathbf{Z}) = \vec{p_c}(\mathbf{Z}) = 1$ やよく知られている $p_c(\mathbf{Z}^2) < \vec{p_c}(\mathbf{Z}^2) < 1$ (例えば [G] 参照) と比べて明確な違いが生じている.

同様に高次元 Sierpinski carpet 格子で $\vec{p_c}(G) = 1$ となるものがあることも講演内で報告する. $\vec{p_c}(G_T) < 1$ かつ $T \neq \{0, 1, \ldots, L-1\}^2$ であるような T があるかどうかは今のところわかっていない.

参考文献

[G] Grimmett,G. (1999) *Percolation* (2nd ed.), Springer.

[K] Kumagai,T. (1997) Percolation on Pre-Sierpinski carpets, *New Trend in Stochastic Analysis* (Proceedings of a Taniguchi International Workshop, Eds. K.D.Elworthy et al.), World Scientific, 288-304.

[S1] Shinoda,M. (2002) Existence of phase transition of percolation on Sierpinski carpet lattices, *Journal of Applied Probability* **39**,1-10.

[S2] Shinoda,M. Non-existence of phase transition of oriented percolation on Sierpinski carpet lattices, *Probability Theory and Related Fields*, to appear.

シュレディンガー作用素の臨界性とスペクトル関数の微分可能性

東北大学大学院理学研究科数学専攻 土田兼治

ブラウン運動の加藤クラスと呼ばれる測度に Revuz 対応する加法的汎関数の大偏差原理の証明に動機付けられ，スペクトル関数の微分可能性を考えた．以下，$d \geq 3$ の場合を考える．

定義 1 μ を $\mathbb{R}^d$ 上の正のラドン測度とするとき，
(I) μ が加藤クラス $(\mathcal{K}_d)$ に属するとは，

$$\lim_{a\to 0} \sup_{x\in\mathbb{R}^d} \int_{|x-y|\leq a} G(x,y)\mu(dy) = 0$$

が成り立つときをいう．ここで $G(x,y)$ はブラウン運動のグリーン関数とする．
(II) μ が $\mathcal{K}_d^\infty$ に属するとは，$\mu \in \mathcal{K}_d$ であり，かつ

$$\lim_{R\to\infty} \sup_{x\in\mathbb{R}^d} \int_{|y|>R} G(x,y)\mu(dy) = 0$$

が成り立つときをいう．

$\mu \in \mathcal{K}_d^\infty$ に対して，シュレディンガー作用素

$$\mathcal{H}^{\lambda\mu} = -\frac{1}{2}\Delta - \lambda\mu, \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

を考え，$\mathcal{H}^{\lambda\mu}$ に関するスペクトル関数 $C(\lambda)$ を以下のように定義する:

$$\begin{aligned} C(\lambda) &:= -\inf\left\{\theta : \theta \in \sigma(\mathcal{L}^{\lambda\mu})\right\} \\ &= -\inf\left\{\frac{1}{2}\mathbf{D}(u,u) - \lambda\int_{\mathbb{R}^d} \tilde{u}^2 d\mu : u \in H^1(\mathbb{R}^d),\ \int_{\mathbb{R}^d} u^2 dx = 1\right\} \end{aligned}$$

ここで，$\sigma(\mathcal{L}^{\lambda\mu})$ は $\mathcal{L}^{\lambda\mu}$ のスペクトルの集合，$\mathbf{D}$ はディリクレ積分，$H^1(\mathbb{R}^d)$ は 1 位のソボレフ空間，そして $\tilde{u}$ は u の準連続修正とする．
このとき，次の定理を得た．

定理 1 ([TT]) $d \leq 4$，$\mu \in \mathcal{K}_d^\infty$ のとき，$C(\lambda)$ は任意の $\lambda \in \mathbb{R}$ に対して微分可能である．

上の定理は$d=1,2$に対しては，既に[T]において示されている．我々はこれを$d=3,4$の場合に拡張するわけであるが，そのために$d=1,2$の場合における証明の概略を述べておく：$\mu \in \mathcal{K}_d^\infty$のとき，$\lambda^+ = \inf\{\lambda > 0 : C(\lambda) > 0\}$と定義すると，$d=1,2$のとき$\lambda^+=0$，$d \geq 3$のとき$\lambda^+ > 0$であることが示され，$\lambda \leq \lambda^+$のとき$C(\lambda)=0$，$\lambda > \lambda^+$のとき$-C(\lambda)$は$\mathcal{H}^{\lambda\mu}$の離散スペクトルであることが示される．よって，$\lambda > \lambda^+$における$C(\lambda)$の微分可能性は解析的摂動論を用いて示されるので，定理の証明は$\lambda = \lambda^+$における$C(\lambda)$の右微分が0であることを示すことに帰着される．ここまでは，$d \geq 3$の場合でも同様である．
$d=1,2$のときは，ブラウン運動がHarrisの意味で零再帰的な対称マルコフ過程であるという事実から示される．実際，Harris再帰性をもつ対称マルコフ過程から生成されるディリクレ形式に対して成り立つ大島によって示された不等式[O]と$\mathbb{R}^d$ $(d=1,2)$上のブラウン運動の不変測度(ルベーグ測度)の全測度が無限大になることを用いて示される．
さて，$d=3,4$の場合に拡張するために，まず$\mathcal{H}^\mu$の臨界性の定義を与えておく．

定義 2
(I) $\mathcal{H}^\mu$が劣臨界的であるとは，$\mathcal{H}^\mu$に関するグリーン関数が存在するときにいう．
(II) $\mathcal{H}^\mu$が臨界的であるとは，$\mathcal{H}^\mu$に関するグリーン関数は存在しないが，$\mathcal{H}^\mu h = 0$となる正の連続関数hが存在するときにいう．
(III) $\mathcal{H}^\mu$が劣臨界的でも臨界的でもないとき，優臨界的であるという．

我々は，$\mathcal{H}^{\lambda^+\mu}$が臨界的であることを示した．よって$\mathcal{H}^{\lambda^+\mu}h = 0$となる$h > 0 \in C(\mathbb{R}^d)$が存在するので，この$h$を用いて$\mathcal{H}^{\lambda^+\mu}$のDoobの意味の$h$-変換を考える．$h$-変換した作用素を$\mathcal{H}^{\lambda^+\mu,h}$と書くと，これはマルコフ的になり，$\mathcal{H}^{\lambda^+\mu,h}$を生成作用素にもつ$h^2dx$-対称マルコフ過程$\mathbf{M}$が存在する．また，$\mathcal{H}^{\lambda^+\mu}$がグリーン関数をもたないとき，$\mathcal{H}^{\lambda^+\mu,h}$もグリーン関数をもたないことがわかるので，$\mathbf{M}$は再帰的となり，さらに$h$の連続性を用いてHarrisの意味での再帰性も示すことができる．したがって，[O]の不等式を臨界的なシュレディンガー作用素に拡張することができる．$\mathbf{M}$の不変測度はh^2dxであることに注目して，$h \notin L^2$となるとき，$\mathcal{H}^{\lambda^+\mu}$を零臨界的であると呼ぶことにする．$d=3,4$の場合，$\mathbf{M}$は零再帰的となり，[T]の議論を使って$C(\lambda)$の微分可能性を示すことができる．

参考文献

[O] Oshima, Y.: Potential of recurrent symmetric Markov processes and its associated Dirichlet spaces, in Funtional Analysis in Markov Processes, ed. M. Fukushima, Lecture Notes in Math. **923**, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, (1982).

[T] Takeda, M.: Large deviation principle for additive functionals of Brownian motion corresponding to Kato measures, To appear in Potential Analysis, (2000).

[TT] Takeda, M., Tsuchida, K.: Criticality of generalized Schrödinger operators and differentiability of spectral functions, preprint, (2002).

多次元 Brown 運動に対する田中の公式[1]

植村 英明　　（愛知教育大学）

1. はじめに： $L(t,x)$ を多次元 Brown 運動の局所時間とする。

$$L(t,x)=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_0^t p_N(\varepsilon,B_s-x)ds \quad \text{in} \quad \boldsymbol{D}_2^\alpha.$$

ここで $B_s=(B_s^1,\dots,B_s^N)$ は $B_0=0$ の N 次元 Brown 運動，$p_N(t,x)$ は N 次元の Gauss 核を表し， $x\neq 0,\alpha<1-N/2$ とする。($\boldsymbol{D}_2^\alpha$ の定義は後程。cf. Imkeller & Weisz[2]) 本講では，Tanaka の公式が多次元 Brown 運動に対しても成立することを報告する。併せてこの公式が $\boldsymbol{D}_2^\alpha$ での Doob-Meyer 分解を与えることも報告する。

2. Meyer-Watanabe 空間，Skorohod 積分： $I_{\boldsymbol{n}}(f_{\boldsymbol{n}})$ を $f_{\boldsymbol{n}}(s_1^{(1)},\dots,s_{n_1}^{(1)};\cdots;s_1^{(N)},\dots,s_{n_N}^{(N)})\in L^2(d\boldsymbol{s})$ $(\boldsymbol{n}=(n_1,\dots,n_N)\in\mathbb{Z}_+^N, n=|\boldsymbol{n}|=n_1+n_2+\cdots+n_N, \boldsymbol{s}=(s_1^{(1)},\dots,s_{n_1}^{(1)},\dots,s_1^{(N)},\dots,s_{n_N}^{(N)}))$ の $\boldsymbol{n}$-重 Wiener 積分とする。ただし $f_{\boldsymbol{n}}$ は $s_1^{(i)},\dots,s_{n_i}^{(i)}$ について対称とする $(\forall i)$。

$$I_{\boldsymbol{n}}(f_{\boldsymbol{n}})=\int_0^t\cdots\int_0^t f_{\boldsymbol{n}}(s_1^{(1)},\dots,s_{n_1}^{(1)};\cdots;s_1^{(N)},\dots,s_{n_N}^{(N)})dB^1_{s_1^{(1)}}\cdots dB^1_{s_{n_1}^{(1)}}\cdots dB^N_{s_1^{(N)}}\cdots dB^N_{s_{n_N}^{(N)}}.$$

L^2 関数の Itô-Wiener 展開に注意して Meyer-Watanabe 空間 $\boldsymbol{D}_2^\alpha$　$(\alpha\in\mathbb{R})$　を次で定める。

$$\boldsymbol{D}_2^\alpha=\{F=\sum I_{\boldsymbol{n}}(f_{\boldsymbol{n}}):\quad \|F\|_{2,\alpha}^2=\sum_{n=0}^\infty(1+n)^\alpha\sum_{|\boldsymbol{n}|=n}\boldsymbol{n}!\|f_{\boldsymbol{n}}\|^2<\infty\}.$$

ここで $\|f\|^2=\int\cdots\int|f|^2d\boldsymbol{s}$, $\boldsymbol{n}!=n_1!n_2!\cdots n_N!$ である。また $\mathbb{R}^N$ 値汎関数に対しても同様に定義し $\boldsymbol{D}_2^\alpha(\mathbb{R}^N)$ と記す。

$f_{\boldsymbol{n}}(s;\boldsymbol{s})\in L^2(dsd\boldsymbol{s})$ に対して B^i による Skorohod 積分 $\int_0^t I_{\boldsymbol{n}}(f_{\boldsymbol{n}}(s))dB_s^i$ を次で定める。

$$\int_0^t I_{\boldsymbol{n}}(f_{\boldsymbol{n}}(s))dB_s^i=I_{\boldsymbol{n}+\boldsymbol{e}_i}(\mathcal{S}_if_{\boldsymbol{n}}).$$

ここで $\mathcal{S}_if_{\boldsymbol{n}}$ は関数 $f_{\boldsymbol{n}}(s;s_1^{(1)},\dots,s_{n_1}^{(1)};\cdots;s_1^{(N)},\dots,s_{n_N}^{(N)})$ の，変数 $s,s_1^{(i)},\dots,s_{n_i}^{(i)}$ に関する対称化を表す。また $\boldsymbol{e}_i=(\delta_{1i},\dots,\delta_{Ni})$ （ δ_{jk} は Kronecker のデルタ）とする。一般の Meyer-Watanabe 空間の元 $G(s)=\sum I_{\boldsymbol{n}}(g_{\boldsymbol{n}}(s))$ に対して，その B^i による Skorohod 積分を $\int_0^t G(s)dB_s^i=\sum I_{\boldsymbol{n}+\boldsymbol{e}_i}(\mathcal{S}_ig_{\boldsymbol{n}})$ と定義する。（もちろん左辺が定義できる場合のみ考える。）これは $G(s)$ が $ds\times P$ について自乗可積分で $\mathcal{B}_s$-adapted であるとき Itô 積分と一致する。ここで $\mathcal{B}_s=\sigma\{B_u;u\leq s\}$ (Brownian filtration) である。

3. Tanaka の公式：

$$U(z)=-\frac{\Gamma(N/2-1)}{2\pi^{N/2}}\cdot\frac{1}{|z|^{N-2}}\quad(\text{if } N\geq 3),\qquad \frac{1}{\pi}\log|z|\quad(\text{if } N=2)$$

とおく。

[1] *Tanaka formula for multidimensional Brownian motions*, preprint.

[2] *The Asymptotic Behaviour of Local Times and Occupation Integrals of the N Parameter Wiener Process in* $\mathbf{R}^d$, Probab. Theory Relat. Fields, **98** (1994), 47-75.

定理 1. $x \neq 0$, $\alpha < 1 - N/2$ とする。このとき次式が $\boldsymbol{D}_2^\alpha$ で成り立つ。

$$(1) \qquad U(B_t - x) = U(-x) + \int_0^t \langle \nabla U(B_s - x), dB_s \rangle + L(t,x)$$

ここで $\int_0^t \langle \nabla U(B_s - x), dB_s \rangle = \sum_{i=1}^N \int_0^t \partial_i U(B_s - x) dB_s^i$ である。

注意 1. $\nabla U(B_s - x)$ は局所自乗可積分である。従って $\int_0^t \langle \nabla U(B_s - x), dB_s \rangle$ は局所 *martingale* としてとらえることも可能である。が，そうしてしまうと局所時間は出現しない。(1) は確率積分を *Skorohod* の意味で捕らえると，すなわち *Meyer-Watanabe* 空間の枠組みで考えると，局所 *martingale* $U(B_t - x)$ から *martingale* 部分および局所時間が抽出できることを主張している。

4. Doob-Meyer 分解：

定義 1. $\gamma \in \mathbb{R}$ とする。$\boldsymbol{D}_2^\gamma$ 値 *process* $\{M_s; 0 \le s \le t\}$ がすべての $s < u$ に対して $E[M_u | \mathcal{B}_s] = M_s$ をみたすとき，M_s は $\boldsymbol{D}_2^\gamma$*-martingale* であるという。

注意 2. $M_s = \sum I_{\boldsymbol{n}}(f_{\boldsymbol{n}}(s; \boldsymbol{s}))$ が $\boldsymbol{D}_2^\gamma$*-martingale* であるための必要十分条件は，ある $f_{\boldsymbol{n}}(\boldsymbol{s})$ が存在して $f_{\boldsymbol{n}}(s; \boldsymbol{s}) = f_{\boldsymbol{n}}(\boldsymbol{s}) \prod \mathbf{1}_{[0,s]}(s_j^{(k)})$ となることである。

定義 2. $\gamma \le 0$ とする。$\boldsymbol{D}_2^\gamma$ 値 $\mathcal{B}_s$*-adapted process* $\{A_s; 0 \le s \le t\}$ が $A_0 = 0$ であり，かつ，$F \ge 0$ なるすべての $F \in \boldsymbol{D}_2^{-\gamma}$ に対して $\langle A_t, F \rangle \ge \langle A_s, F \rangle$ が成り立つとき，A_s は $\boldsymbol{D}_2^\gamma$*-increasing* であるという。

定義 3. $\boldsymbol{D}_2^\gamma$*-increasing process* $\{A_s; 0 \le s \le t\}$ が次の性質を満たすとき， A_s は *natural* であるという：すべての $\boldsymbol{D}_2^{-\gamma}$*-martingale* Y_s に対して

$$(2) \qquad \lim_{|\Delta| \to 0} \sum_i \langle Y_{s_{i+1}} - Y_{s_i}, A_{s_{i+1}} - A_{s_i} \rangle = 0$$

が成り立つ。ここで $\Delta = \{0 = s_0 < s_1 < \cdots < s_{n-1} < s_n = s\}$ は $[0,s]$ の分割で $|\Delta| = \max |s_{i+1} - s_i|$.

注意 3. 上の条件 (2) は，A_s が L^1*-increasing* で Y_s が有界 *martingale* のときは次と同値である。

$$E[Y_s A_s] = E\left[\int_0^s Y_{u-} dA_u\right]$$

定義 4. $\boldsymbol{D}_2^\gamma$*-process* $\{X_s; 0 \le s \le t\}$ が次の分解を持つとき，この分解を X_s の $\boldsymbol{D}_2^\gamma$*-Doob-Meyer* 分解という：

$$X_s = M_s + A_s, \quad 0 \le s \le t.$$

ここで M_s は $\boldsymbol{D}_2^\gamma$*-martingale,* A_s は $\boldsymbol{D}_2^\gamma$*-natural increasing process* である。

以上の準備の下，次の結果を得る。

命題 1. $\boldsymbol{D}_2^\gamma$*-Doob-Meyer* 分解は一意的である。

定理 2. $L(t,x)$ は *natural* である。

系 1. $U(B_s - x)$ が $\boldsymbol{D}_2^\gamma$*-Doob-Meyer* 分解をもつ必要十分条件は $\gamma < 1 - N/2$ である。

n 階境界条件に対応する Brown 運動

西岡 國雄[1]

半直線 $[0,\infty)$ 上の熱方程式にたいし, 次の n 階境界値-初期値問題を考える.

問題 0.1 (境界値-初期値問題). $\varphi \in \mathcal{C}_b^\infty[0,\infty)$ を初期関数, n を非負整数とする.
次の条件を満たす解 u を求める:

$$\partial_t u(t,x) = \frac{1}{2}\partial_x^2 u(t,x) \quad \text{for } t>0 \text{ and } x \geq 0, \tag{0.1a}$$

$$\partial_x^n u(t,0) = 0 \quad \text{for } t>0, \tag{0.1b}$$

$$\lim_{t\to 0} u(t,x) = \varphi(x) \quad \text{for } x>0. \quad \triangle \tag{0.1c}$$

さて, $n=0,1,2$ の場合は, **問題 0.1** の一意な基本解 $p^{(0)}$ - $p^{(2)}$ の具体型とそれに対応する Brown 運動 $B^{(0)}(t)$ - $B^{(2)}(t)$ は良く知られている. p を熱核, 確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t), \mathbf{P})$ 上の一次元 Brown 運動を $\{B(t), t\geq 0\}$ とする:

$$\begin{aligned} &p^{(0)}(t,x,y) \equiv p(t,y-x) - p(t,y+x), \\ &\text{Killed Brownian motion} \quad B^{(0)}(t) \equiv \begin{cases} B(t) & 0 \leq t < \tau_0 \\ \partial & \tau_0 \leq t; \end{cases} \end{aligned} \tag{0.2}$$

$$\begin{aligned} &p^{(1)}(t,x,y) \equiv p(t,y-x) + p(t,y+x), \\ &\text{Reflecting Brownian motion} \quad B^{(1)}(t) \equiv B(t) + L(t), \quad t \geq 0; \end{aligned} \tag{0.3}$$

$$\begin{aligned} &p^{(2)}(t,x,y) \equiv p^{(0)}(t,x,y) + \mathbf{P}_x[\tau_0 \leq t]\,\delta(y:0), \\ &\text{Stopped Brownian motion} \quad B^{(2)}(t) \equiv B(t\wedge\tau_0). \end{aligned} \tag{0.4}$$

ここで $\tau_0 \equiv \inf\{t>0 : B(t)\leq 0\}$, $\delta(y:a)$ は a に単位質量を持つデルタ関数, $L(t) \equiv 0$ if $t<\tau_0$; $\equiv -\min\{B(s) : \tau_0 \leq s \leq t\}$ if $\tau_0 \leq t$ で $\{B^{(1)}(t)\}$ の local time となる.

しかし $n \geq 3$ の場合に,

(i) $p^{(n)}$ の具体型はどうなるのか?
(ii) $p^{(n)}$ を推移確率密度とする Brown 運動 $\{B^{(n)}(t)\}$ は存在するのか?
(iii) それらの Brown 運動の挙動は n について何らかの法則性を持つのか?

と言うことは判っていない. 今回この設問にたいし, 肯定的な結論が得られたので報告する.

1 基本解

まず, $n \geq 2$ では **問題 0.1** の条件だけでは解の一意性が確保できない. そこで追加の初期条件を加えた n 階境界値-初期値問題 を新たに設定する:

問題 1.1 (n **階境界値-初期値問題**). $\varphi \in \mathcal{C}_b^\infty[0,\infty)$ を初期関数, n を 2 以上の自然数とする.
(0.1a)-(0.1c) と次を満たす解 u を求める.

$$\lim_{t\to 0}\partial_x^k u(t,0) = \partial_x^k \varphi(0) \quad \text{with } k = \begin{cases} 0,2,\cdots,n-2 & \text{if } n \geq 2 \text{ and even} \\ 1,3,\cdots,n-2 & \text{if } n\geq 3 \text{ and odd.} \end{cases} \tag{1.1a}$$

[1] 都立大学数学教室, 〒 192-0397 八王子市南大沢: kunio@comp.metro-u.ac.jp

ここで解とは, (0.1a)–(0.1c), (1.1a) を古典的な意味で満たし, 次の条件も満足する滑らかな関数である:

$$(1.1b)\qquad \begin{cases} \text{For each fixed } t>0,\ u(t,x)\in\mathcal{C}_b^\infty[0,\infty) \text{ in } x\ge 0 \text{ and} \\ \sup_{x\ge 0}|u(t,x)|\le C(t^\ell+1) \text{ for some positive constants } C \text{ and } \ell. \end{cases}\quad \triangle$$

さて, **問題 1.1** の一意な基本解 $p^{(n)}$ は

$$(1.2a)\qquad p^{(2m)}(t,x,y)\,dy = p^{(2)}(t,x,y) + \sum_{j=1}^{m-1}\Big(\int_0^t \mathbf{P}_x[\tau_0\in ds]\,\frac{(t-s)^j}{(2j)!!}\Big)\,\partial_y^{2j}\delta(y:0)\,dy,$$

$$(1.2b)\qquad p^{(2m+1)}(t,x,y)\,dy = p^{(1)}(t,x,y)\,dy + \sum_{j=0}^{m-1}\Big(\int_0^t \mathbf{P}_x[\tau_0\in ds]\,\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{(t-s)^{j+1/2}}{(2j+1)!!}\Big)\,\partial_y^{2j+1}\delta(y:0)\,dy$$

となる事を主張する. ここで $\mathbf{P}_x[\tau_0\in ds] = -\partial_x p(s,x)\,ds$ if $x>0$; $=\delta(s:0)\,ds$ if $x=0$, $\delta(y:a)\,dy$ は単位質量が点 a に有るデルタ関数, $\partial_y^k\delta(y:a)\,dy$ はそれの超関数の意味での k-階微分である. 前者は "質点が a に有る単極子", 後者は "質点が a に有る 2^k-重極子" と呼ばれ, 磁気双極子や電気多重極子が存在する事が物理学で知られている. また重調和擬過程の境界値問題でも現れる ([2, 3]).

定理 1.2 (解の一意存在). $\varphi\in\mathcal{C}_b^\infty[0,\infty)$ を初期関数とする.

$$u^{(n)}(t,x:\varphi)\equiv\int_0^t dy\;p^{(n)}(t,x,y)\,\varphi(y),\qquad t>0,\ x\ge 0,\quad n\ge 2$$

は **問題 1.1** の一意解である. $\triangle$

注意 1.3. (i) この $u^{(n)}$ は勿論 Chapman-Kolmogorov の等式

$$(1.3)\qquad u^{(n)}(t,x:u^{(n)}(s,*:\varphi)) = u^{(n)}(t+s,x:\varphi)$$

を満たしている. さらに, ある種の正値性も備えている.
(ii) 高階に特有な初期条件 (1.1a) が解の一意性を保証する. 実際これ無しでは, 一意とならない反例が提示できる. さらに (1.1a) は, 次の 'より見易い条件' と同値となる:

$$(1.4)\qquad \lim_{t\to 0}\partial_x^k u^{(n)}(t,x:\varphi) = \partial_x^k\varphi(x)\quad \text{for } x\ge 0 \text{ with } k=0,1,\cdots,n-1.\quad\triangle$$

2 基本解 $p^{(n)}$ に対応する Brown 運動

我々の基本解 $p^{(n)}\,dy$ には, 単極子以外に 2^k-重極子 $\partial_y^k\delta(y:0)\,dy$, $k=n-2,n-4,\cdots$, を含む. つまり $p^{(n)}\,dy$ は, $n\ge 3$ では確率測度とはならず, それを推移確率とする確率過程は通常の意味では存在しない.

しかし, $p^{(n)}\,dy$ は Chapman-Kolmogorov の等式 (1.3) とある種の正値性を満たしているので, それを推移確率密度とする確率過程として, 超関数値 Brown 運動が対応する事が期待できる. ここで (1.2a, 1.2b) の $p^{(n)}\,dy$ は, 一般の超関数ではなく "デルタ関数およびその $n-2$

階までの微分”という特別な超関数だけを含むので, 次の空間を用意する.

$$
(2.1)\qquad \begin{cases} \mathbb{D}^{(2m)} \equiv \{\delta(y;a)\,dy + b_1\,\partial_y^2\delta(y:0)\,dy + \cdots + b_{m-1}\,\partial_y^{2m-2}\delta(y:0)\,dy : \\ \hfill a, b_j \in \mathbf{R}^1 \text{ for } j=1,\cdots,m-1\} \\ \mathbb{D}^{(2m+1)} \equiv \{\delta(y;a)\,dy + b_1\,\partial_y\delta(y:0)\,dy + \cdots + b_{m-1}\,\partial_y^{2m-1}\delta(y:0)\,dy : \\ \hfill a, b_j \in \mathbf{R}^1 \text{ for } j=1,\cdots,m-1\} \end{cases}
$$

この空間の元は $(a, b_1, \cdots, b_{m-1}) \in \mathbf{R}^m$ で特定できるので, $\mathbf{R}^m$ と同一視できる.

定義 2.1. 自然数 $n \geq 2$ にたいし, $\mathbb{D}^{(n)}$-値の確率過程 $\{\mathbb{B}^{(n)}(t), t \geq 0\}$ を以下で定義する: $\varphi \in \mathcal{C}_b^\infty[0,\infty)$ にたいし

$$
\varphi \circ \mathbb{B}^{(2m)}(t) \equiv \varphi(B^{(2)}(t)) + \sum_{j=1}^{m-1} Y^{(j)}(t)\ \partial_x^{2j}\varphi(0), \tag{2.2a}
$$

$$
\varphi \circ \mathbb{B}^{(2m+1)}(t) \equiv \varphi(B^{(1)}(t)) - \sum_{j=0}^{m-1} Z^{(j)}(t)\ \partial_x^{2j+1}\varphi(0). \tag{2.2b}
$$

ここで $B^{(1)}(t)$, $B^{(2)}(t)$ は (0.3, 0.4) で与えられた refelcting 及び stopped Brown 運動, $\{Y^{(j)}(t), t \geq 0\}$, $\{Z^{(j)}(t), t \geq 0\}$ は $(\mathcal{F}_t)$ に適合する確率過程で

$$
Y^{(j)}(t) \equiv \frac{1}{2^j\, j!}\,(t - t \wedge \tau_0)^j, \quad j \geq 1; \quad Z^{(j)}(t) \equiv \int_0^t dL(s)\,\frac{(t-s)^j}{2^j\, j!}, \quad j \geq 0. \quad \triangle
$$

注意 2.2. 我々の $\{\mathbb{B}^{(n)}(t), t \geq 0\}$ の挙動を直感的に説明する:

I. $n \geq 2$ が偶数の場合.

(i) 境界に到達するまでは, $\mathbb{B}^{(n)}(t)$ は大きさが 1, 台の位置が‘通常の Brown 運動に従って動く’単極子である. つまり通常の一次元 Brown 運動.

(ii) 一方, 境界に到達すると, 境界上に $n/2-1$ 種類の多重極子が発生する. 単極子とそれらの多重極子の台の位置は, いづれも境界から動かない. そして単極子の大きさは 1 のままだが, 多重極子の大きさは t と共に増加する.

II. $n \geq 3$ が奇数の場合.

$\{\mathbb{B}^{(n)}(t)\}$ は, 台の位置が‘通常の reflecting Brown 運動に従って動く’大きさが 1 の単極子である. ただし, この単極子が境界で最初に反射すると, $(n-1)/2$ 種類の多重極子が境界に発生する. これらの多重極子の台の位置は境界から動かないが, 単極子の反射が起こる度に大きさが変化する. $\triangle$

定理 2.3. (i) $\varphi \in \mathcal{C}_b^\infty[0,\infty)$ を任意に固定すると, $\{\varphi \circ \mathbb{B}^{(n)}(t), t \geq 0\}$ は $(\mathcal{F}_t)$ に適合する連続な Markov 過程である.

(ii) $p^{(n)}\,dy$ を (1.2a, 1.2b) で与えられた基本解とすると, 次の等式が成立する:

$$
\mathbf{E}_x[\varphi \circ \mathbb{B}^{(n)}(t)] = \int dy\ p^{(n)}(t,x,y)\ \varphi(y), \quad \varphi \in \mathcal{C}_b^\infty[0,\infty). \quad \triangle
$$

3 n 階境界条件の martingale 問題

$n = 0, 1, 2$ の場合, 滑らかな関数 $\psi(t,x)$ が

$$
\partial_x^n \psi(t,0) = 0 \quad \text{for} \quad 0 \leq t < T
$$

を満たしているなら,

$$\psi(t, B^{(n)}(t)) - \int_0^t ds\ (\partial_s\psi + \frac{1}{2}\partial_x^2\psi)(s, B^{(n)}(s)), \quad 0 \le t < T$$

が $(\mathcal{F}_t)$-martingale となる事が知られている. 我々の $\mathbb{D}^{(n)}$-値 Brown 運動も, これと類似した 'n 階境界条件の martingale 問題' の解である.

定理 3.1 (Martingale 問題). $n \ge 2$ を自然数とする. ある $T > 0$ にたいし, 関数 $\psi(t, x) \in \mathcal{C}_b^{1,\infty}[0, T) \times [0, \infty)$ が

$$\partial_x^n\psi(t, 0) = 0 \quad \text{for} \quad 0 \le t < T \tag{3.1}$$

を満たしているなら,

$$M^{(n)}(t : \psi) \equiv \psi(t, *) \circ \mathbb{B}^{(n)}(t) - \int_0^t ds\ (\partial_s\psi + \frac{1}{2}\partial_x^2\psi)(s, *) \circ \mathbb{B}^{(n)}(s), \quad 0 \le t < T \tag{3.2}$$

は, $(\mathcal{F}_t)$-martingale となる. △

注意 3.2. (i) $B(t)$, $B^{(1)}(t)$ を通常の Brown 運動及び reflecting Brown 運動とすると, (3.2) の $M^{(n)}(t : \psi)$ は次のように表現できる:

$$M^{(n)}(t : \psi) = \begin{cases} \psi(0, B(0)) + \displaystyle\int_0^{t\wedge\tau_0} dB(s)\ \partial_x\psi(s, B(s)) & \text{if } n \text{ is even} \\ \psi(0, B^{(1)}(0)) + \displaystyle\int_0^t dB(s)\ \partial_x\psi(s, B^{(1)}(s)) & \text{if } n \text{ is odd.} \end{cases}$$

(ii) 初期関数が φ である **問題 1.1** の解を $u(t, x)$ とする. $T > 0$ を任意に固定すると, $\{u(T - t, *) \circ \mathbb{B}^{(n)}(t) : 0 \le t < T\}$ は $(\mathcal{F}_t)$-martingale となり,

$$u(T, x) = \mathbf{E}_x[\varphi \circ \mathbb{B}^{(n)}(t)] \equiv \int dy\ p^{(n)}(T, x, y)\ \varphi(y). \quad \triangle$$

[1] Eidelman, S. D. and Zhitarashu, N. V., Parabolic Boundary Value Problems, Oper. Theor. Adv. Appl., Vol. 101, Birkhäuser, 1998; Math. Rev., 94m:35134.

[2] Nishioka, K., The first hitting time and place of a half-line by a biharmonic pseudo process, Japan. J. Math., **23** (1997), 235–280; Math. Rev., 99f:60080.

[3] Nishioka, K., Boundary conditions for one-dimensional biharmonic pseudo process, Electr. J. Prob., **6** (2001), 1-27; http:// www.math. washington. edu/ ˜ejpecp/Ejp Vol 6/ paper13.abs.html

[4] Ueno, T., A class of general boundary conditions for multi-dimensional diffusion equation, Proc. Japan Acad., 55 (1979), Ser. A, 390–394; Math. Rev., 81f:60109.

Mean-variance hedging for general semimartingales

Takuji Arai [1]

1 Introduction

Let $(\Omega, \mathcal{F}, P; \mathbf{F} = \{\mathcal{F}_t\}_{0\leq t\leq T})$ be a completed filtered probability space with a right-continuous filtration $\mathbf{F}$ satisfying that $\mathcal{F}_0$ is trivial and contains all null sets of $\mathcal{F}$, and $\mathcal{F}_T = \mathcal{F}$. Let X be an $\mathbf{R}^d$-valued $\mathbf{F}$-adapted RCLL special semimartingale of the space $\underline{\underline{H}}^2_{\mathrm{loc}}(P)$. Assume that X is locally bounded and not a quadratic pure jump one.

We consider an incomplete financial market being composed of one riskless asset whose price is 1 and d risky assets described by the semimartingale X. Supposed that the maturity is $T > 0$. In addition, an $\mathbf{R}^d$-valued $\mathbf{F}$-predictable process ϑ is called a self-financing strategy if the stochastic integral $G(\vartheta) := \int_0^\cdot \vartheta dX$ is a square integrable semimartingale. The process $G(\vartheta)$ means the trading gains induced by a self-financing strategy ϑ. Let H be an $\mathcal{F}_T$-measurable square integrable random variable. Throughout this talk, we regard H as a contingent claim. Then the mean-variance hedging strategy is given by the solution to the following minimization problem:

$$\text{minimize } E\left[(H - c - G_T(\vartheta))^2\right] \text{ over all self-financing strategies } \vartheta.$$

2 Preliminaries and main result

Since X is a special semimartingale being in $\underline{\underline{H}}^2_{\mathrm{loc}}(P)$, there is a unique canonical decomposition of X into a square integrable P-local martingale M starting at 0 and a locally natural process A of locally square integrable variation. Θ is the space of all $\mathbf{R}^d$-valued predictable X-integrable process ϑ such that the stochastic integral $G(\vartheta) := \int_0^\cdot \vartheta_s dX_s$ is in the space $\underline{\underline{H}}^2(P)$ of semimartingales.

We assume that the asset price process X satisfies the following structure condition (SC):

Assumption 2.1 (The structure condition(SC)) (1) There exists an $\mathbf{R}^d$-valued predictable process $\widehat{\lambda}$ satisfying $A_t = \int_0^t d\langle M\rangle_s \widehat{\lambda}_s$.

(2) We define the mean-variance trade-off process $\widehat{K}$ as $\widehat{K}_t := \int_0^t \widehat{\lambda}_s^{\mathrm{tr}} d\langle M\rangle_s \widehat{\lambda}_s$, where tr denotes transposition. Then, the mean-variance trade-off process $\widehat{K}$ is uniformly bounded in (t, ω).

[1] Department of Information Sciences, Tokyo University of Science, Yamasaki 2641, Noda, Chiba, 278-8510, Japan. e-mail:arai@is.noda.tus.ac.jp

Now, we enumerate assumptions which we must impose in this talk:

Assumption 2.2 (1) Since our market is incomplete, there exist infinitely many equivalent martingale measures in general. Moreover, suppose that there exist equivalent martingale measures whose density is square integrable.
(2) We assume that the variance-optimal martingale measure $\widetilde{P}$ exists uniquely as an equivalent martingale measure.
(3) Suppose that the density process Z of variance-optimal martingale measure satisfies the reverse Hölder inequality $R_2(P)$, where $Z_t := E\left[\frac{d\widetilde{P}}{dP}\middle|\mathcal{F}_t\right]$.
(4) Suppose that the process $1/Z$ is locally bounded.

A contingent claim $H \in \mathcal{L}^2(\mathcal{F}_T, P)$ admits a Föllmer-Schweizer decomposition as follows:

$$H = H_0 + \int_0^T \xi_s^H dX_s + L_T^H,$$

where $H_0 \in \mathbf{R}$, $\xi^H \in \Theta$ and L^H is a square integrable P-martingale strongly P-orthogonal to M with $L_0^H = 0$. On the other hand, we define the process $\widetilde{V}^H$ by

$$\widetilde{V}_t^H := \widetilde{E}[H|\mathcal{F}_t] = \widetilde{E}[H] + \int_0^t \widetilde{\xi}_s^H dX_s + \widetilde{L}_t^H,$$

where $\widetilde{\xi}^H \in \Theta$ and $\widetilde{L}_t^H := \widetilde{E}[L_T^H|\mathcal{F}_t]$.

Next, a Föllmer-Schweizer decomposition of the density $\frac{d\widetilde{P}}{dP}$ is given by:

$$\frac{d\widetilde{P}}{dP} = \widetilde{E}\left[\frac{d\widetilde{P}}{dP}\right] + \int_0^T \widetilde{\zeta}_s dX_s \qquad \text{for some } \widetilde{\zeta} \in \Theta.$$

Hence, $\widetilde{Z}$ is represented as

$$\widetilde{Z}_t := \widetilde{E}\left[\frac{d\widetilde{P}}{dP}\middle|\mathcal{F}_t\right] = \widetilde{E}\left[\frac{d\widetilde{P}}{dP}\right] + \int_0^t \widetilde{\zeta}_s dX_s.$$

Finally, we state the main theorem in this talk.

Theorem 2.3 *Under Assumptions 2.1 and 2.2, for a contingent claim $H \in \mathcal{L}^2(\mathcal{F}_T, P)$, the solution to the minimization problem:*

$$\textit{minimize } E\left[(H - G_T(\vartheta))^2\right] \textit{ over all } \vartheta \in \Theta,$$

is given by

$$\vartheta_t^H = \widetilde{\xi}_t^H - \frac{\widetilde{\zeta}_t}{\widetilde{Z}_{t-}}\left(\widetilde{V}_{t-}^H - \int_0^{t-} \vartheta_s^H dX_s\right).$$

Stochastic Model of Economic Optimization

Mu-Fa Chen *
(Beijing Normal University)

Stochastic Processes and Related Fields
(Keio University, Japan, December 11, 2002)

November 14, 2002

This is an attractive model with serious challenge to probabilists. The talk begins with the well-known input-output method, starting from an ideal model. Then, we introduce Hua's fundamental theorem, go to the stochastic case, and finally consider a more practical model having consumption.

1. The input–output method. Fix the unit of the quantity of each product in the production. Let $x = (x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots, x^{(d)})$ denote the vector of the quantities of the main products we are interesting in, called *a vector of products.*

To understand the current economy, we need

(1) the vector of products input last year $x_0 = (x_0^{(1)}, x_0^{(2)}, \ldots, x_0^{(d)})$;

(2) the output of the vector of products from this year $x_1 = (x_1^{(1)}, x_1^{(2)}, \ldots, x_1^{(d)})$; and

(3) the structure matrix (or *the matrix of expend coefficient*) $A_0 = (a_{ij}^{(0)})$. The meaning of the matrix is as follows: to produce one unit of the i-th product, one needs $a_{ij}^{(0)}$ units of the j-th product. Then, we obtain the following equation:

$$x_0^{(j)} = \sum_{i=1}^{d} x_1^{(i)} a_{ij}^{(0)}, \quad x_0 = x_1 A_0.$$

Suppose for a moment that all the products are used for the reproduction (*idealized model*). Then $x_{n-1} = x_n A_{n-1}$ for all $n \geq 1$. Hence

$$x_0 = x_1 A_0 = x_2 A_1 A_0 = x_n A_{n-1} \cdots A_0.$$

*Research supported in part by NSFC (No. 10121101), RFDP and 973 Project.

We now consider the time-homogeneous case: $A_n = A$ for all $n \geq 0$. Then the expression for the n-th output can be simply written as follows:

$$x_n = x_0 A^{-n}, \quad n \geq 1.$$

Known the structure matrix and the input x_0, one may predict the future output. This is the well known *input-output method.*

2. L. K. Hua's fundamental theorem. Consider the equation $x_1 = x_0 A^{-1}$. For a short period, one may fix A. The question is *which choice of x_0 is the optimal one for the output.*

Theorem [L. K. Hua, 1983]. Given an irreducible non-negative matrix A, let u be the left eigenvector (must be positive) of A corresponding to the largest eigenvalue of A. Then, up to a constant, the optimal solution in the sense of minimax principle is $x_0 = u$. Otherwise, the economic system will be collapsed in the sense that at least one component of x_n for some n becomes non-positive.

The result holds also for the economy in the markets. We present a probabilistic proof of Hua's theorem.

3. Stochastic model without consumption. Replace A^n with a product of i.i.d. random matrices, we get a stochastic model and then ask the same question as before. We have the following result.

Theorem [Chen, 1992]. Under some mild conditions, the economic system will be collapsed with probability one for any positive input.

The mathematical tool used in the study is mainly the limit theorems of product of random matrices.

4. Stochastic model with consumption. Finally, we consider a more practical model with consumption and prove partially a similar result.

Some interesting open problems are proposed.

Department of Mathematics, Beijing Normal University, Beijing 100875, The People's Republic of China.
E-mail: mfchenbnu.edu.cn
Home page: http://www.bnu.edu.cn/~chenmf/main_eng.htm

Infinite divisibility and generalized subexponentiality

志村 隆彰 (統計数理研究所)　渡部俊朗 (会津大総合数理)

片側無限分解可能分布とその Lévy 測度の裾の関係について，次の 3 つが同値であることが知られている．(i) 無限分解可能分布自身が subexponential であること，(ii) 正規化された Lévy 測度が subexponential であること (iii) 無限分解可能分布の裾とその Lévy 測度の裾が漸近的に等しいこと（Embrechts et al.(1979)）．

正の分布 μ が subexponential ($\mu \in \mathcal{S}$) であるとは $\lim_{x\to\infty} \overline{\mu * \mu}(x)/\bar{\mu}(x) = 2$ で定義されるが（$\bar{\mu}(x)$ は μ の裾 $\mu(x,\infty)$），本講演ではこれを
$\limsup_{x\to\infty} \overline{\mu * \mu}(x)/\bar{\mu}(x) < \infty$ と拡張した分布族 $\mathcal{OS}$(O-subexponential class) を考え，無限分解可能性との関連について考察した結果について報告する．

$\mathbf{R}_+$ 上の無限分解可能分布で，ずれが 0, Lévy 測度 ν が全ての $x > 0$ に対して，$\bar{\nu}(x) = \nu(x,\infty) > 0$ を満たすもの全体を $\mathbf{ID}_+$ で表す．$\mu \in \mathbf{ID}_+$ に対し，正規化した Lévy 測度を $\nu_1 = \frac{1}{\nu(1,\infty)} 1_{\{x>1\}}\nu$ とする．

定理 1　μ を $\mathbf{ID}_+$ とする．
(i) 次は同値である．
　(1) $\nu_1 \in \mathcal{OS}$,
　(2) $\bar{\mu}(x) \asymp \bar{\nu}(x)$.
(ii) 次は同値である．
　(1) $\mu \in \mathcal{OS}$,
　(2) $n \geq 1$ が存在して $\nu_1^{n*} \in \mathcal{OS}$,
　(3) $n \geq 1$ が存在して $\bar{\mu}(x) \asymp \overline{\nu_1^{n*}}(x)$.

注意 (ii) で一般には $n = 1$ とは出来ない．即ち，$\nu_1 \notin \mathcal{OS}$ であっても $\mu \in \mathcal{OS}$ となる場合がある（例 3 の η から $\{0\}$ の測度を除いたものを ν とすればよい）．

例 1 (convolution equivalent class) $\mathbf{R}_+$ 上の分布 μ が指数 $\gamma(\geq 0)$ の convolution equivalent class $\mathcal{S}(\gamma)$ に属するとは 次のふたつを満たすときをいう．(i) $\lim_{x\to\infty} \overline{\mu * \mu}(x)/\bar{\mu}(x) = 2\int_0^\infty e^{\gamma t}\mu(dt) < \infty$, (ii) μ は 指数 γ の exponential tail を持つ分布族 $\mathcal{L}(\gamma)$ に属する（任意の $k \in \mathbf{R}$ に対して，$\lim_{x\to\infty} \bar{\mu}(x-k)/\bar{\mu}(x) = e^{k\gamma}$）．定義から $\mathcal{S}(\gamma) \subset \mathcal{OS}$ である．逆正規分布はこのクラスに属する．

例 2 (semi-stable laws) 片側半安定分布は $\mathcal{OS}$ である．さらに，半安定分布とその Lévy 測度 の裾の比の上下限は

$$\liminf_{x\to\infty} \frac{\bar{\mu}(x)}{\bar{\nu}(x)} = 1, \quad \limsup_{x\to\infty} \frac{\bar{\mu}(x)}{\bar{\nu}(x)} = \sup_{1\leq x<b} \frac{\bar{\nu}(x-)}{\bar{\nu}(x+)}.$$

ここで b はスパンである．

例3 片側分布 η を次のように定義する.

$$\eta(dx) = c_1 \sum_{k\in\mathbf{T}} \frac{e^{-k}}{(k+1)^2}\delta_k(dx).$$

ここで, $\mathbf{T} = \{k \in \mathrm{N}\cup\{0\} : k = \sum_{i=1}^{\infty} j_i 3^{i-1}, j_i = 0,1\}$, c_1 は規格化定数である. この η は自身は $\mathcal{OS}$ に属さないが, $\eta * \eta$ は $\mathcal{OS}$ に属するという奇妙な例となっている.

さて, $\mathcal{S}$ 及びそれと $\bar{\mu}(x)/\bar{\nu}(x)$ の $x \to \infty$ のときの挙動の関係についての拡張を考えるとき, $\lim_{x\to\infty} \overline{\mu * \mu}(x)/\bar{\mu}(x)$ が 2 以外も含めた定数となる分布族 ($\mathcal{WS}$ とかく) や $\lim_{x\to\infty} \bar{\mu}(x)/\bar{\nu}(x)$ が 1 以外になる場合について考えるのは自然であろう. 明らかに $\cup_{\gamma\geq 0}\mathcal{S}(\gamma) \subset \mathcal{WS}$ であるが, これが"="であるかは分からない. ただし, $\mathcal{S}(\gamma) = \mathcal{WS} \cap \mathcal{L}(\gamma)$ である (Chover et al.(1973), Cline(1987), Rogozin(2000)). 一方, $\mu \in \mathcal{S}(\gamma) \cap \mathbf{ID}_+$ のならば, $\lim_{x\to\infty} \bar{\mu}(x)/\bar{\nu}(x) = \int_0^\infty e^{\gamma t}\mu(dt)$ であるから (Sgibnev(1990)), $\mathcal{WIS} \subset \mathbf{ID}_+$ を $x \to \infty$ のとき $\bar{\mu}(x)/\bar{\nu}(x)$ が定数に収束するような分布全体からなる族とすれば, $\cup_{\gamma\geq 0}\mathcal{S}(\gamma) \cap \mathbf{ID}_+ \subset \mathcal{WIS}$ がいえる. さらに $\mathcal{L}(\gamma)$ の仮定を課すことで次の定理を得る.

定理 2 $\gamma \geq 0$ に対して,

$$\mathcal{WIS} \cap \mathcal{L}(\gamma) = \mathcal{S}(\gamma) \cap \mathbf{ID}_+.$$

参考文献

[1] J.Chover,P.Ney and S.Wainger.(1973). Functions of probability measures. J.Analyse Math. **26** 255-302.

[2] D.B.H.Cline.(1987). Convolutions of distributions with exponential and subexponential tails. J.Austral. Math.Soc. Ser. A **43** 347-365.

[3] P.Embrechts,C.M.Goldie and N.Veraverbeke.(1979). Subexponentiality and infinite divisibility. Z.Wahrscheinlichkeitstheorie und Verw.Gebiete **49** 335-347.

[4] B.A.Rogozin.(2000). On the constant in the definition of subexponential distributions. Theory Probab. Appl. **44** 409-412.

[5] M.S.Sgibnev.(1990). Asymptotics of infinitely divisible distributions on **R**. Siberian Math.J. **31** 115-119.

多次元安定分布の密度関数の漸近挙動

平場　誠示　(東京理科大・理工・数学)

$0<\alpha<2$ に対し, $\mu(dx)$ を $\mathbf{R}^d$ 上の指数 α の安定分布とする. この対数特性関数 $\Psi(z):=\log\int_{\mathbf{R}^d}e^{ixz}\mu(dx)$ $(i=\sqrt{-1})$ は次で与えられる.

$$\Psi(z)=\begin{cases}-\displaystyle\int_{\mathbf{S}^{d-1}}|\langle z,\theta\rangle|^{\alpha}\left[1-i(\operatorname{sgn}\langle z,\theta\rangle)\tan\frac{\pi\alpha}{2}\right]\lambda(d\theta)+i\langle z,b\rangle & (\alpha\neq 1),\\ -\displaystyle\int_{\mathbf{S}^{d-1}}|\langle z,\theta\rangle|\left[1+i\frac{2}{\pi}(\operatorname{sgn}\langle z,\theta\rangle)\log|\langle z,\theta\rangle|\right]\lambda(d\theta)+i\langle z,b\rangle & (\alpha=1),\end{cases}$$

ここで $\langle z,\theta\rangle=\sum_{j=1}^{d}z_j\theta_j$ は $z=(z_1,\ldots,z_d)$, $\theta=(\theta_1,\cdots,\theta_d)$ の内積を, "$\operatorname{sgn}x$" は符号関数を表す, i.e., $\operatorname{sgn}x=1$ $(x>0)$, $=0$ $(x=0)$, $=-1$ $(x<0)$. また $\lambda(d\theta)$ は $\mathbf{S}^{d-1}$ 上の有限測度で, $b\in\mathbf{R}^d$ である.

我々は次を仮定する.

仮定 1　$b=0$ とし, ある番号 $m\geq 0$ に対し,

$$\mathbf{Spt}\,\lambda=\{\sigma^{(1)},\sigma^{(2)},\ldots,\sigma^{(d+m)}\}\subset\mathbf{S}^{d-1}\quad\text{かつ}\quad\mathbf{Span\,Spt}\,\lambda=\mathbf{R}^d,$$

即ち, λ の台が $\mathbf{R}^d$ を張るような有限個の点にのみある.

このとき μ は非退化で, C^∞ 密度関数 $p(x)$ をもつ, i.e., $\mu(dx)=p(x)dx$.

我々は各方向 $\sigma\in\mathbf{S}^{d-1}$ を固定するごとの $p(r\sigma)$ の $r\to\infty$ での減少の度合いを調べたい. 1 次元のときは良く知られていて, λ が $\{+1\}$ に重みをもてば, $p(y)\sim C(\alpha)y^{-1-\alpha}$ $(y\to+\infty)$ で, 尚且つ, λ が $\{-1\}$ に重みをもたなければ, $p(y)=0$ となるのは $0<\alpha<1$ かつ $y\leq 0$ のときのみで, $1\leq\alpha<2$ なら $y\to-\infty$ のとき指数的に減少する. 我々は一般の次元において, この漸近挙動を調べたい.

各 $n=1,2,\ldots,d$ に対し, 次のようにおく.

$$S(n):=\left\{\sum_{s=1}^{n}a_s\sigma^{(j_s)};\ a_s\geq 0, j_s=1,2,\ldots,d+m\ (s=1,2,\ldots,n)\right\}\cap\mathbf{S}^{d-1},$$

$$T(n):=S(n)\setminus S(n-1)\quad\text{with}\quad S(0):=\emptyset.$$

$\sigma\in T(n)$ は σ が $T(1)=S(1)=\{\sigma^{(1)},\sigma^{(2)},\ldots,\sigma^{(d+m)}\}$ のちょうど n 個の独立なベクトルの正係数をもつ線形和で表され, $n-1$ 個以下の正係数線形和では表されないことを意味する. (但し, $n+1$ 個以上の独立なベクトルの正係数線形和でも表される可能性はある.)

$\mathbf{Int}\,S(d)$ で $S(d)$ の $\mathbf{S}^{d-1}$ における内部を表す.

定理 1　仮定 1 のもと, 次が成り立つ.

(i) $0<\alpha<1$ のとき, ある $n=1,\dots,d$ に対し, $\sigma\in T(n)\cap \mathbf{Int}\, S(d)$ なら $p(r\sigma)\sim C(\alpha,\sigma)r^{-n(1+\alpha)}$ $(r\to\infty)$. $\sigma\notin \mathbf{Int}\, S(d)$ なら $p(r\sigma)=0$ $(r\geq 0)$.

(ii) $1\leq\alpha<2$ のとき, ある $n=1,\dots,d$ に対し, $\sigma\in T(n)$ なら $p(r\sigma)\sim C(\alpha,\sigma)r^{-n(1+\alpha)}$ $(r\to\infty)$. $\sigma\notin S(d)$ なら $p(r\sigma)$ は指数的に減少する.

系 1　$S(d)=\mathbf{S}^{d-1}$ で, ある $n=1,\dots,d$ に対して $\sigma\in T(n)$ なら $p(r\sigma)\sim C(\alpha,\sigma)r^{-n(1+\alpha)}$ $(r\to\infty)$.

我々はさらに詳しく, 上の係数 $C(\alpha,\sigma)$ を決定することができる.

各 $j=1,\dots,d+m$ に対し, $p_j(y)$ を $\sigma^{(j)}$ に対応する 1 次元安定分布の密度関数とする. 即ち,

$$\Psi_j(t)=\begin{cases} -\lambda(\{\sigma^{(j)}\})|t|^{\alpha}\left[1-i(\operatorname{sgn} t)\tan\dfrac{\pi\alpha}{2}\right] & (\alpha\neq 1),\\[2ex] -\lambda(\{\sigma^{(j)}\})|t|\left[1+i\dfrac{2}{\pi}(\operatorname{sgn} t)\log|t|\right] & (\alpha=1).\end{cases}$$

を対数特性関数にもつ密度関数を $p_j(y)$ とする.

$\sigma\in T(n)$ のとき, 次を定義する.

$$\begin{aligned} J(n) \;:=\; & \Big\{\{j_1,\dots,j_n\}\subset\{1,\dots,d+m\};\ \sigma=a_1\sigma^{(j_1)}+\cdots+a_n\sigma^{(j_n)},\\ & \quad a_s>0\ (s=1,\dots,n), \{\sigma^{(j_1)},\dots,\sigma^{(j_n)}\}\ \text{線形独立}\Big\}. \end{aligned}$$

各 $\{j_1,\dots,j_n\}\in J(n)$ に対し, $\{\sigma^{(j_{n+1})},\dots,\sigma^{(j_d)}\}$ を, $\{\sigma^{(j_1)},\dots,\sigma^{(j_d)}\}$ が $\mathbf{R}^d$ の基底となるものとして固定し, $Q_{j_1,\dots,j_n}$ を $d\times d$ 行列で, $Q_{j_1,\dots,j_n}e^{(i_s)}=\sigma^{(j_s)}$ $(s=1,\dots,d)$ なるものとして固定する. 但し, $e^{(i)}$ は x_i 軸方向の単位ベクトルで, $(i_1,\dots,i_d)$ は $(1,\dots,d)$ の並び替えである. また $(d-n)$ 次元密度関数 $p^{\perp}_{j_1,\dots,j_n}(x_{i_{n+1}},\dots,x_{i_d})$ を $n=d$ なら 1 とし, $n<d$ なら次で定める.

$$\begin{aligned} &\int_{-\infty}^{\infty}dy_1p_{j_{d+1}}(y_1)\cdots\int_{-\infty}^{\infty}dy_mp_{j_{d+m}}(y_m)\\ &\qquad p_{j_{n+1}}\left(x_{i_{n+1}}-\sum_{s=1}^{m}y_s\xi^{(j_{d+s})}_{i_{n+1}}\right)\cdots p_{j_d}\left(x_{i_d}-\sum_{s=1}^{m}y_s\xi^{(j_{d+s})}_{i_d}\right), \end{aligned}$$

但し, $\{j_{d+1},\dots,j_{d+m}\}:=\{1,\dots,d+m\}\setminus\{j_1,\dots,j_d\}$, $\xi^{(j_{d+s})}:=Q^{-1}_{j_1,\dots,j_n}\sigma^{(j_{d+s})}$.

定理 2　$\sigma\in T(n)$ を仮定する ($0<\alpha<1$ なら $\sigma\in\mathbf{Int}\,S(d)$ も).

$$p(r\sigma)\sim\sum_{\{j_1,\dots,j_n\}\in J(n)}|\det Q_{j_1,\dots,j_n}|^{-1}p_{j_1}(ra_1)\cdots p_{j_n}(ra_n)p^{\perp}_{j_1,\dots,j_n}(0,\dots,0)$$

$(r\to\infty)$ が成り立つ. ここで $p^{\perp}_{j_1,\dots,j_n}(0,\dots,0)$ は正の数である.

期待値無限大の定常確率変数列における最大値の漸近的挙動について

夏井 利恵 （慶應義塾大学・理工学部）

無限大の期待値をもつ定常確率変数列の最大値の漸近的挙動に関して，まず初めに continued fraction mixing とよばれる従属性をもつ場合について議論する．一方，continued fraction mixing でない定常確率変数列に対しても最大値の漸近的挙動について同様の性質が成り立つ例として α-連分数変換とよばれる変換から作られる係数列について紹介する．

定義 (Continued fraction mixing). 定常確率変数列 $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$（確率 μ）が *continued fraction mixing* であるとは，以下の性質を満たすことである：
$\{X_i, \ldots, X_j\}$ によって生成される *σ-algebra* を $\mathbf{B}_i^j$ とし，

$$\psi(t) := \sup_{A\in\mathbf{B}_1^s,\, B\in\mathbf{B}_{s+t}^{\infty},\, s\geq 1} \frac{|\mu(A\cap B) - \mu(A)\cdot\mu(B)|}{\mu(A)\cdot\mu(B)}$$

と定義するとき，

$$\psi(t) \to 0 \qquad (t\to\infty) \qquad (\text{“}\psi - \textit{mixing}\text{”}) \qquad \textit{and} \qquad \psi(1) < \infty$$

が成り立つ．

以下，$\{X_n\}$ は 無限大の期待値をもつ continued fraction mixing 非負定常確率変数列とする．$\{X_n\}$ の local maximum を $L_N = \max_{1\leq n\leq N} X_n$ とおくと，L_N の漸近的挙動に関して次の定理を得る．

定理．

$$(B1) \quad \mu\{\mathbf{x} : X_1(\mathbf{x}) \geq j\} = \frac{H}{j} + o\left(\frac{1}{j}\right),\ j\geq 1 \text{ となる正定数 } H \text{ が存在する，}$$

$$(B2) \quad \psi(t) = O\left(\rho^{\sqrt{t}}\right), \quad 0<\rho<1$$

を仮定する．このとき，任意の $0<\delta<1$ と $y>0$ に対して，

$$\mu\left(\left\{\mathbf{x} : \frac{L_N(\mathbf{x})}{N} < H\cdot y\right\}\right) = \exp\left(-\frac{1}{y}\right) + O\left(\exp(-(\log N)^{\delta})\right)$$

が成り立つ．

注意． 上の定理の $(B2)$ を仮定しないと，誤差項を評価しない次の結果を得る．

$$\lim_{N\to\infty} \mu\left(\left\{\mathbf{x} : \frac{L_N(\mathbf{x})}{N} < H\cdot y\right\}\right) = \exp\left(-\frac{1}{y}\right).$$

定理．仮定 $(B1), (B2)$ の下で，次が成り立つ：

$$\liminf_{N\to\infty} \frac{L_N}{\frac{N}{\log\log N}} = H \qquad (a.e.)$$

さらに，大数の法則に準ずる結果を述べる．

定理．

$$(C1) \quad \mu\{\mathbf{x} : X_1(\mathbf{x}) \geq j\} = \frac{H}{j} + O\left(\frac{1}{j^2}\right),\ j \geq 1 \text{ となる正定数 } H \text{ が存在する},$$

$$(C2) \quad \sum_{t=1}^{\infty} \psi(t) < \infty$$

を仮定する．このとき，

$$\lim_{N\to\infty} \frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_N - L_N}{N \log N} = H \qquad (a.e.)$$

が成り立つ．

一方，continued fraction mixing でない期待値無限大の定常確率変数列の例として α-連分数変換から作られる係数列を考え，その mixing property と最大値の漸近的挙動に関する結果を紹介する．

$\frac{1}{2} \leq \alpha \leq 1$ に対して，区間 $\mathbf{I}_\alpha = [\alpha - 1, \alpha]$ とおく．このとき，写像 $T_\alpha : \mathbf{I}_\alpha \to \mathbf{I}_\alpha$ を次のように定義する:

$$T_\alpha(x) = \left|\frac{1}{x}\right| - \left[\left|\frac{1}{x}\right|\right]_\alpha \quad \text{for } x \in \mathbf{I}_\alpha \setminus \{0\} \quad \text{and} \quad T_\alpha(0) = 0,$$

ここで，$y \in [n - 1 + \alpha, n + \alpha)$ のとき，$[y]_\alpha = n$ とする．いま，$x \in \mathbf{I}_\alpha$ に対して，

$$\varepsilon_n(x) = \operatorname{sgn} T_\alpha^{n-1}(x) \quad \text{and} \quad c_n(x) = \left[\left|\frac{1}{T_\alpha^{n-1}(x)}\right|\right]_\alpha \quad (\text{or} \quad c_n(x) = \infty \quad \text{if} \quad T_\alpha^{n-1}(x) = 0)$$

とおく．T_α には，絶対連続エルゴード的不変確率測度 μ_α が存在する．これより，$\{c_n(x)\}$ は，μ_α に関して期待値が無限大の定常確率変数列をなすことがわかる．さらに，

$$a_n(x) = \varepsilon_n(x) \cdot c_n(x).$$

とおき，$\{a_n(x)\}$ も μ_α に関する定常確率変数列として扱う．

定義 (weak Bernoulli). 確率変数列 $\{X_n\}$ が *weak Bernoulli* とは，

$$D\left(\mathbf{B}_1^k,\ \mathbf{B}_{k+N}^{k+N-1}\right) < \varepsilon \qquad \textit{for any} \quad k \geq 1$$

が成り立つことをいう．但し，

$$D(\mathbf{B}_1^k,\ \mathbf{B}_{k+N}^{k+N-1}) := \sum_{P,Q} |\mu(P \cap Q) - \mu(P)\mu(Q)|,$$

ここで，P, Q は各々 $\mathbf{B}_1^k$, $\mathbf{B}_{k+N}^{k+N-1}$ の *atom* 全体をとるものとする．

定理． 任意の $\frac{1}{2} \le \alpha \le 1$ に対して，$\{a_n\}$ は *weak Bernoulli.*

次の α に関する仮定の下で，$\{a_n\}$ は continued fraction mixing でないことがわかる．
仮定 (A).

1. $T_\alpha^n(\alpha) \notin \{\alpha, \alpha - 1\}$ for any $n \ge 1$,
2. $T_\alpha^{n_i}(\alpha) \to \alpha$, あるいは，$T_\alpha^{n_i}(\alpha) \to \alpha - 1$ となるような部分列 $\{n_i\}$ が存在する．

注意． 仮定 (A) は *a.e.* α, $\frac{1}{2} \le \alpha \le 1$ で成り立つ．

定理． 仮定 (A) の下で，次が成り立つ：

1. $\{a_n\}$ は *continued fraction mixing* でない，

2. $\psi(n) = \infty$ *for any* $n \ge 1$.

$\{c_n(x)\}$ が，continued fraction mixing でないことも上の定理から従う．一方で，$\{c_n(x)\}$ の最大値に関して前述のような continued fraction mixing 確率変数列と同様の漸近的挙動に関する性質が成り立つ．実際，

$$L_N = L_N(x) := \max_{1 \le n \le N} c_n \quad \text{and} \quad C_\alpha = \begin{cases} (\log \frac{\sqrt{5}+1}{2})^{-1} & \text{if } \frac{1}{2} \le \alpha < \frac{\sqrt{5}-1}{2} \\ (\log(1+\alpha))^{-1} & \text{if } \frac{\sqrt{5}-1}{2} \le \alpha \le 1 \end{cases}$$

とおくと，次が成立する．

- $\displaystyle \lim_{N\to\infty} \mu_\alpha\{x \in \mathbf{I}_\alpha : \frac{L_N(x)}{N} < C_\alpha \cdot y\} = e^{-\frac{1}{y}}.$
- $\displaystyle \liminf_{N\to\infty} \frac{L_N}{\frac{N}{\log\log N}} = C_\alpha$ (a.e.)
- $\displaystyle \lim_{N\to\infty} \frac{c_1 + c_2 + \cdots + c_N - L_N}{N \log N} = C_\alpha$ (a.e.)

参考文献

[1] H. Nakada and R. Natsui, *On the metrical theory of continued fraction mixing fibred systems and its application to Jacobi-Perron algorithm*, to appear in Mh. Math.

[2] H. Nakada and R. Natsui, *Some metric properties of α-continued fractions*, to appear in J. Number Th.

[3] H. Nakada and R. Natsui, *Mixing properties of α-continued fraction transformations*, preprint.

Statistics for the number of vertices of Galton-Watson trees

南　就将　　　　　　　筑波大学数学系

$\Pi = \{p_n\}_{n=0}^{\infty}$ を $\mathbf{Z}_+$ 上の確率分布とし、 Π を offspring distribution とする Galton-Watson 過程を $\{Z_n\}_{n=0}^{\infty}$ $(Z_0 = 1)$ とする。すべての "trees" からなる空間 Ω に適当な σ–代数 $\mathcal{F}$ と確率測度 P を定義して、

$$Z_n(\omega) = \text{tree } \omega \text{ の第 } n \text{ 世代の頂点数}$$

とすることができる。(Otter(1949), Neveu(1986)) ここでは Markov chain $\{Z_n\}_n$ よりは tree ω 自体の形状を問題にする。特に $Z(\omega)(=\sum_{n\geq 0} Z_n(\omega))$ を tree ω の頂点総数、$Y_k(\omega)$ ($k = 0, 1, 2, \dots$) を子供の数が k である頂点の数、$\mathcal{Y}_k = \sum_{j=0}^{k} Y_j(\omega)$ とする。

以下、$p_0 > 0$, $p_0 + p_1 < 1$ を仮定する。$f(z) = \sum_{n\geq 0} p_n z^n$ を Π の母関数、ρ $(\rho \geq 1)$ をその収束半径とする。有限な $a > 0$ が存在して

$$\frac{f(a)}{a} = \inf_{0<z<\rho} \frac{f(z)}{z} \leq 1$$

となるが、$a < \rho$ のとき Π, あるいは $f(z)$ は条件 A を満たすということにする。このとき $f'(a) = f(a)/a$ となる。さらに $d = d(\Pi)$ を、$p_n > 0$ となるすべての n たちの最大公約数とする。

1　$Z, \mathcal{Y}_k$ の分布の漸近評価

まず、自明な評価として次が成り立つ：

Proposition 1. (i) $n \not\equiv 1 \pmod{d(\Pi)}$ ならば $P(Z = n) = 0$.
(ii) $\limsup_{n\to\infty} P(Z = n)^{1/n} = f(a)/a$.

さらに Otter(1949) の結果の改良として

Theorem 1. 条件 A が成り立つならば、$n \not\equiv 1 \pmod{d(\Pi)}$, $n \to \infty$ とするとき

$$P(Z = n) \sim \sum_{k=1}^{\infty} c_k \left(\frac{f(a)}{a}\right)^n n^{-k-1/2} .$$

ここで $c_1 = d\sqrt{\frac{f(a)}{2\pi f''(a)}}$. また $f'(1) = 1$ (critical) の場合のみ $f(a)/a = 1$, それ以外の場合は $f(a)/a < 1$ である。

次に $g_k(z) = (\sum_{j=0}^{k} p_j z^j)/(1 - \sum_{j>k} p_j z^{j-1})$ とすると $g_k(z)$ は $\mathbf{Z}_+$ 上のある確率分布 $\Pi^{(k)} = \{p_n^{(k)}\}_{n\geq 0}$ の母関数になっている。Π と同様、$p_0^{(k)} > 0$, $p_0^{(k)} + p_1^{(k)} < 1$ が成り立つ。また $g_k(z)$ を z のベキに展開したときの収束半径を σ_k とし、b_k を

$$\frac{g_k(b_k)}{b_k} = \inf_{0<z<\sigma_k} \frac{g_k(z)}{z}$$

により定義する。また $d_k = d(\Pi^{(k)})$ とする。

Theorem 2. $\mathcal{Y}_k$ の分布は $\Pi^{(k)}$ を offspring distribution とする Galton-Watson tree の頂点総数の分布に等しい。特に

$$\limsup_{n\to\infty} P(\mathcal{Y}_k = n)^{1/n} = \frac{g_k(b_k)}{b_k} .$$

また $0 < b_k < \sigma_k$ であれば $P(\mathcal{Y}_k = n)$ は $n \to \infty$ において Theorem 1 と同様の漸近展開をもつ。

注. Π が critical の場合、および Π の support が有限で、$f(z) = g_k(z)$ となってしまう場合をのぞいて $g_k(b_k)/b_k < f(a)/a$ である。また $k \to \infty$ とするとき $g_k(b_k)/b_k \uparrow f(a)/a$.

2 Z, Y_k の結合分布

Otter は Z と Y_k の結合分布について次の結果を得ている：

Theorem 3.(Otter 1949) 条件 A を仮定する。$n \to \infty$ ($n \equiv 1 \bmod d$) とするとき

$$P\left(\frac{Y_k}{n} \in \bullet \mid Z = n\right) \longrightarrow \delta_{\alpha_k}(\bullet) \quad \alpha_k = \frac{p_k a^k}{f(a)} .$$

この結果は大数の弱法則と考えられる。これに対応する中心極限定理も成り立つ：

Theorem 4. 同じ条件の下で、任に意の $K \geq 0$ に対して

$$P\left(\left\{\sqrt{n}\left(\frac{Y_k}{n} - \alpha_k\right)\right\}_{k=0}^{K} \in \bullet \mid Z = n\right) \longrightarrow N(0, V^K) .$$

ただし $V^K = \{V_{ij}\}_{i,j\geq 0}^{K}$ で、

$$\sum_{i,j\geq 0} V_{ij} t_i t_j$$

$$= \frac{1}{f(a)} \sum_{k\geq 0} p_k t_k^2 - \frac{1}{f(a) f''(a)} \left\{\sum_{k\geq 2} (k-1) p_k t_k a^{k-1} - p_0 t_0\right\}^2 - \frac{1}{f(a)^2} \left(\sum_{k\geq 0} p_k t_k a^k\right)^2 .$$

この定理の特別な場合として Mahmoud (1995) の結果が得られる。

文献

R. Otter: The multiplicative process. Ann. Math. Stat. vol.20, 206–224 (1949)

J. Neveu: Arbres et processus de Galton-Watson. Ann. Inst. Henri Poincaré, vol.22, no.2, 199–207 (1986)

H.M. Mahmoud: The joint distribution of the three types of nodes in uniform binary trees. Algorithmica Vol. 13, 313–323 (1995)

研究集会「エルゴード理論の展望」

本研究集会は，濱地 敏弘 (九州大学)・仲田 均 (慶応義塾大学)・森 真 (日本大学)・盛田 健彦 (広島大学) が世話人となって，日本大学文理学部百周年記念館国際会議場において，2002 年 12 月 18 日 (水)〜12 月 21 日 (土) の日程で開催された．講演は広くエルゴード理論，力学系，確率論と関連した様々な分野に渡り，有意義な討論，情報交換が行われた．以下に，そのプログラムと，講演アブストラクトを付けておく．

プログラム

12 月 18 日（水）

13:30–14:20 森 真（日本大学）
1 次元写像から作られる樹の次元について

14:40–15:30 石谷 寛（三重大学）
実軸上の変換 $ax-(1/x)$ $(0<a<1)$ の transfer 作用素について

15:50–16:40 湯浅 久利（慶応義塾大学）
Hopf-equivalences and recurrence properties for dynamical systems

12 月 19 日（木）

9:30–10:20 井上 心（九州大学）
Renewal sequences and multiple recurrence of II_∞-Markov shifts

10:40–11:30 Frank den Hollander（Eurandom）
Ergodic properties of the T-T^{-1}-process

13:-30–14:20 由利 美智子（札幌大学）
Weak Gibbs measures for Intermittent systems and weakly Gibbsian state in statistical mechanics

14:40–15:30 夏井 利恵（慶応義塾大学）
On the isomorphism problem of α-Farey maps

15:50–16:40 辻井 正人（北海道大学）
曲面上の部分双曲的写像のエルゴード的性質

12 月 20 日（金）

9:30–10:20　石井 豊（九州大学）
A lap number formula in higher dimensions and rigorous entropy estimates for Lozi maps

10:40–11:30　伊藤 俊次（金沢大学），鈴木秀幸（東京大学）
放電現象と 2 重 Weyl 変換

13:30–14:20　釜江 哲朗（大阪市立大学）
Maximal pattern complexity as topological invariant

14:40–15:30　Xue Yu-Mei （大阪市立大学）
Maximal pattern complexity as topological invariant (2)

15:50–16:40　Kyewon Koh Park（Ajou 大学）
Properties of general group actions via orbit equivalences

17:00–　S. C.

12 月 21 日（土）

9:-30–10:20　井上 賀絵（慶応義塾大学）
The metrical theory of non-archimedean diophantine approximations

10:40–11:30　中石健太郎（東京大学）
Exponentially strong convergence of non-classical multidimensional continued fraction algorithms

11:50–　S. C.

Hausdorff Dimension of Trees generated by piecewise linear transformations

Makoto Mori
Department of Mathematics,
College of Humanities and Sciences, Nihon University

Dec. 21, 2002

1 Introduction

Let $I = [0, 1]$ be a finite union of disjoint intervals, and we consider a piecewise linear, expansive and topologically transitive transformation $F : I \to I$, that is, there exists a finite set $\mathcal{A}$, an interval $\langle a \rangle$ corresponds for each $a \in \mathcal{A}$ and

1. $\{\langle a \rangle\}_{a \in \mathcal{A}}$ is a partition of I,
2. $(F|_{\langle a \rangle})'$ is constant. We denote
$$\eta_a = |F|_{\langle a \rangle})'|^{-1},$$
$$\operatorname{sgn} a = \begin{cases} + & F'(x) > 0 \text{ for } x \in \langle a \rangle, \\ - & F'(x) < 0 \text{ for } x \in \langle a \rangle. \end{cases}$$
3. F is expanding:
$$\xi = \liminf_{n \to \infty} \frac{1}{n} \operatorname*{ess\,inf}_{x \in I} \log |F^{n\prime}(x)| > 0.$$
4. F is topologically transitive.

We call a finite sequence $w = a_1 \cdots a_n$ a word ($a_i \in \mathcal{A}$). For a word $w = a_1 \cdots a_n$, we define

1. $|w| = n$ (the length of a word w),

2. $\langle w \rangle = \cap_{i=0}^{n-1} F^{-i}(\langle a_{i+1} \rangle)$,

3. $\operatorname{sgn} w = \prod_{i=1}^{n} \operatorname{sgn} a_i \quad (w = a_1 \cdots a_n)$,

4. $\eta_w = \prod_{i=1}^{n} \eta_{a_i}$.

We call a word w admissible if $\langle w \rangle \neq \emptyset$. For convenience, we consider an empty word $\emptyset$ for which we define $|\emptyset| = 0$ and $\langle \emptyset \rangle = I$. We denote by $\mathcal{W}_n$ the set of all the admissible words with length n, and $\mathcal{W} = \cup_{n=0}^{\infty} \mathcal{W}_n$.

We fix $0 < r < 1$, and put $R = re^{\xi}$. Now we construct a tree from words. We start from a branch $(\emptyset)$ corresponding to the empty word with its one end point at the origin, and the length of this branch equals $|I|$, where $|J|$ stands for the Lebesgue measure of a set J. From the other end point of $(\emptyset)$ branches (a) corresponding to words $a \in \mathcal{A}$ with length 1 connect. Then the other endpoints of each (a) branches (ab) $(b \in \mathcal{A})$ connect and so on. Namely for each $w = a_1 \cdots a_n$,

1. (w) is a segment with length $R^{|w|}|\langle w \rangle|$,

2. one endpoint connects to $(a_1 \cdots a_{n-1})$,

3. the other endpoint connects to $(a_1 \cdots a_n b)$ ($b \in \mathcal{A}$ and $a_1 \cdots a_n b \in \mathcal{W}$).

Definition 1 *1. We call the closure of $T^o = \cup_{w \in \mathcal{W}}(w)$ a tree and denote it by T.*

2. Let $((w)) = \overline{\cup_{\langle u \rangle \subset \langle w \rangle}(u)}$, and call it a branch starting from w, where $\overline{J}$ stands for the closure of a set J.

3. We call $T \backslash T^o$ the flowers of T. Each point x in the flowers corresponds to a point in I.

We need an assumption that the branches of a tree do not intersect and spread.

Assumption 1 *Words $u, v \in \mathcal{W}$ $(|u| \leq |v|)$ intersects only when $u = a_1 \cdots a_n$ and $v = ua_{n+1}$ with some $a_i \in \mathcal{A}$ $(1 \leq i \leq n+1)$, and they only intersect with their end points. Moreover, there exists a constant $C_0 > 0$ such that for any word $w \in \mathcal{W}$ the diameter of $((w)) \cap (T \backslash T^o)$ is greater than $C_0|(w)|$.*

Theorem 1 *Let $F : I \to I$ be a piecewise linear, expanding and topologically transitive transformation. Then the Hausdorff dimension of this tree is the maximal solution of* $\det(I - \Phi(R^\alpha, \alpha)) = 0$*, where the definition of* $\Phi(z, \alpha)$ *is given afterwards.*

References

[1] P. Billingsley, *Ergodic Theory and Information*, John Wiley & Sons (1965).

[2] M. Mori, Fredholm determinant for piecewise monotonic transformations, *Osaka J. Math.* **29** (1992), 497–529.

[3] M. Mori, On the convergence of the spectrum of Perron–Frobenius operators, *Tokyo J. Math.* **17** (1994), 1–19.

[4] M. Mori, Dynamical system on Cantor set, *Tokyo J. Math.* **21** (1998), 217–231.

[5] M. Mori, Cantor sets generated by piecewise linear map, *Proceedings of the Institute of Natural Sciences, Nihon University,* **35** (2000), 145-171.

[6] M. Mori, Hausdorff dimension as Thermodynamical Formalism, preprint.

実軸上の変換　$ax-(1/x)$　$(0<a<1)$　のTransfer作用素について

三重大学教育学部　石谷　寛

実数係数の２次の有理変換　$(ax^2+bx+c)/(x+d)$　を実軸上の変換と見なすとき、ある実 affine 変換によって、$ax+(1/x)+\beta$, または $ax-(1/x)+\beta$ と同型である。ここでは　$R(x):=ax-(1/x)$　$(0<a<1)$　の不変確率測度とそれに関するTransfer作用素の性質を詳しく調べ、R の ergodic properties、また極限定理について議論する。R の導関数が $a+(1/x^2)$ であることに注意すれば、みかけの上では R は拡大的ではないことに注意しよう。
まず不変測度については次のことがわかる。

命題１．$g(x):=c/\left(x^2+\{1/(1-a)\}\right)$，ここで $c:=1/(\pi\sqrt{1-a})$、は R の絶対連続な確率不変測度の密度関数である。

これは、$g(x)$が (R,dx) に対応するTransfer作用素 $\mathcal{L}$ の固定点であることは計算ですぐに確かめられるが、$\mathcal{Im}(1/(x-\omega))$ の定数倍ともなっている。ここで ω は R を複素平面に拡張したときの固定点で $i/(\sqrt{1-a})$ である。このような性質はもう少し広い変換に対しても成立する。
実軸から $(0,1)$ への変換 φ を $|\varphi'(x)|=g(x)$ を満たすように

$$\varphi(x):=(1/2)-\mathrm{Tan}^{-1}(x\sqrt{1-a})$$

と定め、R を $(0,1)$ 上の変換 $\tilde{R}(y):=\varphi(R(\varphi^{-1}y))$ に変換すると、

$$\tilde{R}(y)=(1/2)-(1/\pi)\mathrm{Tan}^{-1}\left(a\cdot\tan\{\pi((1/2)-y)\}-(1-a)/\tan\{\pi((1/2)-y)\}\right)$$

となり、初等的な計算により次の性質を持つことがわかる。

命題２．$\tilde{R}$ はルベーグ測度を保ち、各々の区間 $(0,1/2)$, $(1/2,1)$ を $(0,1)$ の上に写し、各小区間の上で、狭義単調増大で、導関数の絶対値 $|\tilde{R}'(y)|$ は

$$|\tilde{R}'(y)|\geq 1+\min\left(1+(a/(1-a)),1+((1-a)/a)\right)>1$$

を満たす。

この命題を用いて $(\tilde{R},dy)$ に対応するTransfer作用素 $\tilde{\mathcal{L}}$ に対しては、有界区間上の区分的一様拡大変換に対するよく知られた議論を適用して、次の性質が得られる。

命題３．f を区間 $[0,1]$ 上の有界変動関数とし、$\mathrm{v}(f)$ をその本質的全動量とし、ノルム $\|f\|_{[0,1]}:=\mathrm{v}(f)+\|f\|_{L^1(dy)}$ と定義すると、有界変動関数全体は、ノ

ルム $\|f\|_{[0,1]}$ により、$\tilde{\mathscr{L}}$- 不変な Banach 空間となる。また、このBanach空間上の作用素 Ψ と $0<\rho<1$ が存在して、Ψ のスペクトル半径が ρ で、すべての正の整数 n に対し、分解

$$(\tilde{\mathscr{L}}^n f)(y) = \int_0^1 f(x)dx + (\Psi^n f)(y)$$

が成立する。

一方で、$(-\infty,\infty)$ 上の R の確率不変測度 $\mu:=gdx$ に対応するTransfer作用素 $\mathscr{L}_\mu f=(1/g)\mathscr{L}(fg)$ と $\tilde{\mathscr{L}}$ とには次のような関係が成立する。

命題４．$f\in L^1((-\infty,\infty),\mu)$ に対して

$$(\mathscr{L}_\mu f)(x)=(\tilde{\mathscr{L}}(f\circ\varphi))(\varphi^{-1}x) \qquad (\mu\text{-a.e.})$$

が成立する。

写像 $\varphi(x)$ が狭義単調であり、よって φ により $(-\infty,\infty)$ での有界変動関数は $[0,1]$ の有界変動関数に写される。この関係を用いて、命題３と命題４より、$\mathscr{L}_\mu$ のスペクトル構造が得られる。

命題５．f を $(-\infty,\infty)$ 上の有界変動関数とし、$V(f)$ をその本質的全動量とし、ノルムを $\|f\|:=V(f)+\|f\|_{L^1(\mu)}$ と定義すると、有界変動関数全体は、ノルム $\|f\|$ により、$\mathscr{L}_\mu$-不変な Banach 空間となる。また、このBanach空間上の作用素 Ψ と $0<\rho<1$ が存在して、Ψ のスペクトル半径が ρ で、すべての正の整数 n に対し、分解

$$(\mathscr{L}^n f)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx + (\Psi^n f)(x)$$

が成立する。

Hopf-equivalences and recurrence properties for dynamical systems

湯浅 久利
慶應義塾大学大学院理工学研究科
基礎理工学専攻
後期博士課程 3 年

私の話では, ひとつの変換から成る力学系における Hopf-同値と呼ばれる概念に関する話題を提供した. E. Hopf [2] は, 非原子的ルベーグ空間上の非特異両可測変換に対し, 可算 Hopf-同値や有限 Hopf-同値の概念を, 同値有限不変測度の存在や, 変換の再帰性で特徴付けた.

位相力学系における, Hopf-同値についての最初の結果は, T. Giordano-I. Putnam-C. Skau [1] によるもので次のように述べられる. φ をカントル集合 X 上の極小な同相写像, つまり, φ のすべての軌道が X で稠密である同相写像であるとする. X の開かつ閉な部分集合 A, B に対し, 次の条件 (a), (b) は同値になる: (a) A と B は有限 Hopf-同値である; (b) $\chi_A - \chi_B = f \circ \varphi - f$ なる連続関数 $f : X \to \mathbb{Z}$ が存在する. ここで, χ_A は, 集合 A の定義関数を表す. A, B それぞれの閉集合への有限分割 $\{A_i\}_{i=1}^k$, $\{B_i\}_{i=1}^k$ と整数 $\{n_i\}_{i=1}^k$ が存在して, $T^{n_i}(A_i) = B_i$ $1 \leq \forall i \leq k$ が成立するとき, A と B は有限 Hopf-同値であるという. A, B の分割が可算無限分割であるとき, A と B は可算 Hopf-同値であるという. (a), (b) の同値性を得る際に, 次の条件が必要条件として得られる: (c) 任意の $x \in A \cup B$ に対し, ある整数 $n \geq 1$ が存在して, $\sum_{i=0}^{n-1} \chi_A(\varphi^i x) = \sum_{i=0}^{n-1} \chi_B(\varphi^j x)$ が成立する.

以下, [3] において得られた, 前段落の事実に関係する結果を述べる. φ をカントル集合 X 上の同相写像とする. 可測力学系の場合 [2] と同様に, X の点がすべて鎖再帰的であることは, X の開かつ閉な部分集合 A で, A の真部分集合と有限 Hopf-同値になる A は存在しないことで特徴付けられることを明らかにした. また, X の任意の点が φ に対し鎖再帰的ならば, (c)⇒(a) が成立することも証明した. このような φ の付加的条件をいっさい仮定しないときには, (c) が成り立つならば A と B は可算 Hopf-同値になることも示した. さらには, (b)⇒(c) が成り立つことと, X の点がすべて φ に対し正再帰的になることも証明し, 以上の結果の系として, (a), (b), (c) がすべて同値になることと, X の点がすべて φ に対し正再帰的になることが証明された. 点 $x \in X$ が φ に対し正再帰的であるとは, $x \in \overline{\{\varphi^n(x); n \geq 1\}}$ が成り立つことをいう.

参考文献

[1] T. Giordano, I. F. Putnam, and C. F. Skau, *Full groups of Cantor minimal systems*, Israel Journal of Math. **111** (1999), 285-320.

[2] E. Hopf, *Theory of measure and invariant integrals*, Trans. Amer. Math. Soc. **34** (1932), no. 2, 373-393.

[3] H. Yuasa *Hopf-equivalences for zero-dimensional dynamical systems*, Japan. J. Math. (N.S.) **28** (2002), no. 2, 299-312.

Renewal sequences and multiple recurrence of II_∞-Markov shifts

井上　心　(九州大学大学院数理学府博士課程3年)

2002年12月19日

保測変換 $(X, \mathcal{B}, \mu, T)$ が、任意の自然数 d と任意の可測集合 $A \in \mathcal{B}$, $\mu(A) > 0$ に対して $\mu(A \cap T^{-k}A \cap T^{-2k}A \cap \cdots \cap T^{-dk}A) > 0$ となる自然数 k を見つけることが出来るとき保測変換は多重再帰的であるという。「$\mu(X) < \infty$ ならば、$\mathbf{X}$ は多重再帰的である」はフルステンバーグ (Prinston Universsity Press,1981) の良く知られた結果である。一方 $\mu(X) = \infty$ については、アイゲンーハジアンーハルバーソン (Israel J. Math.108,1998) やアーロンソンー仲田 (Israel J. Math.177,2000) により多重再帰的ではない保測変換の例が挙げられ、更にアーロンソンー仲田 (Israel J. Math.177,2000) に於いては、マルコフ変換の多重再帰性の判定条件を示している。

実数列 $\mathbf{u} = \{u_n\}_{n\geq 0}$, $u_0 = 1$, $u_n \geq 0$ が、ある数列 (生存時間数列と呼ぶ) $\{f_n\}_{n\geq 1}$, $f_n \geq 0$ に対して再生方程式 $u_n = \sum_{k=1}^{\infty} u_k f_{n-k}$, $n \geq 1$ をみたすとき $\mathbf{u}$ を再生数列という。再帰事象を持つ保測変換は再生数列を与えることが知られているが、逆に、チュン (Springer, Berlin,1960) により任意の再生数列から $\mathbf{N}^{\mathbf{Z}}$ 上のマルコフ変換を構成する方法も知られている。ここでは、多重再帰的なマルコフ変換を構成する再生数列を取り上げる。即ち、次の4条件をみたす再生数列を考える：

(i) $\sum_{n=1}^{\infty} n f_n = \infty$. ($\Leftrightarrow u_n \to 0$ as $n \to \infty$)

(ii) $f_n > 0$ for infinitely many $n \geq 1$.

(iii) $\sum_{n=1}^{\infty} u_n = \infty$.

(iv) $\forall d \in \mathbf{N}$, $\sum_{n=1}^{\infty} u_n^d = \infty$.

条件 (i),(ii),(iii) は各々、対応するマルコフ変換が無限大測度、再帰性、エルゴード性を持つための条件である。アーロンソンー仲田の結果により、条件 (i)-(iv) は対応するマルコフ変換が多重再帰的になることを意味しており、このような再生数列を多重再帰的再生数列と呼ぶ。

そこで、条件 (iv) を示すための u_n の収束のオーダーをどのように求めるかが課題となる。ジリス (Quart.J.Math.Oxford(2)7,1956) は原点から出発するある1次元ランダム・ウォークの例で、n 時刻に原点に戻ってくる確率 u_n の収束オーダーを求めている。彼は u_n の収束のオーダーが u_n のセザロ和の定数倍に等しいとき、u_n は n のある多項式で下から評価出来る事を示した。これを用いるとジリスの例が条件 (iv) をみたす事が容易に分かる。この例に於いてポイントとなっているのが、再生方程式とは異なる u_n の方程式である。そこで一般の再生数列に対しても、この方程式に対応する次の方程式を導くことが出来る:

$$(*) \quad u_n = \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} u_i \sum_{j=0}^{n-i-1} (n-i-j) f_{n-i-j} u_j, \quad n \geq 1.$$

これは再生方程式とは異なるが、再生方程式と同値な方程式であり、あるクラスの再生数列に対しては収束オーダーを導く有効な方程式である。そのような例として次のような再生数列が挙げられる:

$$a_0 = 1,\ a_n = 1 - \frac{1}{c}\sum_{k=0}^{n-1} \frac{a_k}{n-k},\ n \geq 1.$$

実際 $(*)$ を用いることにより、

$$a_n = \frac{1}{n}\{\sum_{i=0}^{n-1} a_i - \frac{1}{c}\sum_{i=0}^{n-1} a_i a_{n-i-1}\}, \quad n \geq 1$$

が得られ、これより

$$a_n \sim \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} a_i \ \text{ as } n \to \infty$$

がとなることが分かる。更にジリスの結果を適用すると、任意の自然数 d に対して

$$Kn^{-\frac{1}{d}} \leq a_n$$

が、ある定数 $K > 0$ と十分大きな n について成り立つことが得られる。従って、再生数列 $\{a_n\}$ は条件 (iv) をみたすことが示される。

現段階では収束オーダーを求め得る再生数列の例を得たにすぎないが、より広いクラスの再生数列に対して収束のオーダーを求める方法を得ることが今後の課題である。

WEAK GIBBS MEASURES FOR INTERMITTENT SYSTEMS AND WEAKLY GIBBSIAN STATES IN STATISTICAL MECHANICS

MICHIKO YURI

ABSTRACT

In recent papers [20,21,24-26], Thermodynamic formalism was developed for nonhyperbolic systems with subexponential instability exihibiting *Intermittency.* Such nonhyperbolic systems typically admit periodic orbits causing phase transitions and possess absolutely continuous equilibrium states (with respect to physical reference measures) which fail to hold Bowen's Gibbs property ([1]) but satisfy *the weak Gibbs property* introduced in [19] (c.f.[20,21,25]). In this work, we shall clarify how the weak Gibbs property relates to the weakly Gibbsian frame work in statistical mechanics, that is, the main purpose of this talk is to show that the weak Gibbs equilibrium states are *weakly Gibbsian states* in the sense of Dobrushin in [4-5] (i.e., satisfy (WG-2)-property) and in the sense of Maes-Redig-Takens-Moffaert-Verbitski in [10] (i.e., satisfy (WG-1)-property). Furthermore we show that a local skew product transformation related to a Diophantine approximation problem in inhomogeneous linear class admits a weak Gibbs equilibrium state absolutely continuous with respect to the normalized Lebesgue measure which satisfies both (WG-1,2) properties and admits an essential discontinuity in its conditional probabilities.

REFERENCES

1. R. Bowen, *Equilibrium states and the ergodic Theory of Anosov diffeomorphisms*, Springer Lecture Notes in Mathematics 470, Springer, 1975.
2. D.Capocaccia, *A definition of Gibbs state for a compact set with $\mathbb{Z}^\nu$-action.*, Commum Math.Phys **48** (1976), 85-88.
3. M. Denker and M. Yuri, *A note on the construction of nonsingular Gibbs measures*, Colloquium Mathematicum **84/85** (2000), 377-383.
4. R.L.Dobrushin, *A Gibbsian representation for non-Gibbsian fields*, Workshop on Probability and Physics (Renkum, September 1995).
5. R.L.Dobrushin and S.B.Shlosman, *Gibbsian description for non-Gibbsian fields*, Russian Math. Surveys **52** (1997), 285-297.

1991 *Mathematics Subject Classification.* 28D99, 28D20, 58F11, 58F03, 37A40, 37A30, 37C30, 37D35, 37F10, 37A45.

Typeset by $\mathcal{A}\mathcal{M}\mathcal{S}$-TEX

6. A.C.D.van.Enter, R.Fernandez and A.D.Sokal, *Regularity properties and pathologies of position-space renormalization transformations : scope and limitations of Gibbsian theory*, J. Stat. Phys. **72** (1993), 879-1167.
7. G.Keller, *Equilibrium states in Ergodic Theorey*, Cambridge Univ Press, 1998.
8. O.K.Kozlov, *Gibbs description of a system of random variables*, Probab.Inf.Transm **10** (1974), 258-265.
9. C.Maes, F.Redig, S.Shlosman and A.Van. Moffaert, *Percolation, Path Large Deviations and weakly Gibbs States*, Commun.Math.Phys. **208** (2000), 517-545.
10. C.Maes, F.Redig, F.Takens, A.Van. Moffaert and E.Verbitski, *Intermittency and weak Gibbs states*, Nonlinearity **13** (2000), 1681-1698.
11. C.Maes, F.Redig and A.Van. Moffaert, *Almost Gibbsian versus Weakly Gibbsian measures.*, Preprint.
12. D.Ruelle, *Thermodynamic formalism. Encyclopedia of Mathematics and its applications* **5**, Addison-Wesley, 1978.
13. D.Ruelle, *Thermodynamic formalism for maps satisfying positive expansiveness and specification*, Nonlinearity **5** (1992), 1223-1236.
14. F. Schweiger, *Ergodic theory and fibred systems and metric number theory*, O.U.P., Oxford, 1995.
15. Y.G.Sinai, *Gibbs measures in ergodic theory*, Russ.Math.Surv. **27** (1972), 21-70.
16. P. Walters, *Invariant measures and equilibrium states for some mappings which expand distances*, Trans. Amer. Math. Soc. **236** (1978), 121-153.
17. M. Yuri, *On a Bernoulli property for multi-dimensional mappings with finite range structure*, Tokyo J. Math **9** (1986), 457-485.
18. M. Yuri, *On the convergence to equilibrium states for certain nonhyperbolic systems*, Ergodic Theory and Dyn. Syst. **17** (1997), 977-1000.
19. M. Yuri, *Zeta functions for certain nonhyperbolic systems and topological Markov approximations*, Ergodic Theory and Dyn. Syst. **18** (1998), 1589-1612.
20. M. Yuri, *Thermodynamic formalism for certain nonhyperbolic maps*, Ergodic Theory and Dyn. Syst. **19** (1999), 1365-1378.
21. M. Yuri, *Weak Gibbs measures for certain nonhyperbolic systems*, Ergodic Theory and Dyn. Syst. **20** (2000), 1495-1518.
22. M. Yuri, *On the speed of convergence to equilibrium states for multi-dimensional maps with indifferent periodic points*, Nonlinearity **15** (2002), 429-445.
23. M. Yuri, *Weak Gibbs measures and the local product structure*, Ergodic Theory and Dyn. Syst. **22(6)** (2002), 1933-1955.
24. M. Yuri, *Thermodynamic Formalism for countable to one Markov systems*, To appear.
25. M. Yuri, *Multifractal analysis of weak Gibbs measures for intermittent systems*, Commun.Math.Phys **230(2)** (2002), 365-388.
26. M. Yuri, *Phase transition, Non-Gibbsianess and Subexponential Instability*, Preprint.

YURI: DEPARTMENT OF BUSINESS ADMINISTRATION, SAPPORO UNIVERSITY, NISHIOKA, TOYOHIRA-KU, SAPPORO 062, JAPAN.

E-mail address: yuri@math.sci.hokudai.ac.jp, yuri@mail-ext.sapporo-u.ac.jp

On the isomorphism problem of α-Farey maps

夏井 利恵 (慶應義塾大学)

エントロピーが等しい任意の2つの Bernoulli automorphism が互いに同型になることはよく知られている．しかし，Bernoulli endomorphism の場合には, たとえエントロピーが等しくとも同型になるとは必ずしも限らない．ここでは，無限大不変測度をもつ non-invertible で ergodic な1次元写像の 1-parameter family で，どの2つも互いに同型ではないが，その automorphism としての拡大はすべて同型になる例について紹介する．

$\frac{1}{2} \leq \alpha \leq 1$ に対して, 区間 $\mathcal{J}_\alpha = [\alpha - 1, 1]$ とおく．写像 $F_\alpha : \mathcal{J}_\alpha \to \mathcal{J}_\alpha$ を

$$F_\alpha(x) = \begin{cases} -\frac{x}{1+x} & \text{if} \quad x \in [\alpha - 1, 0) \\ \frac{x}{1-x} & \text{if} \quad x \in [0, \frac{1}{2}) \\ \frac{1-2x}{x} & \text{if} \quad x \in [\frac{1}{2}, \frac{1}{1+\alpha}] \\ \frac{1-x}{x} & \text{if} \quad x \in (\frac{1}{1+\alpha}, 1]. \end{cases}$$

と定義し，α-Farey map とよぶ．F_α は，α-連分数展開の中間近似を導く写像として特徴づけられる．F_α にはエルゴード的で σ-有限な絶対連続無限大不変測度が存在する．このとき，F_α の natural extension $\widehat{F_\alpha}$ が2次元領域で定義される (絶対連続な不変測度をもつ)．そして，F_α と $\widehat{F_\alpha}$ の同型問題に関して次の定理が成立する．

定理 .
(i) $\widehat{F_\alpha}$, $\frac{1}{2} \leq \alpha \leq 1$, はすべて同型である．
(ii) F_α, $\frac{1}{2} \leq \alpha \leq 1$, はどの2つも互いに同型でない．

PHYSICAL MEASURES FOR PARTIALLY HYPERBOLIC SURFACE ENDOMORPHISMS

MASATO TSUJII

In the study of smooth dynamical systems from the standpoint of ergodic theory, one of the most fundamental questions is whether the following preferable picture is true for almost all of them: The asymptotic distribution of the orbit for Lebesgue almost every initial point exists and coincides with one of the finitely many ergodic invariant measures that are given for the dynamical system. The answer is expected to be affirmative in genera. However it seems far beyond the scope of researches at present to answer the question in the general setting. We aim to provide an affirmative answer to the question in the case of partially hyperbolic surface endomorphisms with one-dimensional strongly unstable subbundle.

Let M be the torus $\mathbb{T} = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ or, more generally, a region on the torus whose boundary consists of finitely many C^2curves, such as an annulus $(\mathbb{R}/\mathbb{Z})\times[-1/3, 1/3]$. We consider the standard Riemannian metric $\|\cdot\|$ and the Lebesgue measure $\mathbf{m}$ on M which are inherited from $\mathbb{R}^2$. In this paper, we call a C^1mapping $F : M \to M$ a *partially hyperbolic endomorphism* if there are positive constants λ and c and a continuous decomposition of the tangent bundle $TM = \mathbf{E}^c \oplus \mathbf{E}^u$ with $\dim \mathbf{E}^c = \dim \mathbf{E}^u = 1$ such that, for all $z \in M$ and $n \geq 0$,

1. $\|DF^n|_{\mathbf{E}^u(z)}\| > \exp(\lambda n - c)$ and
2. $\|DF^n|_{\mathbf{E}^c(z)}\| < \exp(-\lambda n + c)\|DF^n|_{\mathbf{E}^u(z)}\|$.

The subbundles $\mathbf{E}^c$ and $\mathbf{E}^u$ are called the central and strongly unstable subbundle respectively. Notice that we do not assume these subbundles to be invariant in the definition above. The partially hyperbolic C^rendomorphisms form an open subset in the space $C^r(M, M)$ of C^rmappings from M to itself.

A *physical measure* for a mapping $F : M \to M$ is an F-invariant probability measure whose basin of attraction

$$\mathcal{B}(\mu) = \mathcal{B}(\mu; F) := \left\{ z \in M \;\middle|\; \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} \delta_{F^i(z)} \to \mu \text{ weakly as } n \to \infty \right\},$$

has positive Lebesgue measure. The main results in this talk is

Theorem A partially hyperbolic C^rendomorphism on M generically admits finitely many ergodic physical measures whose union of basins of attraction has total Lebesgue measure, provided that $r \geq 19$.

DEPARTMENT OF MATHEMATICS, HOKKAIDO UNIVERSITY

A lap number formula in higher dimensions and rigorous entropy estimates for Lozi maps

Yutaka Ishii
Kyushu University

In this joint work with D. Sands (Université de Paris–Sud, Orsay) we present a formula to calculate the topological entropy of piecewise affine maps of $\mathbb{R}^d$ $(d \geq 2)$ in terms of their combinatorial data. We apply this formula to estimate the entropy of the *Lozi map*:

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{a,b} : (x, y) \mapsto (1 - a|x| + by, x)$$

with rigorous error bounds.

We start with a well-known fact in dimension one to motivate our results. Let f be a piecewise monotone map of the interval or of the circle, and $l_n(f)$ be the *lap number*, i.e. the number of monotone branches of the n'th iterate f^n. Misiurewicz and Szlenk have shown that the topological entropy $h_{\mathrm{top}}(f)$ of f is given by the lap number formula: $h_{\mathrm{top}}(f) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log l_n(f)$. We show analogous formulae for piecewise projective maps and piecewise affine maps in higher dimensions.

Let $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ be a continuous map $(d \geq 2)$. An *affine subdivision* of f is a finite collection $\mathcal{U} = \{U_1, \ldots, U_N\}$ of pairwise disjoint non-empty open subsets of $\mathbb{R}^d$ such that (a) their union $U_1 \cup \ldots \cup U_N$ is dense in $\mathbb{R}^d$, and (b) $f|_{U_i} = A_i|_{U_i}$ for each $i = 1, \ldots, N$, where $A_i : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ is an invertible affine map. A *piecewise affine map* is a continuous map $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ for which there exists an affine subdivision. In dimension two, we say an affine subdivision $\mathcal{U} = \{U_1, \ldots, U_N\}$ is *regular* if its boundary $\partial\mathcal{U} \equiv \bigcup_{i=1}^N \partial U_i$ consists of a finite union of line segments.

Let $\widehat{\mathbb{R}^d}$ be the compactification of $\mathbb{R}^d$ obtained by adjoining the $(d-1)$-sphere at infinity. It can be shown that every piecewise affine map $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ has a unique continuous extension $\widehat{f} : \widehat{\mathbb{R}^d} \to \widehat{\mathbb{R}^d}$. Given f and $\mathcal{U}$, let us write $\mathcal{U}_n = \mathcal{U} \vee f^{-1}\mathcal{U} \vee \cdots \vee f^{-(n-1)}\mathcal{U}$.

Theorem A. *Let $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ be a piecewise affine homeomorphism of the plane. Let $\mathcal{U}$ be a regular affine subdivision of f. Then*

$$h_{\mathrm{top}}(\widehat{f}) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \#\mathcal{U}_n.$$

In higher dimensions and for non-invertible maps we only have an inequality:

Theorem B. *Let $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ be a piecewise affine map of $\mathbb{R}^d$ $(d \geq 2)$. Let $\mathcal{U}$ be any affine subdivision of f. Then*

$$h_{\mathrm{top}}(\widehat{f}) \leq \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \#\mathcal{U}_n.$$

We use this formula to get rigorous bounds for entropy of Lozi maps. For more information on our computation, please visit the webpage of D. Sands:

`http://topo.math.u-psud.fr/~sands/Programs/Lozi/index.html`

in which bounds for several parameter choices are presented and the global behavior of the function $(a, b) \mapsto h_{\mathrm{top}}(\mathcal{L}_{a,b})$ on the parameter plane of the Lozi family is visualized.

References

[L] Lozi R. *Un attracteur étrange(?) du type attracteur de Hénon.* J. Phys. (Paris) **39** (Coll. C5), pp. 9-10 (1978).

[MS] Misiurewicz M., Szlenk W.: *Entropy of piecewise monotone mappings.* Studia Math. **67** (1980), 45–63.

Partial discharges and double rotations

鈴木秀幸（東京大学）　　伊藤俊次（金沢大学）

パラメータ $(\alpha,\beta,c)\in[0,1)\times[0,1)\times[0,1]$ に対し, double rotation $f_{(\alpha,\beta,c)}\colon[0,1)\to[0,1)$ を

$$f_{(\alpha,\beta,c)}(x)=\begin{cases}\{x+\alpha\} & \text{if } x\in[0,c),\\ \{x+\beta\} & \text{if } x\in[c,1).\end{cases}$$

と定義する。このパラメータ空間 $D=[0,1)\times[0,1)\times[0,1]$ に領域 $D_{e,j}$ と写像 $T_{e,j}\colon D_{e,j}\to D$ を

$$\begin{aligned}
D_{0,1}&=\{(\alpha,\beta,c)\in D\,|\,\alpha<\beta,\,c\le 1-\beta\}, & D_{1,1}&=\{(\alpha,\beta,c)\in D\,|\,\alpha>\beta,\,c\le\beta\},\\
D_{0,2}&=\{(\alpha,\beta,c)\in D\,|\,\alpha<\beta,\,1-\beta<c<1-\alpha\}, & D_{1,2}&=\{(\alpha,\beta,c)\in D\,|\,\alpha>\beta,\,\beta<c<\alpha\},\\
D_{0,3}&=\{(\alpha,\beta,c)\in D\,|\,\alpha<\beta,\,1-\alpha\le c\}, & D_{1,3}&=\{(\alpha,\beta,c)\in D\,|\,\alpha>\beta,\,\alpha\le c\},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
T_{(0,1)}(\alpha,\beta,c)&=\left(\left\{\frac{\alpha}{1-\beta}\right\},\left\{\frac{\beta}{1-\beta}\right\},\frac{c}{1-\beta}\right), & T_{(1,1)}(\alpha,\beta,c)&=\left(\left\{\frac{\alpha-1}{\beta}\right\},\left\{\frac{\beta-1}{\beta}\right\},\frac{c}{\beta}\right),\\
T_{(0,3)}(\alpha,\beta,c)&=\left(\left\{\frac{\alpha-1}{\alpha}\right\},\left\{\frac{\beta-1}{\alpha}\right\},\frac{c+\alpha-1}{\alpha}\right), & T_{(1,3)}(\alpha,\beta,c)&=\left(\left\{\frac{\alpha}{1-\alpha}\right\},\left\{\frac{\beta}{1-\alpha}\right\},\frac{c-\alpha}{1-\alpha}\right),
\end{aligned}$$

と定め, $(\alpha,\beta,c)\in D_{e,j}$ に対して, $j\in\{1,3\}$ ならば $T(\alpha,\beta,c)=T_{(e,j)}(\alpha,\beta,c)$ と定義する. また, $(\alpha,\beta,c)\in D_{e,j}$ に対して, $I_{(\alpha,\beta,c)}$ を以下のように定める:

$$I_{(\alpha,\beta,c)}=\begin{cases}[0,1-\beta) & \text{if } (\alpha,\beta,c)\in D_{0,1},\\ [c+\beta-1,c+\alpha) & \text{if } (\alpha,\beta,c)\in D_{0,2},\\ [1-\alpha,1) & \text{if } (\alpha,\beta,c)\in D_{0,3},\end{cases}\qquad \begin{cases}[0,c)\cup[c+1-\beta,1) & \text{if } (\alpha,\beta,c)\in D_{1,1},\\ [0,\beta)\cup[\alpha,1) & \text{if } (\alpha,\beta,c)\in D_{1,2},\\ [0,c-\alpha)\cup[c,1) & \text{if } (\alpha,\beta,c)\in D_{1,3}.\end{cases}$$

Proposition 1 $(\alpha,\beta,c)\in D_{e,j}$ とする. $j\in\{1,3\}$ のとき, *induced transformation* $f_{(\alpha,\beta,c)}|_{I_{(\alpha,\beta,c)}}$ は $f_{T(\alpha,\beta,c)}$ と同型である. $j=2$ のとき, $f_{(\alpha,\beta,c)}$ の $I_{(\alpha,\beta,c)}$ への制限は, $e=0$ ならば回転写像 $R_{\alpha/(1+\alpha-\beta)}$ と, $e=1$ ならば回転写像 $R_{\beta/(1-\alpha+\beta)}$ と, それぞれ同型である.

以下, α, β が $\mathbb{Q}$ 上一次独立であるように取る. このとき c のパラメータ空間 $[0,1]$ の部分集合 Γ を $\Gamma=\{c\in[0,1]\,|\,\forall i\in\mathbb{N},\,T^i(\alpha,\beta,c)\in D_{e,j},\,j\in\{1,3\}\}$ と定める.

Theorem 1 Γ は *Cantor* 集合で, その測度は 0 である.

$f_{(\alpha,\beta,c)}$ の放電数 (discharge number) を各初期値 $x\in[0,1)$ に対して以下のように定義する:

$$q_{(\alpha,\beta,c)}(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\chi_{[c,1)}(f^i_{(\alpha,\beta,c)}(x)).$$

Theorem 2 $c\notin\Gamma$ のとき, $q_{(\alpha,\beta,c)}(x)$ は *well-defined* であり, その値は x によらない定数である. また, c と c' が $[0,1]\setminus\Gamma$ の同じ連結成分に属するときは $q_{(\alpha,\beta,c)}(x)=q_{(\alpha,\beta,c')}(x)$ であり, 異なる連結成分に属するときは $c<c'$ ならば $q_{(\alpha,\beta,c)}(x)>q_{(\alpha,\beta,c')}(x)$ である.

Properties of general group actions via orbit equivalences

Alexandre I. Danilenko

Department of Mathematics, Kharkov National University, 4 Freedom sq., Kharkov, 61077, Ukraine

and

Kyewon Koh Park

Department of Mathematics, Ajou University, Suwon, 442-749, Korea

Using orbit equivalence and their cocyles, we prove several properties of amenable group actions directly deducing from their classical counterparts of Z-actions.

Thus our work is a natural continuation of Rudolph and Weiss who applies the orbit theory to prove that the amenable actions of completely positive entropy are uniformly mixing. The way the orbit theory was involved in their work comes from a crucial observation that the relative entropy of an amenable process is invariant under the factor orbit equivalence. Also we show that short and easy proofs are possible for some properties, bypassing the machinery of Ornstein and Weiss. In particular, we give the short proofs of relative and absolute Sinai-Kolmogorov and Krieger Theorems.

In the study of these properties, we discuss the definitions of mixing properties from ergodicity to Bernoullicity relative to a factor. We need these relative mixing properties to be invariant under orbit equivalences.

EXPONENTIALLY STRONG CONVERGENCE OF NON-CLASSICAL MULTIDIMENSIONAL CONTINUED FRACTION ALGORITHMS

KENTARO NAKAISHI
GRADUATE SCHOOL OF MATHEMATICAL SCIENCES
UNIVERSITY OF TOKYO

A multidimensional continued fraction algorithm is a procedure that produces a sequence of vectors $w_n = (p_n^1/q_n, \cdots, p_n^d/q_n)$ of rational approximation with a common denominator to a given target vector $\theta = (x_1, \cdots, x_d)$. To deserve the name of algorithm, it is desirable to satisfy a convergence property for all points (at least for most points): $\lim_{n\to\infty}|\theta - w_n| = 0$. If the decay of convergence is exponential, it is called *semi-weakly convergent.* In [1], V.Baladi and A.Nogueira introduced new multidimensional continued fraction algorithms. The novelty of their algorithms is in that they give a tree of algorithms: at each step of producing succesive vectors w_n of rational approximation, classical Markovian Continued Fraction algorithms, such as Jacobi-Perron algorithm, use the same strategy which depends only on 'the current state', while Baladi-Nogueira algorithms provide several choices. Which means that their tree of algorithms can include randomly chosen ones. They proved the semi-weak convergence for most paths and made conjectural suggestions on stronger results supported by their numerical calculations.

In this talk, we will show the almost everywhere exponentially strong convergence of Markovian random algorithms and dynamically defined ones in two dimesion. Our random algorithm will be based on the theory of Markov chain with uncountable states, for which we will follow Kifer's exposition [3]. The proof of the strong convergence is a concise application of the *random ergodic theorem* founded by Kakutani and later generalized by Ohno, Kifer and the others. Furhermore we show a random version of Lagarias's theorem, which relates the approximation exponents to the first and second Lyapunov exponets of the corresponding matrix cocycle. Exponentially strong convergence implies that the second Lyapunov exponent is strictly negative.

For higher dimensional MCF algorithms ($d \geq 3$), the conceptual proof of strong convergence is still missing(cf. a computer assisted proof of Hardcastle-Khanin [2]). If I have time, I would like to make a minor remark that our technique also works for a special three dimensional deterministic algorithm.

References

[1] Baladi,V.,Nogueira,A.:Lyapunov exponents for non-classical multidimensional continued fraction algorithms. Nonlinearity, 9,1996, 1529-1546.

[2] D.M.Hardcastle,K.Khanin, *On almost everywhere strong convergence of multidimensional continued fraction algorithms*, *Ergod. Th. & Dynam. Sys.* **20** (2000) 1711–1733.

[3] Kifer,Y.: Ergodic theory of random transformations. Progress in Probability and Statistics, 10. Birkhauser Boston, Inc., Boston, MA, 1986.

[4] Nakaishi,K.: Exponentially strong convergence of non-classical multidimensional continued fraction algorithms, to appear in Stochastics and Dynamics, issue4 vol.**2** (2002).

Date: December 21,2002.
This research is partially supported by JSPS Research Fellowships for Young Scientists.

研究集会「統計力学の中のランダムウォークとその周辺」

標記研究集会は2003年1月8日（水）〜1月10日（金）神戸大学滝川記念会館におき開催された。参加者総数は46名であった。3日間のプログラムは初日量子ランダムウォーク関連、第2日 Tracy-Widom 分布関連、第3日ランダムウォークに関連した臨界現象モデル関連の話題を中心として、ランダムウォーク自体の研究と併せて最近の研究成果が発表された。総じて、日本におけるランダムウォーク研究の最先端をまとめる感じの興味深い研究集会となった。特に、ランダム行列の固有値分布の極限として現れる Tracy-Widom 分布に関連する話題が、無限粒子系、Vicious walkers, M/M/1 Queue などの様々なところから現れてきているところが時代を反映していて面白いと感じられる。

プログラム

1月8日（水）

13:30–14:20 濱名裕治（東京工業大学）
On the range of pinned random walks

14:30–15:20 今野紀雄（横浜国立大学）
量子ランダムウォークの極限定理と吸収確率

15:30–16:00 小西克尚（姫路工業大学）
周期境界条件を課した量子ランダムウォーク

16:10–17:00 只木孝太郎（科学技術振興事業団 今井量子計算機構プロジェクト）
Upper bound by Kolmogorov complexity for the probability of each outcome in computable POVM measurement

1月9日（木）

9:30–10:20 種村秀紀（千葉大学）
Non-colliding Brownian Particles I : Finite Particle Systems

10:30–11:20 香取眞理（中央大学）
Non-colliding Brownian Particles II : Infinite Particle Systems

11:30–12:20 今村卓史（東京大学）
フックヤング図に基づく Vicious Walk の拡張

14:00–14:50 笹本智弘（東京工業大学）
Particle Position Fluctuation of the Totally ASEP and Charlier Ensemble

15:00–15:50 深井康成（九州大学）磯崎泰樹（大阪大学）
Random walk on a half-line

16:00–16:50 永幡幸生（東京工業大学）
Regularity of the diffusion coefficient matrix for the lattice gas with energy

17:10–18:00 ショート・コミュニケーション

１月１０日（金）

9:30–10:20 服部久美子（信州大学)

Displacement exponent of self-repelling walks on the pre-Sierpinski gasket and **Z**

10:30–11:20 Ben Hambly（University of Oxford)

Brownian directed percolation problems

11:30–12:20 行木孝夫（北海道大学)

On cellular automata traffic models

14:00–14:50 服部哲弥（名古屋大学)

４次元 hierarchical Ising model のくりこみ群解析と triviality

15:00–15:50 吉田伸生（京都大学)

A Brownian motion model for directed polymers in random environment

Non-colliding Brownian Particles I: Finite particle systems

MAKOTO KATORI AND HIDEKI TANEMURA
Chuo University and Chiba University

We put

$$\mathbf{R}^N_< = \{\mathbf{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_N) \in \mathbf{R}^N; x_1 < x_2 < \cdots < x_N\},$$

which is called the Weyl chamber. By virtue of the Karlin-Mcgregor formula, the transition density $f_N(t, \mathbf{x}, \mathbf{y})$, $t > 0, \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{R}^N_<$, of the absorbing Brownian motion in $\mathbf{R}^N_<$ and the probability $\mathcal{N}_N(t, \mathbf{x})$ that the Brownian motion started at $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^N_<$ does not hit the boundary of $\mathbf{R}^N_<$ up to time $t > 0$ are given by

$$f_N(t, \mathbf{x}, \mathbf{y}) = \det_{1 \le i,j \le N} \Big(p_t(x_i, y_j) \Big), \quad \mathcal{N}_N(t, \mathbf{x}) = \int_{\mathbf{R}^N_<} f_N(t, \mathbf{x}, \mathbf{y}) d\mathbf{y}, \tag{1}$$

where $p_t(x, y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-(x-y)^2/2t}$. For a given $T > 0$, we define

$$g_N^T(s, \mathbf{x}; t, \mathbf{y}) = \frac{f_N(t - s, \mathbf{x}, \mathbf{y}) \mathcal{N}_N(T - t, \mathbf{y})}{\mathcal{N}_N(T - s, \mathbf{x})}, \tag{2}$$

for $0 \le s \le t \le T, \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{R}^N_<$. The function $g_N^T(s, \mathbf{x}; t, \mathbf{y})$ can be regarded as the transition probability density from the state $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^N_<$ at time s to the state $\mathbf{y} \in \mathbf{R}^N_<$ at time t, and associated with the temporally inhomogeneous diffusion process, which is the N Brownian motions not to collide each other in a time interval $[0, T]$. In [3, 4] it is shown that as $|\mathbf{x}| \to 0$, $g_N^T(0, \mathbf{x}, t, \mathbf{y})$ converges to

$$g_N^T(0, \mathbf{0}, t; \mathbf{y}) \equiv C(N, T, t) h_N(\mathbf{y}) \mathcal{N}_N(T - t, \mathbf{y}) \prod_{i=1}^N p_t(0, y_i), \tag{3}$$

where $C(N, T, t) = \frac{\pi^{N/2}}{\prod_{j=1}^N \Gamma(j/2)} T^{N(N-1)/4} t^{-N(N-1)/2}$ and $h_N(\mathbf{x}) = \prod_{1 \le i < j \le N} (x_j - x_i)$. Then the diffusion process $X(t)$ starting from $\mathbf{0}$ is constructed.

Let $(\{\mathbf{S}_j\}_{j \ge 0}, P^{\mathbf{z}})$ be the N-dimensional Markov chain starting from $\mathbf{z} = (z_1, z_2, \ldots, z_N)$, such that the coordinates $S_j^k, k = 1, 2, \ldots, N$, are independent simple random walks on $\mathbf{Z}$. We always take the starting point $\mathbf{z}$ from the set

$$\mathbf{Z}^N_< = \{\mathbf{z} = (z_1, z_2, \ldots, z_N) \in 2\mathbf{Z}^N \,;\, z_{k+1} - z_k \in 2\mathbf{Z}_+, \, k = 1, \ldots, N - 1\}, \tag{4}$$

where $\mathbf{Z}_+$ is the set of positive integers. We dente by $Q_m^{\mathbf{z}}$ the conditional probability of $P^{\mathbf{z}}$ under the event $\Lambda_m = \{S_j^1 < S_j^2 < \ldots < S_j^N \quad 0 \le j \le m\}$. The process $(\{\mathbf{S}_j\}_{j \ge 0}, Q_m^{\mathbf{z}})$ is called the vicious walkers (up to time m) (see Fisher [2]). For $T > 0$ and $\mathbf{z} \in \mathbf{Z}^N_<$, we consider probability measures $\mu^{\mathbf{z}}_{L,T}$, $L \ge 1$, on the space of continuous paths $C([0, T] \to \mathbf{R}^N)$ defined by

$$\mu^{\mathbf{z}}_{L,T}(\cdot) = Q^{\mathbf{z}}_{L^2 T} \left(\frac{1}{L} \mathbf{S}(L^2 t) \in \cdot \right), \tag{5}$$

where $\mathbf{S}(t), t \geq 0$, is the interpolation of the random walks $\mathbf{S}_j, j = 0, 1, 2, \ldots$. We study the limit distribution of the probability $\mu^{\mathbf{z}}_{L,T}$, $L \to \infty$. The main result is the following theorem [4].

Theorem 1 *For any fixed* $\mathbf{z} \in \mathbf{Z}^N_<$ *and* $T > 0$, *as* $L \to \infty$, $\mu^{\mathbf{z}}_{L,T}(\cdot)$ *converges weakly to the law of the temporally inhomogeneous diffusion process* $\mathbf{X}(t) = (X_1(t), X_2(t), \ldots, X_N(t)), t \in [0, T]$, *with transition density* $g^T_N(s, \mathbf{x}, t, \mathbf{y})$.

Next we consider the case that $T = T_L$ goes to infinity as $L \to \infty$.

Corollary 2 *Let* T_L *be an increasing function of* L *with* $T_L \to \infty$ *as* $L \to \infty$. *For any fixed* $\mathbf{z} \in \mathbf{Z}^N_<$, *as* $L \to \infty$, $\mu^{\mathbf{z}}_{L,T_L}(\cdot)$ *conerges weakly to the law of the temporally homogeneous diffusion process* $\mathbf{Y}(t) = (Y_1(t), Y_2(t), \ldots, Y_N(t)), t \in [0, \infty)$, *which solves the equation of Dyson's Brownian motion model [1].*

The Gaussian ensembles of random matrices can be regarded as the thermodynamical equilibrium of Coulomb gas system and that is the reason why Dyson introduced a one-dimensional model of interacting Brownian particles with (two-dimensional) Coulomb repulsive potentials [1, 5]. Similar relations between processes and random matrix ensembles can be seen in our results [3]. The distribution of $\mathbf{Y}(t)$ coincides with the probability density of eigenvalues of random matrices in the Gaussian unitary ensemble (GUE) with variance t. Pandey and Mehta [6, 8] introduced a Gaussian ensemble of Hermitian matrices depending on a parameter $\alpha \in [0, 1]$. When $\alpha = 0$, the ensemble is the Gaussian orthogonal ensemble (GOE), and when $\alpha = 1$, it is the GUE. The probability density function of $\sqrt{\frac{T}{t(2T-t)}}\mathbf{X}(t)$ coincides with that of eigenvalues in this ensemble of Pandey and Mehta with $\alpha = \sqrt{\frac{T-t}{T}}$.

References

[1] Dyson, F. J.: A Brownian-motion model for the eigenvalues of a random matrix, J. Math. Phys. **3**, 1191 (1962)

[2] Fisher, M. E.: Walks, walls, wetting, and melting, J. Stat. Phys. **34** 667-729 (1984)

[3] Katori, M. and Tanemura, H. : Scaling limit of vicious walkers and two-matrix model, to appear in Phys. Rev. E; cond-mat/0203549

[4] Katori, M. and Tanemura, H. : Functional central limit theorems for vicious walkers, arXiv:math.PR/0203286

[5] Mehta, M. L. : *Random Matrices*, second edition, Academic Press, London 1991

[6] Mehta, M.L. and Pandey, A. : On some Gaussian ensemble of Hermitian matrices, J. Phys. A: Math. Gen. **16**, 2655-2684 (1983)

[7] Nagao, T., Katori, M. and Tanemura, H. : Dynamical correlations among vicious random walkers, cond-mat/0202068

[8] Pandey, A. and Mehta, M.L. : Gaussian ensembles of random Hermitian intermediate between orthogonal and unitary ones, Commun. Math. Phys. **87**, 449-468 (1983)

Non-colliding Brownian Particles II: Infinite Particle Systems

Makoto KATORI and Hideki TANEMURA
Chuo University and Chiba University

Here we will use the same notations defined in the abstract of our previous talk I. Moreover, we let $\mathfrak{X}$ be the space of countable subset ξ of $\mathbf{R}$ satisfying $\sharp(\xi \cap K) < \infty$ for any compact subset K. We introduce the map γ from $\bigcup_{n=1}^{\infty} \mathbf{R}^n$ to $\mathfrak{X}$ defined by $\gamma(x_1, x_2, \dots, x_n) = \{x_i\}_{i=1}^{n}$. Then $\Xi^N(t) = \gamma \mathbf{X}(t)$ is the diffusion process on the set $\mathfrak{X}$ with transition density function $\tilde{g}_N^T(s,\xi;t,\eta)$, $0 \le s \le t \le T$:

$$\tilde{g}_N^T(s,\xi;t,\eta) = \begin{cases} g_N^T(s,\mathbf{x};t,\mathbf{y}), & \text{if } s>0,\ \sharp\xi = \sharp\eta = N, \\ g_N^T(0,\mathbf{0};t,\mathbf{y}), & \text{if } s=0,\ \xi=\{0\},\ \sharp\eta = N, \\ 0, & \text{otherwise}, \end{cases} \tag{1}$$

where $\mathbf{x}$ and $\mathbf{y}$ are the elements of $\mathbf{R}^N_<$ with $\xi = \gamma\mathbf{x}$, $\eta = \gamma\mathbf{y}$. For a given time interval $[0,T]$, we consider the M intermediate times $0 < t_1 < \cdots < t_M < T$. Then for subsets $\xi_m^N = \{x_1^{(m)}, \dots, x_N^{(m)}\}$ $1 \le m \le M+1$, we put $\rho_N^T(t_1,\xi_1^N;\dots;t_{M+1},\xi_{M+1}^N) = \prod_{m=0}^{M} \tilde{g}_N^T(t_m,\xi_m^N;t_{m+1},\xi_{m+1}^N)$, where we set $t_0=0$, $t_{M+1}=T$ and $\xi_0^N=\{0\}$. We can show

$$\rho_N^T(t_1,\xi_1^N;\dots;t_{M+1},\xi_{M+1}^N) = C(N,T,t_1) h_N(\mathbf{x}^{(1)}) \mathrm{sgn}\Big(h_N(\mathbf{x}^{(M+1)})\Big) \times \prod_{i=1}^{N} p(t_1,0,x_i^{(1)}) \prod_{m=1}^{M} \det_{1\le i,j\le N} \Big(p_{t_{m+1}-t_m}(x_i^{(m)}, x_j^{(m+1)})\Big). \tag{2}$$

For a sequence $\{N_m\}_{m=1}^{M+1}$ of positive integers $N_m \le N$, we define the $(N_1, N_2, \dots, N_{M+1})$-multitime correlation function as

$$\rho_N^T(t_1,\xi_1^{N_1};\cdots;t_{M+1},\xi_{M+1}^{N_{M+1}}) = \int_{\prod_{m=1}^{M+1}\mathbf{R}^{N-N_m}} \prod_{m=1}^{M+1} \frac{1}{(N-N_m)!} \prod_{i=N_m+1}^{N} dx_i^{(m)} \rho_N^T(t_1,\xi_1^N;\cdots;t_{M+1},\xi_{M+1}^N), \tag{3}$$

where $\xi_m^{N_m} = \{x_1^{(m)}, x_2^{(m)}, \cdots, x_{N_m}^{(m)}\}$.

Let $\mathrm{Ai}(z)$ be the Airy function, $\mathrm{Ai}(z) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{\sqrt{-1}(zt+t^3/3)}dt$. For $s,t<0$ and $x,y \in \mathbf{R}$, we set

$$\begin{aligned} \mathcal{D}(s,x;t,y) &= \frac{1}{4}\left[\int_0^\infty du\ e^{su}\mathrm{Ai}(x+u)\frac{d}{du}\Big\{e^{tu}\mathrm{Ai}(y+u)\Big\} - \int_0^\infty du\ e^{tu}\mathrm{Ai}(y+u)\frac{d}{du}\Big\{e^{su}\mathrm{Ai}(x+u)\Big\}\right], \\ \tilde{\mathcal{I}}(s,x;t,y) &= \int_0^\infty du\ e^{tu}\mathrm{Ai}(y-u)\int_u^\infty dv\ e^{sv}\mathrm{Ai}(x-v) - \int_0^\infty du\ e^{su}\mathrm{Ai}(x-u)\int_u^\infty dv\ e^{tv}\mathrm{Ai}(y-v), \\ \tilde{\mathcal{S}}(s,x;t,y) &= \begin{cases} \mathcal{S}(s,x;t,y) & \text{if } s \ge t \\ \mathcal{S}(s,x;t,y) - \mathcal{G}(s,x;t,y) & \text{if } s<t \end{cases} \end{aligned} \tag{4}$$

with

$$\begin{aligned} \mathcal{S}(s,x;t,y) &= \int_0^\infty du\ e^{(t-s)u}\mathrm{Ai}(x+u)\mathrm{Ai}(y+u) + \frac{1}{2}\mathrm{Ai}(y)\int_0^\infty du\ e^{su}\mathrm{Ai}(x-u), \\ \mathcal{G}(s,x;t,y) &= \int_{-\infty}^\infty du\ e^{(t-s)u}\mathrm{Ai}(x+u)\mathrm{Ai}(y+u). \end{aligned}$$

And let $\mathfrak{q}^{m,n}(x,y)$ be the quaternion, whose 2×2 matrix expression is given by

$$C(\mathfrak{q}^{m,n}(x,y)) = \begin{pmatrix} \tilde{\mathcal{S}}(s_m,x;s_n,y) & \tilde{\mathcal{I}}(s_m,x;s_n,y) \\ \mathcal{D}(s_m,x;s_n,y) & \tilde{\mathcal{S}}(s_n,y;s_m,x) \end{pmatrix}. \tag{5}$$

We denote by $\mathcal{Q}(\mathbf{x}^{(1)}_{N_1},\mathbf{x}^{(2)}_{N_2},\cdots,\mathbf{x}^{(M+1)}_{N_{M+1}})$ the self-dual $\sum_{m=1}^{M+1} N_m \times \sum_{m=1}^{M+1} N_m$ quaternion matrix whose elements are $\mathfrak{q}^{m,n}(x_i^{(m)},x_j^{(n)})$, $1\le i\le N_m$, $1\le j\le N_n$, $1\le m,n\le M+1$. Now we use the quaternion determinant $\mathrm{Tdet}Q$, whose definition for an $N\times N$ self-dual quaternion matrix Q was given by Dyson[1] as $\mathrm{Tdet}Q = \sum_{\pi\in S_N}(-1)^{N-\ell(\pi)}\prod_1^{\ell(\pi)}(q_{ab}q_{bc}\cdots q_{da})$, where $\ell(\pi)$ denotes the number of exclusive cycles of the form $(a\to b\to c\to\cdots\to d\to a)$ included in a permutation $\pi\in S_N$.

Theorem[[2, 3]] *Let $T_N = 2N^{1/3}$ and $a_N = 2N^{2/3}$. For any $M\ge 1$, any sequence $\{N_m\}_{m=1}^{M+1}$, with positive integers, and any $s_1 < s_2 < \cdots < s_M < s_{M+1} = 0$,*

$$\lim_{N\to\infty}\rho_N^{T_N}\left(T_N+s_1,\tau_{a_N-s_1^2}\xi_1^{N_1};\ldots;T_N+s_M,\tau_{a_N-s_M^2}\xi_M^{N_M};T_N,\tau_{a_N}\xi_{M+1}^{N_{M+1}}\right) = \mathrm{Tdet}\,\mathcal{Q}(\mathbf{x}^{(1)}_{N_1},\mathbf{x}^{(2)}_{N_2},\cdots,\mathbf{x}^{(M+1)}_{N_{M+1}}),$$

where $\tau_u\{x_i\} = \{x_i+u\}$.

This theorem may define a spatially and temporally inhomogeneous infinite particle system, in which any type of space-time correlation function is given by the above quaternion determinantal formula. This quaternion determinantal system is exactly the same as that derived in Forrester, Nagao and Honner [4]. Consider the limit $s_m\to-\infty$ with the time difference s_n-s_m fixed, $1\le m,n\le M$, in which $\mathcal{D}(s_m,x;s_n,y)\to 0$, $\tilde{\mathcal{I}}(s_m,x;s_n,y)\to 0$, and the second term of $\mathcal{S}(s_m,x;s_n,y)$ vanishes. Since the off-diagonal elements vanish in the 2×2 matrix expressions (5) of quaternions $\mathfrak{q}^{m,n}(x,y)$, $\mathrm{Tdet}\mathcal{Q}(\mathbf{x}^{(1)}_{N_1},\mathbf{x}^{(2)}_{N_2},\cdots,\mathbf{x}^{(M)}_{N_M})$ is reduced to an ordinary determinant $\det\mathcal{A}(\mathbf{x}^{(1)}_{N_1},\mathbf{x}^{(2)}_{N_2},\cdots,\mathbf{x}^{(M)}_{N_M})$ with the elements $\mathfrak{a}^{m,n}(x_i^{(m)},x_j^{(n)})$, where

$$\mathfrak{a}^{m,n}(x,y) = \mathfrak{a}(s_m,x;s_n,y) = \begin{cases} \displaystyle\int_0^\infty du\; e^{(s_n-s_m)u}\mathrm{Ai}(x+u)\mathrm{Ai}(y+u) & \text{if } m\ge n \\ \displaystyle -\int_{-\infty}^0 du\; e^{(s_n-s_m)u}\mathrm{Ai}(x+u)\mathrm{Ai}(y+u) & \text{if } m<n. \end{cases} \tag{6}$$

The obtained infinite particle system is now temporally homogeneous. In particular, if we set $N_1=\cdots=N_M=1$, we have

$$\widehat{\rho}(s_1,\{x_1^{(1)}\};\cdots,s_M,\{x_1^{(M)}\}) = \det_{1\le m,n\le M}\left(\mathfrak{a}^{m,n}(x_1^{(m)},x_1^{(n)})\right). \tag{7}$$

This is exactly the same as the system called *the Airy process* by Prähofer and Spohn [5] (see also [6]).

References

[1] Dyson, F. J. : Correlations between the eigenvalues of a random matrix, *Communications in Mathematical Physics* **19**, 235-250 (1970)

[2] Nagao, T., Katori, M. and Tanemura, H. : Dynamical correlations among vicious random walkers, *Physics Letters A* (in press) ; e-print cond-mat/0202068

[3] M. Katori and H. Tanemura, Infinite systems of non-colliding Brownian particles, preprint.

[4] P. J. Forrester, T. Nagao, and G. Honner, Correlations for the orthogonal-unitary and symplectic-unitary transitions at the hard and soft edges, *Nuclear Physics* B **553**, 601-643 (1999).

[5] M. Prähofer and H. Spohn, Scale invariance of the PNG droplet and the Airy process, *Journal of Statistical Physics* **108**, 1071-1106 (2002).

[6] K. Johansson, Discrete polynuclear growth and determinantal processes; e-print math.PR/0206208.

フックヤング図に基づく **Vicious Walk** の拡張*
(On the Generalization of Vicious Walk Based on Hook Young Tableaux)

Takashi Imamura , Graduate School of Science, University of Tokyo
imamura@monet.phys.s.u-tokyo.ac.jp

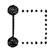
The random vicious walk was introduced by M. Fisher [1] and it is well known that path configuration has a one-to-one correspondence to the Young tableaux [2]. In this talk we propose a new vicious walk based on the hook Young tableaux, which includes the ordinary vicious walk as a special case. This work is motivated by studies in refs. 3 which paied attention to a directed last-passage problem.

1. Vicious Walker

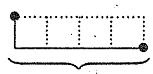
We define the hook Young tableaux. We classify the number $1, 2, \cdots, M+N$ into positive symbols $1, \cdots, M$ and negative symbols $M+1, \cdots, M+N$. For the given Young diagram λ, (M, N) hook Young tableaux is defined by the following rules:

- The entries in each row are weakly increasing, allowing the repetition for the positive symbols, and for the negative symbols, they are strictly increasing prohibiting the repitition.
- The entries of each column are weakly increasing for the negative symbols, but are strictly increasing for the positive symbols.

The model we study is as follows. First, we introduce the two types of time evolution, 'normal' and 'super' time evolutions. In the normal time evolution, the movable walkers either stay or move to its right,

move :  stay : .

In the super time evolution, on the other hand, the walkers either stay or move the arbitrary number of lattice units if they are movable,



Our new vicious walk is the combination of these two types of time evolution. That is, the walkers move under the rule of normal time evolution in the first M time steps, and in next N time steps, they obey the rule of super time evolutions, see Fig. 1. How to construct the hook Young tableaux from the configuration of a path is simple. In the hook Young tableaux, each column represents the movements of the each walker and box of number t means that walker moves rightward at time t. See Fig. 2 as a example. Notice that, for super time evolution, we prepare the number of times to be as many lattice units as the walker has moved.

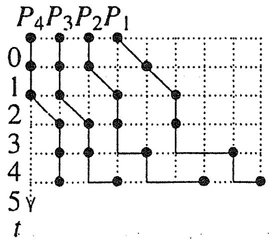


Figure 1: Example of path configuration. In this example, the walkers $P_1 \sim P_4$ proceed under the rule of normal time evolution in the first three time steps while in the last two time steps, they do under the super time evolution.

1	2	3	3
2	4	5	
4	5		
4	5		
5			

Figure 2: the hook Young tableaux corresponding to the configuration in Fig. 1. For the walker P_j, we insert in the j-th column from the top the time at which P_j made the movement to its right.

*K. Hikami and T. Imamura, J. Phys. A(2003) to appear (cond-mat/0209512)

2. Main Result

In the following we consider the model where each walker moves under the rule above and return to its initial position by moving to its left. The rule of left moves is defined naturally by the mirror image of the rule above.

What we would like to study is the probability that the number of movements of the first walker, L_1, is less than ℓ:

$$\text{Prob}(L_1 \leq \ell). \tag{1}$$

Here the probability of each configuration is defined by t^n/Z, where t is the weight which is assigned to the left and right moves, n is the total number of moves, and Z is the normalization factor. Eq. (1) can be expressed as the Toeplitz determinant.

$$\text{Prob}(L_1 \leq \ell) = \frac{1}{Z} D_\ell(\tilde{\varphi}), \text{ where } \tilde{\varphi}(z) = \frac{(1+tz^{-1})^N}{(1-tz^{-1})^M} \frac{(1+tz)^N}{(1-tz)^M}.$$

The Toeplitz determinant $D_\ell(\tilde{\varphi})$ is the determinant of $\ell \times \ell$ matrix where an (i, j)-element is given by $\tilde{\varphi}_{i-j}$ with $\tilde{\varphi(z)} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \tilde{\varphi}_n z^n$.

The main result of this study is that the scaling limit of eq. (1) gives the Tracy-Widom distribution [4] which is identified with the limit distribution in the largest eigenvalue of Gaussian Unitary Ensemble(GUE) of random matrix theory;

$$\lim_{N\to\infty} \text{Prob}\left(\frac{L_1 - cN}{\sigma N^{1/3}} \leq s\right) = F_2(s). \tag{2}$$

Here c and σ are some constants, and $F_2(s)$ is the Tracy–Widom distribution [4] defined by

$$F_2(s) = \exp\left(-\int_s^\infty \mathrm{d}x\,(x-s)\,q(x)^2\right),$$

where $q(x)$ is a solution of the Painlevé II equation, $q'' = sq + 2q^3$, with $q(s) \to Ai(s)$ in $s \to \infty$.

We prove eq. (2) as follows.

- Using the Borodin-Okounkov identity [6], we rewrite the Toeplitz determinant with the Fredholm determinant.
- We estimate the limiting behavior of the kernel of this Fredholm determinant by the saddle point method, and show that it gives asymptotically the Tracy-Widom distribution.

3. Some Special cases

Our vicious walker model include various discrete orthogonal polynomial ensembles as special cases. The orthogonal polynomial ensembles are the discrete analogue of orthogonal polynomial ensembles in random matrix theory and are related to the various problems such as random permutation, random word, the first passage percolation , and so on [7].

As a example, we explain the Meixner and Kroutchouk ensembles can be regarded as a reduction of our model.

References

[1] M. E. Fisher, J. Stat. Phys. **34**, 667 (1984).

[2] A. J. Guttmann, et. al. J. Phys. A: Math. Gen. **31**, 8123 (1998), P. J. Forrester, J. Phys. A: Math. Gen. **34**, L417 (2001), J. Baik, Commun. Pure Appl. Math. **53**, 1385 (2000).

[3] J. Baik and E. M. Rains, Duke Math. J. **109**, 1 (2001), E. M. Rains, math.CO/0004082 (2000).

[4] C. A. Tracy and H. Widom, Commun. Math. Phys. **159**, 151 (1994).

[5] J. Gravner, C. A. Tracy, and H. Widom, J. Stat. Phys. **102**, 1085 (2001).

[6] A. Borodin and A. Okounkov, Integral Equations & Operator Theory **37**, 386 (2000).

[7] K. Johansson, Ann. Math. **153**, 259 (2001).

Particle Position Fluctuation of the Totally ASEP and Charlier Ensemble

笹本 智弘 (東工大・理工学研究科)

1次元完全非対称排他過程 (TASEP) を考える. これは, 1次元格子上を体積排除の相互作用の下に右方向のみに移動するような多数の粒子の確率過程モデルであり, 種々の応用も知られている.

近年, 特に Johansson[1] によってカレントの確率分布が組み合わせ論や対称関数の理論を用いてランダム行列の理論に現れる多重積分と同じ形に書かれてから, このモデルの時間発展に関する性質を厳密に調べるという研究が活発になって来ている.

本講演では, 組み合わせ論を用いず TASEP に対する Green 関数から出発することにより, 粒子の位置の揺らぎの Charlier 多項式を用いた表示を与え, そのスケーリング極限が Tracy-Widom 分布関数で与えられる事を示す.

1 TASEP の Green 関数に関する Schütz の行列式表示

時刻 0 で $y_1, y_2, \ldots, y_N$ を出発し, 時刻 t で $x_1, x_2, \ldots, x_N$ にいる確率は次のような行列式の形に書くことが出来ることが Schütz によって示されている [2].

$$
\begin{aligned}
&P(x_1, x_2, \cdots, x_N; t | y_1, y_2, \cdots, y_N; 0) \\
&= \begin{vmatrix}
F_0(x_1 - y_1; t) & F_1(x_2 - y_1; t) & \cdots & F_{N-1}(x_N - y_1; t) \\
F_{-1}(x_1 - y_2; t) & F_0(x_2 - y_2; t) & \cdots & F_{N-2}(x_N - y_2; t) \\
\vdots & \vdots & & \vdots \\
F_{-N+1}(x_1 - y_N; t) & F_{-N+2}(x_2 - y_N; t) & \cdots & F_0(x_N - y_N; t)
\end{vmatrix}
\end{aligned}
\tag{1}
$$

ただし

$$
F_n(m; t) = e^{-t} \frac{t^m}{m!} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{n(n+1)\cdots(n+k-1)}{(m+1)(m+2)\cdots(m+k)} \frac{t^k}{k!}
\tag{2}
$$

2 原点を出発した粒子の位置

上の Green 関数を適当に足し合わせると, 時刻 0 にサイト $0, 1, \cdots, N-1$ から出発した N 粒子に関して, 時刻 t における一番左の粒子 (原点を出発した粒子) の位置 $X_1(t)$ が M 以上である確率が,

$$
\Pr[X_1(t) \geq M] = \frac{1}{Z(t)} \sum_{x_1=M}^{\infty} \cdots \sum_{x_N=M}^{\infty} \prod_{1 \leq i < j \leq N} (x_i - x_j)^2 \prod_{i=1}^{N} \frac{t^{x_i}}{x_i!}
\tag{3}
$$

という表式を持つ事を示すことが出来る. ここで $Z(t)$ は規格化定数である.

3 Charlier 多項式

$t > 0$ とし, $\mathbb{N} = 0, 1, 2, \cdots$ 上の測度 $w_t(x) = \frac{t^x}{x!}e^{-t}$ $(x \in \mathbb{N})$ に対する直交多項式 $\{p_n(x;t)\}$ を考えるとこれらは

$$\sum_{x=0}^{\infty} p_n(x;t)p_m(x;t)w_t(x) = \delta_{nm} \tag{4}$$

という関係式を満たし, Charlier 多項式とよばれる. Charlier 多項式は

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{p_n(x;t)}{t^{\frac{n}{2}}\sqrt{n!}} u^n = e^{-u}\left(1+\frac{u}{t}\right)^x \tag{5}$$

という母関数を持つことが知られており, これから漸近形を求めることが出来る.

特に $\tau > 1$ を固定し,

$$t = N\tau, \quad x = (\sqrt{\tau}-1)^2 N + \tau^{\frac{1}{6}}(\sqrt{t}-1)^{\frac{2}{3}}N^{\frac{1}{3}}\xi \tag{6}$$

として $N \to \infty$ の極限を考えると,

$$\left(\frac{(N\tau)^x}{x!}e^{-N\tau}\right)^{\frac{1}{2}} p_N(x;N\tau) \sim \frac{(-1)^N}{\tau^{\frac{1}{6}}(\sqrt{t}-1)^{\frac{1}{6}}N^{\frac{1}{3}}}\mathrm{Ai}(-\xi) \tag{7}$$

という漸近形が得られる.

4 スケーリング極限

表式 (3) と Charlier 多項式の漸近形 (7) を用いることにより, スケーリング極限で

$$\lim_{N\to\infty} \Pr[X_1(N\tau) \geq (\sqrt{\tau}-1)^2 N - \tau^{1/6}(\sqrt{\tau}-1)^{2/3}N^{1/3}s] = F(s) \tag{8}$$

という結果を得ることが出来る. ただしここで $F(s)$ は Tracy-Widom 分布関数 [3] である.

参考文献

[1] K. Johansson, Commun. Math. Phys **209** (2000), 437-476.

[2] G. M. Schütz, J. Stat. Phys. **88** (1997) 427-445.

[3] C. A. Tracy and H. Widom, Commun. Math. Phys **159** (1994), 151-174.

確率論サマースクール

2003年度の確率論サマースクールは九州大学で開催された．出席者は53名．講演者およびタイトルは

E.P. Hsu : A brief introduction to Brownian motion on a Riemannian manifold
P.A. Ferrari : Spatial and Harness processes, random trees and Poisson approximation
白井 朋之 : Fermion 測度とその周辺

なお，予稿等詳細は Web Site
http://www.math.kyoto-u.ac.jp/probability/sympo/PSS03.html を参照．以下はそのプログラムである．

場所: 九州大学工学部本館9番教室（箱崎キャンパス）
日時: 2003年8月19日(火)–22日(金)

August 19 (Tue)

9:50 – 10:50 Elton P. Hsu (Northwestern University)
A brief introduction to Brownian motion on a Riemannian manifold (I)
11:00 – 12:00 Tomoyuki Shirai (Kanazawa University)
Fermion measure and its related topics (I)
13:40 – 14:40 Pablo A. Ferrari (Universidade de Sao Paulo)
Spatial and Harness processes, random trees and Poisson approximation (I)
15:00 – 16:00 Tomoyuki Shirai (Kanazawa University)
Fermion measure and its related topics (II)
16:10 – 17:00 Discussion

August 20 (Wed)

9:50 – 10:50 Pablo A. Ferrari (Universidade de Sao Paulo)
Spatial and Harness processes, random trees and Poisson approximation (II)
11:00 – 12:00 Elton P. Hsu (Northwestern University)
A brief introduction to Brownian motion on a Riemannian manifold (II)
13:40 – 17:00 Young Forum

August 21 (Thu)

9:50 – 10:50 Elton P. Hsu (Northwestern University)
A brief introduction to Brownian motion on a Riemannian manifold (III)
11:00 – 12:00 Tomoyuki Shirai (Kanazawa University)
Fermion measure and its related topics (III)
13:40 – 14:40 Pablo A. Ferrari (Universidade de Sao Paulo)
Spatial and Harness processes, random trees and Poisson approximation (III)
15:00 – 16:00 Tomoyuki Shirai (Kanazawa University)
Fermion measure and its related topics (IV)
16:10 – 17:00 Discussion

August 22 (Fri)

9:50 – 10:50 Pablo A. Ferrari (Universidade de Sao Paulo)
Spatial and Harness processes, random trees and Poisson approximation (IV)
11:00 – 12:00 Elton P. Hsu (Northwestern University)
A brief introduction to Brownian motion on a Riemannian manifold (IV)

世話人: 谷口説男，安田公美，深井康成 (九州大学)

確率論とPDE

平成15年8月28日(木)–8月29日(金)
北海道大学理学部3号館512室

世話人：竹田雅好（東北大・理）・三上敏夫（北海道大・理）

この研究会では、以下の講演が行われた。

1. 志賀啓成（東京工業大・理）
リーマン面の変形とポテンシャル論について
2. 土谷　正明（金沢大・工）
拡散係数推定問題に対する確率制御理論に基づくアプローチ
3. 菊地光嗣（静岡大・工）
1次増大度のエネルギーを持つ準線形双曲型方程式について
4. 金子宏（東京理科大・理）
An inverse problem and Green's formula based on Dirichlet space theory
5. 藤田安啓（富山大・理）
Ornstein-Uhlenbeck 作用素を含むある非線形放物型方程式の解の各点評価とその確率制御への応用
6. 三上敏夫（北海道大・理）
Monge's problem with a quadratic cost by the zero-noise limit of h-path processes
7. 有澤真理子（東北大・情報科）
Some regularity results for a class of degenerate elliptic PDEs
8. 藤崎正敏（神戸商大・管理科）
Variational formula for the principal eigenvalue for nonlinear semigroup and large deviation principle
9. 大沼正樹（徳島大・総合科）
曲面がある曲率で動くときの曲面の発展方程式についての解の存在についての考察

この報告集では、特に、1-6の講演について解説する。

リーマン面の変形とポテンシャル論について

志賀　啓成（東京工業大学）

本講演では，(open) Riemann 面が変形される時，その Riemann 面上で定義された等角不変量・性質がどのように変わるか（あるいは変わらないか）を考える．この種の議論はいろいろなセッティングで議論することが可能であるが，ここでは複素構造の変形の立場から論じる．そのために次の事柄を明らかにするしておく．

1. 「Riemann 面面を変形する」とはどういうことか．例えば，ある Riemann 面 S_0 に Riemann 面の列 $\{S_n\}$ が収束するとはどういうことか．
2. 考える等角不変量・性質として何をとるか．
3. 「変化」をどのようにとらえるか．例えば，ある等角不変量が変形のパラメータについて滑らか（可微分性等）ということをどのように考えれば自然か？

このうち１と３はタイヒミュラー理論を用いて記述する．２はいろいろ考えられるが，本講演では

- （通常のラプラシアンの）Dirichlet 境界値問題の解
- Riemann 面の理想境界の性質（正則点，Martin 境界）

などを問題とする．

参考文献

[1] L. V. Ahlfors, *Lectures on quasiconformal mappings*, the Wadsworth & Brooks/Cole Monterey, California 1987.

[2] L. V. Ahlfors and L. Bers, Riemann's mapping theorem for variable metrics, Ann. of Math. **72** (1960), 385–404.

[3] C. Constantinescu and A. Cornea, *Ideale Ränder Riemannscher Flächen*, Springer 1963.

[4] L. Carleson and T. W. Gamelin, *Complex Dynamics*, Springer-Verlag 1993.

[5] Y. Imayoshi and M. Taniguchi, *Introduction to Teichmüller Spaces*, Springer-Tokyo 1992.

[6] H. Masaoka and S. Segawa, Martin boundary of unlimited covering surfaces, J. D'Analyse Math. **83** (2000), 55–72.

[7] S. J. Patterson, The limit set of a Fuchsian group, Acta Math. **136** (1976), 242–273.

[8] S. Segawa and T. Tada, Martin compactifications and quasiconformal mappings, Proc. Amer. Math. Soc. **93** (1985), 242–244.

[9] H. Shiga, Quasiconformal mappings and potentials, XVIth Rolf Nevanlinna Colloquium Walter de Gruyter & Co. (1996), 215–222.

[10] H. Shiga, On complex analytic properties of limit sets and Julia sets, preprint.

[11] H. Shiga, Dirichlet solutions on bordered Riemann surfaces and quasiconformal mappings, to appear in J. D'Analyse Math.

[12] M. Shishikura, Topological, Geometric and Complex Analytic Properties of Julia Sets, in "Proceedings of International Congress of Mathematicians", Birkhäuser-Verlag Basel, 886–895, 1995.

拡散係数推定問題に対する確率制御理論に基づくアプローチ

土谷　正明（金沢大・工）

０．熱伝導の問題において，物体の一部に少量の不純物が混じり，熱拡散係数が揺らいだときに，ある観測地点での観測データを基にして，その拡散係数を推定する問題を考える．このような逆問題については既に解析的なアプローチがなされているが（[1]），ここでは確率制御理論に基づくアプローチを試みる．このアプローチでは，多次元の場合や具体的な近似解の構成に有効な結果をもたらすと期待できる．

１．ここでは簡単のため以下のような設定で考えることにする．直線上で熱方程式を考える．ある有限閉区間の中で拡散係数が定数から未知の変化をしているとする．観測地点はその閉区間の外の１点とし，初期温度はその点でのディラック測度とする．その観測地点でのある一定時間内の温度データを基にして，拡散係数を推定する問題を確率制御理論の設定で考え，それを構成的な形で解くことを目的とする．

確率制御の問題を離散化して近似解を構成する方法が Kushner-Dupuis [2] で与えられている．彼等の枠組みは，評価関数が通常の時間に基づくランニングコストでその時間の上限はある領域を controled diffusion process が最初に出る時刻というようなランダムな時刻であるかまたは無限である．

我々の場合では，観測時間は non-random であるので，そのまま離散化すると Kushner-Dupuis で扱っている枠組みにはいらなくなる（離散化した Bellman equation が成立しない）．そこで通常の時刻でコストを測る代わりに観測地点における controled diffusion process の local time を用いる．そうすると係数の各地点における情報が失われるので，拡散係数を閉区間における適当な既知の基底関数（例えば三角関数）をもちいて展開し，その係数列を control parameter に選んで評価関数を作る．このときに最適なものとして係数が一意に同定できることが必要であるが，今の場合は [1] の結果からそれは従うことが分かる．

このような設定で Kushner-Dupuis の離散化の枠組みが利用でき近似解の構成が行える．

(1). V. Isakov and S. Kindermann, Identification of the diffusion coefficient in a one-dimensional parabolic equation, *Inverse Problems* **16** (2000), 665-680

(2). H. J. Kushner and P. G. Dupuis, Numerical Methods for Stochastic Control Problems in Continuous Time, *Springer-Verlag*, 1992

1次増大度のエネルギーを持つ準線形双曲型方程式について

静岡大学工学部　菊地光嗣

There are several works on the following nonlinear hyperbolic equation

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t,x) - \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j}\{(1+|\nabla u(t,x)|^2)^{-1/2}\frac{\partial u}{\partial x_j}\} = 0, \qquad x \in \Omega, \tag{1}$$

which is in [2, 5, 6] referred to as an equation of motion of vibrating membrane. This equation does not always have a classical solution globally in time; furthermore it is proved in [4] that in the two dimensional case (1) does not always have a classical solution globally in time even though the initial data is smooth and small. Thus a time global solution should be found in a weak sense. When a C^2 class function u satisfies (1), multiplying u_t to (1) and integrating with respect to x, we obtain the energy conservation law

$$\int_\Omega |u_t(t,x)|^2 dx + \int_\Omega \sqrt{1+|\nabla u|^2}dx = \text{const}.$$

The area functional $u \to \int_\Omega \sqrt{1+|\nabla u|^2}dx$ is finite for $u \in W^{1,1}(\Omega)$, and thus this space is expected to be the appropriate function space for weak solutions to (1). But it is not reflexive and thus does not guarantee the weak compactness of bounded sets. While, the relaxed functional of the area functional in the $L^1(\Omega)$ norm

$$A(u,\Omega) := \inf\{\liminf_{j\to\infty} \int_\Omega \sqrt{1+|\nabla u_j|^2}dx; \{u_j\} \subset W^{1,1}(\Omega),\ \text{s-}\lim_{j\to\infty} u_j = u \text{ in } L^1(\Omega)\}$$

is finite whenever the distributional derivative Du is an $\boldsymbol{R}^n$ valued finite Radon measure in Ω. Such a function is called a function of bounded variation in Ω, or simply a BV function in Ω. The vector space of all BV functions in Ω is denoted by $BV(\Omega)$. It is a Banach space equipped with the norm $\|u\|_{BV}=\|u\|_{L^1(\Omega)} + |Du|(\Omega)$.[1] For a bounded set B in $BV(\Omega)$, there exist a subsequence $\{u_m\} \subset B$ and a function $u \in BV(\Omega)$ such that $u_m \to u$ strongly in $L^1(\Omega)$ and $Du_m \rightharpoonup Du$ in the sense of distributions.

[1] Given a vector valued Radon measure μ, we write its total variation as $|\mu|$.

Thus $BV(\Omega)$ satisfies a kind of compactness for bounded sets. These facts suggest that equation (1) should be treated in the class of BV functions.

In [2, 5, 6] equation (1) is investigated with initial and boundary conditions

$$u(0,x) = u_0(x), \qquad \frac{\partial u}{\partial t}(0,x) = v_0(x), \qquad x \in \Omega, \tag{2}$$

$$u(t,x) = 0, \qquad x \in \partial\Omega \tag{3}$$

in the space of BV functions. All of these works have obtained basically that *a sequence of approximate solutions to* (1) *converges to a function* u *in* $L^\infty((0,T); L^2(\Omega) \cap BV(\Omega))$, and that, *if* u *satisfies the energy conservation law, it is a weak solution to* (1) *in the space of* BV *functions*, which is in the sequel referred to as a *BV solution*. In [2] approximate solutions are constructed by Ritz-Galerkin method, while in [5, 6] by Rothe's method. In [2] a further technical assumption is required, while in [5, 6] it is removed. In [2, 5] the boundary condition is not essentially discussed, while in [6] it is discussed. We more comment on the last point. Seemingly the main theorem of [5] asserts that the function u satisfies the boundary condition; however Dirichlet boundary condition is in fact implicitly assumed in the energy conservation law (compare to [6, Section 1]). The approximation method employed in [5, 6] suggests that the most appropriate weak formulation of Dirichlet condition (3) is not to suppose the trace vanishes but to replace $A(u,\Omega)$ with $A(u,\overline{\Omega})$, the value of the measure of $\overline{\Omega}$ defined by $A(u,\cdot)$, where u is regarded as the null extension of u to a domain $\tilde{\Omega}$ containing $\overline{\Omega}$ (for details, refer to [6]). Remark that this weaker formulation of (3) makes the condition of energy conservation law weaker. In [6] it is proved that the same result still holds even if we only suppose this weaker condition.

Rothe's approximation method employed in [5, 6] is a method of semidiscretization in time variable. Hence in this method we should solve elliptic equations with respect to space variables, and the most effective method of solving an elliptic equation in the BV space is a direct variational method; indeed in [5, 6] elliptic equations are solved by minimizing variational functionals. In this respect this method is essentially the same as the method of minimizing movements. The minimizing movement theory is proposed by E. De Giorgi [3] and in terms of this theory the result in [5, 6] can be said, *if a generalized minimizing movement corresponding to* (1) *satisfies energy conservation law, then it is a* BV *solution.*

In this talk I hope to review my results in [5, 6] and discuss on sevral related topics, in particular, in linear approximation.

参考文献

[1] D. Fujiwara, A. Inoue, and S. Takakuwa, *A varifold solution of nonlinear wave equation of a membrane*, Proc. Japan Acad. Sci. **60** (1984), 113–116.

[2] D. Fujiwara and S. Takakuwa, *A varifold solution to the nonlinear equation of motion of a vibrating membrane*, Kodai Math. J. **9** (1986), 84–116, correction, ibid. 14 (1991), 310-311.

[3] E. De Giorgi, *New problems on minimizing movements*, Boundary Value Problems for PDE and Applications, Masson, 1993, pp. 81–98.

[4] A. Hoshiga, *The asymptotic behaviour of the radially symmetric solutions to quasilinear wave equations in two space dimensions*, Hokkaido Math. J. **24** (1995), 575–615.

[5] K. Kikuchi, *An analysis of the nonlinear equation of motion of a vibrating membrane in the space of BV functions*, J. Math. Soc. Japan **52** (2000), 741–766.

[6] ———, *A remark on Dirichlet boundary condition for the nonlinear equation of motion of a vibrating membrane*, Nonlinear Analysis **47** (2001), 1039–1050.

An inverse problem and Green's formula based on Dirichlet space theory

Hiroshi Kaneko

概要

The Green's formula based on Dirichlet space theory provides us with an approximater for the outer normal derivative of a function in Dirichlet space, co-energy measure between an exhaustion function and the function. In this small article, applying this principle, we will get some conditions under which uniqueness problem can be solved even in locally compact space. In case of Euclidean space, this method eliminates assumption on smoothness of the boundaries of domains.

Introduction

In this small article, we will attempt at approaching inverse problems based on Dirichlet space theory, especially at coping with uniqueness problem by applying Green's formula in [K1] relied only on Dirichlet space theory and existence of exhaustion function.

In section 2, we recall the notion of pseudo Jordan domain and present a summary of the section of the author's paper [K2] which shows how Martin-Kuramochi boundary is attached to a locally compact Hausdorff space. Ideal boundaries such as Martin-Kuramochi boundary enable us to give the definition of strong $(\mathcal{E}, u)$-Caccioppoli set introduced as an enhancement of strong Caccioppoli set in [C-F-W] based on a Dirichlet space $(\mathcal{E}, \mathcal{F})$ on the space.

In section 3, we will see the Green's formula provides us with a co-energy measure between an exhaustion function and a function in Dirichlet space as an approximater for the outer normal derivative of the function. Thanks to this principle, we can get some conditions under which uniqueness problem can be solved even in locally compact space. We finally states that the Green's formula in [K1] provides a criterion as regarding which condition on domain implies strong $(\mathcal{E}, u)$-Caccioppoli set.

We will see in section 4 that in case of Euclidean space this method gives an enhancement of existing result obtained by V. Isakov [I, Theorem 2.2.1]. In fact, we can replace smoothness of the boundaries with a modified Minkowski content condition, outer conic condition and a condition related to polarity of the intersection of two domains. In section 5, we also see some assertion without assuming the polarity of the intersection of two domains.

For notations and full detail on Dirichlet space theory, the reader is referred to the book [F-O-T].

[C 1] Z. Q. Chen, On reflected Dirichlet space, Probab.Theory Relat. Fields **94** (1993) 135–162.

[C 2] Z. Q. Chen Pseudo Jordan Domains and Reflecting Brownian Motions, Probab.Theory Relat. Fields, **94** (1993) 271–280.

[C-F-W] Z. Q. Chen, P. J. Fitzsimmons and R. J. Williams, Reflecting Brownian motion: Quasimartingales and Strong Caccioppoli sets, Potential Analysis **2** (1993) 219–243.

[E-G] L. C. Evans, R. F. Gariepy Measure theory and fine properities of functions, (1992) CRC Press, Boca Raton, New York, Tokyo.

[E-S] A. E. Eremenko and M. L. Sodin The value distribution of meromorphic functions and meromorphic curves from the point of view of potential theory, St. Petersburg Math. **3** (1992) 109–135.

[F 1] M. Fukushima A construction of reflecting barrier Brownian motions for bounded domain, Osaka J. Math. **4** (1967) 183–215.

[F 2] M. Fukushima Regular representation of Dirichlet spaces, Trans Am. Math. Soc. **155** (1971) 455–473.

[F 3] M. Fukushima On Semi-martingale characterizations of functionals of a symmetric Markov processes, Electric Journal of Probability **4** (1999) 1–32.

[F-O-T] M. Fukushima, M. Oshima and M. Takeda Dirichlet forms and symmetric Markov processes, (1994) Walter de Gruyter Berlin.

[G-T] D. Gilbarg and N. S. Trudinger Elliptic partial differential equations of second order, (1977) Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York.

[I] V. Isakov Inverse source problems, (1991) American Mathematical Society, Mathematical Surveys and Monographs Rhode Island.
[K 1] H. Kaneko Liouville Theorems based on symmetric diffusions, Bull. Soc. Math. France **124** (1996) 545-557.
[K 2] H. Kaneko Martin-Kuramochi boundary and reflecting symmetric diffusion, Probab. Theory Related Fields **117** (2000) 533-550.
[K-T] T. Kawabata and M. Takeda On uniqueness problem for lacal Dirichlet, Osaka. J. Math. **33** (1996) 881-893.
[S] M. L. Silverstein Symmetric Markov processes (Lecture Notes in Math., Vol. 426), (1974) Springer Berlin, Heidelberg, New York.

Ornstein-Uhlenbeck 作用素を含むある非線形放物型方程式の解の各点評価とその確率制御への応用

藤田 安啓 (富山大・理)

1. はじめに

この講演では次の非線形放物型方程式を考える：

$$
(1)\qquad \begin{cases} \eta_t = \dfrac{1}{2}\Delta\eta - Dw(x)\cdot D\eta + \beta\,\eta \\ \qquad\qquad + \dfrac{1}{2}|D\eta|^2 \quad \text{in } (0,\infty)\times \mathbb{R}^d, \\ \eta(0,\cdot) = \psi(\cdot) \quad \text{in } \mathbb{R}^d. \end{cases}
$$

ここで, $\beta > 0$ は与えられた定数, また ψ, w は $\mathbb{R}^d$ 上の与えられた関数とする. w については, 次を仮定する：

$$
(2)\qquad \begin{cases} w \in C^\infty(\mathbb{R}^d), \\ 0 < {}^\exists\theta < 1 \ \text{ s.t. } \ \partial^2 w/\partial x_i \partial x_j \in C_b^\theta(\mathbb{R}^d), \\ \qquad\qquad\qquad\qquad (1 \le i, j \le d), \\ {}^\exists\alpha \ge \beta \ \text{ s.t. } \ (\partial^2 w(x)/\partial x_i \partial x_j) \ge \alpha I_d, \\ \qquad\qquad\qquad\qquad (x \in \mathbb{R}^d). \end{cases}
$$

このとき, 作用素 $L = \dfrac{1}{2}\Delta - Dw(x)\cdot D$ は $\mathbb{R}^d$ 上の非有界な係数を持つ楕円型作用素の典型的な例として研究されてきた ([2], [3], [5]). 特に, $w(x) = \alpha|x|^2/2$ のとき, L は Ornstein-Uhlenbeck 作用素になる. この講演の目的は, 次の 3 点である：

- (1) の大域的古典解の存在・一意性を示すこと,
- その解の上と下からの各点評価を導き, 漸近挙動を調べること,
- 上の結果の確率制御への応用.

参考文献

[1] L. Amour and M. Ben-Artzi, *Global existence and decay for viscous Hamilton-Jacobi equations*, Nonlinear Analysis Theory Methods & Appl. 31 (1998), pp. 621–628.

[2] S. Cerrai, *Second Order PDE's in Finite and Infinite Dimension. A Probabilistic Approach*, Lecture Notes in Mathematics, 1762. Springer-Verlag, Berlin, 2001.

[3] G. Da Prato and B. Goldys, *Elliptic operators on* $\mathbb{R}^d$ *with unbounded coefficients*, J. Differential Equations, 172 (2001), pp. 333–358.

[4] W. H. Fleming and H. M. Soner, Controlled Markov Processes and Viscosity Solutions, Springer-Verlag, 1991.

[5] A. Lunardi, *Schauder theorems for linear elliptic and parabolic problems with unbounded coefficients in* $\mathbb{R}^n$, Studia Math., 128 (1998), pp. 171–198.

Monge's problem with a quadratic cost by the zero-noise limit of h-path processes

Toshio Mikami, Hokkaido University

Let $L : \mathbf{R}^d \to [0,\infty)$ be convex, P_0 and P_1 be Borel probability measures on $\mathbf{R}^d$, and put

$$V(P_0,P_1) := \inf\{\int_{\mathbf{R}^d} L(\psi(X)-X)P_0(dx) : P_0(\psi(X)\in dx) = P_1(dx)\}. \tag{4}$$

The study of the minimizer of (4) can be considered as a special case of Monge's problem.

Kantorovich's approach to Monge's problem is to study the minimizer of the following relaxed problem:

$$\begin{aligned}\tilde{V}(P_0,P_1) \quad := \quad & \inf\{\iint_{\mathbf{R}^d\times\mathbf{R}^d} L(y-x)\mu(dxdy) \\ & : \mu(dx\times\mathbf{R}^d) = P_0(dx), \mu(\mathbf{R}^d\times dy) = P_1(dy)\}.\end{aligned} \tag{5}$$

If there exists a Borel measurable function ψ, on $\mathbf{R}^d$, such that the minimizer of (5) is $P_0(dx)\delta_{\psi(x)}(dy)$, then $V(P_0,P_1) = \tilde{V}(P_0,P_1)$ and ψ is a minimizer of (4).

This is called the Monge-Kantorovich problem and plays a crucial role in many fields and has been studied by many authors.

It is easy to see that the following holds:

$$\tilde{V}(P_0,P_1) = \inf\left\{E\left[\int_0^1 L\left(\frac{d\phi(t)}{dt}\right)dt\right]\right\}, \tag{6}$$

where the infimum is taken over all absolutely continuous stochastic processes $\{\phi(t)\}_{0\le t\le 1}$ for which $P(\phi(t)\in dx) = P_t(dx)$ $(t=0,1)$. Indeed, the minimizer of (6) is linear in t.

It seems likely that the h-path process converges, as $\varepsilon\to 0$, to the minimizer of (6) with $L(u) = |u|^2$. But it is not trivial that this limit is a function of t and X_o since a continuous strong Markov process which is of bounded variation in time is not always a function of the initial point and time.

In this talk, independently of known results on the Monge-Kantorovich problem, we show that $V_\varepsilon(P_0,P_{1,\varepsilon})$ converges to $V(P_0,P_1)$ and $X_\varepsilon(1)$ converges, in L^2, to the minimizer of (4) as $\varepsilon\to 0$, when $L(u) = |u|^2$. As a by-product, we give a new proof of the existence of the minimizer of (4) with $L(u) = |u|^2$.

REMARK: If $P_0(dx)$ is absolutely continuous with respect to dx and $L(u) = |u|^2$, then (4) and (5) have the unique minimizers $D\varphi(x)$ and $P_0(dx)\delta_{D\varphi(x)}(dy)$ respectively, where $\varphi : \mathbf{R}^d \to (-\infty,\infty]$ is convex.

参考文献

[1] Brenier Y, Décomposition polaire et réarrangement monotone des champs de vecteurs, C. R. Acad. Sci. Paris Ser. I Math. **305,** (1987) 805–808.

[2] Brenier Y, Polar factorization and monotone rearrangement of vector-valued functions, Comm. Pure Appl. Math. **44,** (1991) 375–417.

[3] Evans LC, Partial differential equations and Monge-Kantorovich mass transfer, *Current developments in mathematics, 1997 (Cambridge, MA)* (Int. Press, Boston, MA, 1999) 65–126.

[4] Knott M and Smith CS, On the optimal mapping of distributions, J. of Optimization Theory and Applications **43,** (1984) 39–49.

[5] Knott M and Smith CS, Note on the optimal transportation of distributions, J. of Optimization Theory and Applications **52**, (1987) 323–329.

[6] Rachev ST and Rüschendorf L, *Mass transportation problems, Vol. I: Theory* (Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, Tokyo, 1999).

[7] Rüschendorf L and Rachev ST, A characterization of random variables with minimum L^2-distance, J. of Multivarite Analysis **32,** (1990) 48–54.

[8] Villani C, *Topics in Optimal Transportation, Graduate Studies in Mathematics Vol. 58* (Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2003).

確率論と幾何解析

2003年9月16日(火)~9月18日(木)

横浜市立大学金沢八景キャンパスカメリアホール

『確率論と幾何解析』の研究集会は，2003年9月16日(火)~9月18日(木)に横浜市立大学金沢八景キャンパス，カメリアホールで行われた．プログラムは以下に掲げる通りである．4つの講演の予稿をその後に述べるが，URL

`http://www.ms.saga-u.ac.jp/ ogura/kaken/Yokohama/program.html`
にそれ以外の予稿も掲げている．

解析に興味を持つ幾何学者と，確率論学者の 交流が図られ，有意義であった． なお，Short communicationsでは，

桑江一洋(横浜市立大学)
A Liouvile type theorem for harmonic maps to metric space target via symmetric Markov processes

小倉幸雄（佐賀大学)
On a Class of One-dimensional Diffusions

の二つの講演が行われた．以下に，上のURLに掲げられなかった二つの講演の概略を述べる．

Mark Pinsky (Northwestern University)
Local stochastic differential geometry:
feeling the shape of a manifold with Brownian motion

多様体上のブラウン運動の局所的な漸近挙動から，多様体の特性を引き出すことが出来る． 例えば，以下のような定理が得られる．(M,g)を完備リーマン多様体とし，(X_t,P_x)をその上のブラウン運動とする．B_εをmを中心とする，半径εの測地球とする．このとき，$f\in C^\infty$ 次の局所的平均量が定義される．

$$\mathcal{M}_m(\varepsilon,f):=\int_{\partial B_\varepsilon} f\,dv_{d-1},$$
$$\mathcal{L}_m(\varepsilon,f):=\int_{S^{d-1}(1)} f(\exp_m(\varepsilon u))\omega(du),$$
$$\mathcal{E}_m(\varepsilon,f):=E_m[f(X_{T_\varepsilon})].$$

ここで，dv_{d-1}は測地球面∂B_ε上の体積要素，ωは$d-1$次元単位球面S^{d-1}上の体積要素，$\exp_m$は点mにおける指数写像で，T_εはmを出発するブラウン運動の∂B_εへの初度到達時刻である．このとき次の定理が成り立つ．

定理 全ての $m \in M$ と全ての $f \in C^\infty$ に対して

$$\mathcal{E}_m(\varepsilon, f) - \mathcal{M}_m(\varepsilon, f) = o(\varepsilon^4), \qquad \varepsilon \downarrow 0$$

が成り立てば，g はアインシュタイン計量となる．すなわち $\rho_{ij} = \tau g_{ij}$ が成り立つ．ただし，ρ_{ij} はリッチ曲率，τ はスカラー曲率である．

同様に，全ての $m \in M$ と全ての $f \in C^\infty$ に対して

$$\mathcal{E}_m(\varepsilon, f) - \mathcal{L}_m(\varepsilon, f) = o(\varepsilon^4), \qquad \varepsilon \downarrow 0$$

が成り立てば，g はアインシュタイン計量となる．

また，∂B_ε への初度到達時刻 T_ε そのものの平均量による特徴付けや，T_ε と到達地 $X(T_\varepsilon)$ の同時分布を用いた特徴付けなどがあり，それらのことの概観も与えられた．これらの結果は，それ自身興味あるものであるが，もっと進んで調和多様体のブラウン運動の局所的な量による特徴づけを展望するものである．しかし，それは未だ解決されていない．

更に，氏の有名な結果である，多様体上のブラウン運動の等方向的測地輸送過程による近似定理も紹介された．

Toshikazu Sunada (Meiji University) 砂田 利一 (明治大学)
Crystal lattices and convex polyhedra

結晶格子とは結晶内の原子の微視的な配列にちなんで命名されたもので自由アーベル群 Γ を許容する無限グラフ X のことである. Γ は X の格子群と呼ばれ, X に自由に作用し, 有限商 $X_0 := \Gamma \backslash X$ を生成する. 正方格子, 6 角格子, 三角格子などは結晶格子の典型的な例である. この講演の目的は周期的なランダムウォークに対応する結晶格子上の推移作用素 L のスペクトル的性質について議論することである. 結晶格子のグロモフ・ハウスドルフ極限の細かい構造は大偏差原理と格子群 Γ の実指標によってねじ曲げられた推移作用素に対するブロッホ理論との関連で議論されている. 組み合わせ論的方法で構成された凸多面体は重要な役割を担う. 注意にしておくことは作用素 $I - L$ はラプラシアン＋ベクトル場 (ずれの項) の離散類似物とみなされることである. 実際，ここでのいくつかの議論は周期的多様体上の拡散過程に対しても有効である.

Program

16 September

13:30–14:20 Mark Pinsky (Northwestern University)
Local stochastic differential geometry:
feeling the shape of a manifold with Brownian motion

14:30–15:20 Satoshi Ishiwata (Tohoku University) 石渡 聡 (東北大学)
Some analytic properties on nilpotent covering graphs

15:30–16:20 Motoko Kotani (Tohoku University) 小谷 元子 (東北大学)
The magnetic transition operators on a crystal lattice

16:30–17:20 Atsushi Katsuda (Okayama University) 勝田 篤 (岡山大学)
Heat kernels on nilpotent coverings and related topics

17 September

10:00–10:50 Junya Takahashi (Tohoku University) 高橋 淳也 (東北大学)
Vanishing of cohomology groups and large eigenvalues of the Laplacian on p-forms

11:10–12:00 Atsushi Kasue (Kanazawa University) 加須栄 篤 (金沢大学)
Convergence of Riemannian manifolds and harmonic maps

13:30–14:20 Shin-ichi Ohta (Tohoku University) 太田 慎一 (東北大学)
Regularity of harmonic functions on metric spaces

14:30–15:20 Takefumi Kondo (Kyoto University) 近藤 剛史 (京都大学)
Probability distribution of metric measure spaces

15:30–16:20 Takashi Shioya (Tohoku University) 塩谷 隆 (東北大学)
Geometric aspects of variational convergence I

16:30–17:20 Short communications

18 September

10:00–10:50 Yusuke Higuchi (Showa University) 樋口 雄介 (昭和大学)
Non-bipartiteness of graphs and the upper bounds of Dirichlet forms

11:00–11:50 Takashi Shioya (Tohoku University) 塩谷 隆 (東北大学)
Geometric aspects of variational convergence II

13:30–14:20 Mark Pinsky (Northwestern University)
Pointwise Fourier inversion and related eigenfunction expansions

14:30–15:20 Kazumasa Kuwada (Kyoto University) 桑田 和正 (京都大学)
On large deviations for random currents induced from stochastic line integrals

15:30–16:20 Hiroshige Shiga (Tokyo Institute of Technology) 志賀 啓成 (東京工業大学)
Deformation of Riemann surfaces and potential theory

16:30–17:20 Toshikazu Sunada (Meiji University) 砂田 利一 (明治大学)
Crystal lattices and convex polyhedra

Convergence of Riemannian Manifolds and Harmonic Maps

Atsushi Kasue *

In this talk, I would like to consider a sequence of compact Riemannian manifolds, or more generally, certain Dirichlet spaces, and discuss the convergence of energy functionals of maps from them to a Riemannian manifold.

1 Let $X = (X, \mu, \mathcal{E})$ be a regular Dirichlet space. We consider the following properties of X:
(i) the semigroup P_t associated with $\mathcal{E}$:

$$||P_t u||_{L^\infty} \leq \frac{A}{t^{\nu/2}}||u||_{L^2}, \quad u \in L^2(X), \; 0 < t \leq 1$$

for some positive constants A and ν, or equivalently P_t admits an integral kernel $p(t,x,y)$ satisfying

$$p(t,x,y) \leq \frac{A}{t^{\nu/2}}, \quad a.e.\ (x,y) \in X \times X, \; 0 < t \leq 1,$$

(ii) $\mu(X) = 1$,
(iii) $P_t 1 = 1$.

Given positive numbers A and ν, we denote by $\mathcal{F}_{A,\nu}$ the set of regular Dirichlet spaces $X = (X, \mu, \mathcal{E})$ satisfying the properties (i), (ii), and (iii), and set $\mathcal{F} = \cup\{\mathcal{F}_{A,\nu} : A > 0, \nu > 0\}$. We firstly note that for $X = (X, \mu, \mathcal{E}) \in \mathcal{F}$, there exists a regular reperesentaion $\tilde{X} = (\tilde{X}, \tilde{\mu}, \tilde{\mathcal{E}})$ of X satisfying the following three properties: (iv) the state space $\tilde{X}$ is compact, (v) the semigroup $\tilde{P}_t$ of $\tilde{\mathcal{E}}$ admits a continuous kernel $\tilde{p}(t,x,y)$ $(x, y \in \tilde{X})$, and (vi) if we set

$$d^s(x,y) = \left(\sup_{t>0} e^{-(t+1/t)}(\tilde{p}(t,x,x) + \tilde{p}(t,y,y) - 2\tilde{p}(t,x,y))\right)^{1/2}, \quad x, y \in \tilde{X},$$

then d^s becomes a distance on $\tilde{X}$ which induces the same topology of $\tilde{X}$. In addition, such a regular representation of $X = (X, \mu, \mathcal{E})$ is unique in the sense that if $\tilde{X}' = (\tilde{X}', \tilde{\mu}', \tilde{\mathcal{E}}')$ is another one satisfying the same properties, then there exists a homeomorphism $f; \tilde{X} \to \tilde{X}'$ between $\tilde{X}$ and $\tilde{X}'$ such that f preserves the kernel functions (i.e., $\tilde{p}'(t, f(x), f(y)) = \tilde{p}(t,x,y),\ x, y \in \tilde{X}$) and the measures (i.e., $f_*\tilde{\mu} = \tilde{\mu}'$).

In what follows, $X = (X, \mu, \mathcal{E}) \in \mathcal{F}$ is assumed to possess the properties (iv), (v) and (vi) desctribed above and we denote by μ_X, $\mathcal{E}_X$, $P_{X;t}$, and p_X respectively the measure, the Dirichlet form, the semigroup, and the kernel function of X. Since p_X is continuous, $P_{X;t}(\mathcal{B}(X)) \subset C(X)$, where $\mathcal{B}(X)$ stands for the set of bounded measurable functions on X.

Let us now introduce a distance on $\mathcal{F}$ as follows. Given X, Y in $\mathcal{F}$ and a positive number ε, a Borel measurable map $f : X \to Y$ is called an ε-spectral approximating map if it satisfies

$$e^{-(t+1/t)}|p_X(t,x,x') - p_Y(t, f(x), f(x'))| < \varepsilon, \quad t > 0, \; x, x' \in X.$$

The spectral distance $SD(X,Y)$ between X and Y is by definition the greatest lower bound for positive numbers ε such that there exist ε-spectral approximating maps $f : X \to Y$ and $h : Y \to X$. The spectral distance SD gives a uniform topology on the set of equivalence classes of $\mathcal{F}$.

We recall the following

*Department of Mathematics, Kanazawa University, Kanazawa 920-1192

Theorem 1 (Kumura - K. '94, '96) *Given positive numbers A and ν, the metric space $(\mathcal{F}_{A,\nu}, SD)$ is precompact, that is, any sequence in $\mathcal{F}_{A,\nu}$ contains SD-Cauchy subsequences. Moreover let $\{X_n = (X_n, \mu_n, \mathcal{E}_n)\}$ be an SD-Cauchy sequence. Then there exists a compact metric space $(\hat{X}, \hat{d}^s)$, a Radon measure μ on $\hat{X}$, a nonnegative continuous function $p(t,x,y)$ on $(0,\infty)\times\hat{X}\times\hat{X}$, Borel measurable maps $f_n : X_n \to \hat{X}$, $h_n : \hat{X} \to X_n$, and a sequence of positive numbers $\{\varepsilon_n\}$ converging to zero as $n\to\infty$, which satisfy the following properties:*

(1) *The function $p(t,x,y)$ is the kernel of a strongly continuous semigroup $\{P_t : t > 0\}$ on $L^2(X,\mu)$ associated with a regular Dirichlet form $\mathcal{E}$ on $L^2(X,\mu)$, where X denotes the support of μ.*

(2) *The regular Dirichlet space $(X, \mu, \mathcal{E})$ belongs to the same classe $\mathcal{F}_{A,\nu}$.*

(3) *The distance $\hat{d}^s$ is given by*

$$\hat{d}^s(x,y) = \left(\sup_{t>0} e^{-(t+1/t)}(p(t,x,x)+p(t,y,y)-2p(t,x,y))\right)^{1/2}, \quad x,y\in\hat{X}.$$

(4) *The push-forward $f_{n*}\mu_n$ of the measure μ_n by f_n converges to the measure μ with respect to the vague topology.*

(5) *The maps f_n and h_n are ε_n-spectral approximating maps in the sense that*

$$\sup_{t>0} e^{-(t+1/t)}|p_{X_n}(t,x,y) - p(t,f_n(x),f_n(y))| < \varepsilon_n, \quad x,y\in X_n$$

$$\sup_{t>0} e^{-(t+1/t)}|p_{X_n}(t,h_n(x),h_n(y)) - p(t,x,y)| < \varepsilon_n, \quad x,y\in X$$

and furthermore

$$\hat{d}^s(f_n\circ h_n(x), x) < \varepsilon_n, \quad x\in X.$$

(6) *The i-th eigenvalue $\lambda_i^{(n)}$ of $\mathcal{E}_n$ for each $i = 0,1,2,\ldots$ converges to the i-th eigenvalue λ_i of $\mathcal{E}$ as $n\to\infty$, and further letting a positive integer i be fixed, for each eigenfunction u of $\mathcal{E}_n$ with eigenvalue $\lambda_i^{(n)}$ and unit L^2-norm, there exists a continuous function v on $\hat{X}$ which is an eigenfunction of eigenvalue λ_i on X, such that*

$$\sup_{x\in X_n} |u(x) - v(f_n(x))| < \varepsilon_{i;n} \ ; \ \sup_{x\in\hat{X}} |u(h_n(x)) - v(x)| < \varepsilon_{i;n},$$

where $\{\varepsilon_{i;n}\}$ is a sequence of positive numbers tending to zero as $n\to\infty$.

2 Let $X = (X,\mu,\mathcal{E})$ be a regular Dirichlet space and N a complete Riemannian manifold of dimension d. We would like to define a class of maps of finite energy from an open set Ω of X into N. For this, we assume that X is strongly local and also that N is isometrically embedded into a Euclidean space $\mathbf{R}^D$ of dimension D. Let us denote the embedding by $I = (I^1,\ldots,I^D)$. A measurable map u of Ω to N is said to be of locally finite energy if each component $I^\alpha(u)$ $(\alpha = 1,\ldots,D)$ belongs to $L^{1,2}_{loc}(\Omega)$. The set of all such maps is denoted by $L^{1,2}_{loc}(\Omega,N)$ and for each $u\in L^{1,2}_{loc}(\Omega,N)$, a Radon measure $\mu^N_{\langle u\rangle}$ on Ω is defined by

$$\mu^N_{\langle u\rangle} = \sum_{\alpha=1}^{D} \mu_{\langle I^\alpha(u), I^\alpha(u)\rangle}.$$

where $\mu_{\langle f,f\rangle}$ stands for the energy measure of a function $f\in L^{1,2}_{loc}(X)$. The measure $\mu^N_{\langle u\rangle}$ is also called the energy measure of a map u and if the integral $\int_\Omega d\mu^N_{\langle u\rangle}$ is finite, it is called the energy of u on Ω. We note that the energy of a map is independent of the choice of the isometric embedding of the target N (cf. J. Picard '01).

Let $X_n = (X_n,\mu_n,\mathcal{E}_n)$, $(\hat{X},\hat{d})$, $X = (X,\mu_X,\mathcal{E}_X)$ and $f_n : X_n\to\hat{X}$ be as in Theorem 1, and assume that X_n and X are (strongly) local. Let $\mathcal{C}$ be the algebra generated by the eigenfunctions of $\mathcal{E}_X$. Then $\mathcal{C}$ is a subalgebra of $C(\hat{X})\cup D[\mathcal{E}_X]$ and becomes a core of $\mathcal{E}_X$, namely, $\mathcal{C}$ is dense both in $C(\hat{X})$ and in $D[\mathcal{E}_X]$. Let us define a linear map $\Phi_n : \mathcal{C}\to L^2(X_n)$ by $\Phi_n(u) = {f_n}^*u$ $(u\in\mathcal{C})$. We say that a sequence of functions $u_n \in L^2(X_n)$ strongly converges to a function $u \in L^2(X)$ as $n \to \infty$ if there exists a sequence $\{\tilde{u}_k\}$ in $\mathcal{C}$ such that

$$\lim_{k\to\infty} |u - \tilde{u}_k|_{L^2} = 0; \ \lim_{k\to\infty} \limsup_{n\to\infty} |\Phi_n(\tilde{u}_k) - u_n|_{L^2} = 0,$$

and $u_n \in L^2(X_n)$ weakly converges to a function $u \in L^2(X)$ as $n \to \infty$ if $\lim_{n\to\infty} \int_{X_n} u_n v_n \, d\mu_n = \int_{X_n} uv \, d\mu$ for any $v \in L^2(X)$ and every $v_n \in L^2(X_n)$ which strongly converges to v as $n \to \infty$.

Now given a sequence of measurable maps $u_n : X_n \to N$, we say that u_n strongly (resp. weakly) converges to a measurable map $u : X \to N$ if for any Lipschitz continuous function F on N, $F(u_n)$ strongly (resp. weakly) convergs to $F(u)$ as $n \to \infty$. In the case where u_n and u are all continuous, we say that u_n uniformly converges to u as $n \to \infty$ if $\sup_{x\in X_n} d_N(u_n(x), u(f_n(x)))$ tends to zero as $n \to \infty$; this is the case if and only if $F(u_n)$ uniformly converges to $F(u)$ as $n \to \infty$ for any Lipschitz continuous function F on N.

Theorem 2 *Let $X_n = (X_n, \mu_n, \mathcal{E}_n)$, $(\hat{X}, \hat{d})$, $X = (X, \mu_X, \mathcal{E}_X)$ and $f_n : X_n \to \hat{X}$ be as in Theorem 1, and assume that X_n and X are local. Let N be a complete Riemannian manifold.*

(1) *For a sequence of maps $u_n \in L^{1,2}(X_n, N)$ which weakly converges to a L^2 map $u : X \to N$ as $n \to \infty$. Then one has*

$$\int_X d\mu^N_{\langle u\rangle} \le \liminf_{n\to\infty} \int_{X_n} d\mu^N_{\langle u_n\rangle} (\le +\infty).$$

(2) *Let $\{u_n\}$ be a sequence of maps $u_n \in L^{1,2}(X_n, N)$ such that the energy of u_n is bounded by a constant and further the image of u_n is included in a bounded set of N for all n. Then there exists a subsequence $\{u_m\}$ of $\{u_n\}$ and a map $u \in L^{1,2}(X, N)$ such that u_m strongly converges to u as $m \to \infty$.*

(3) *Suppose that X satisfies the property*

$$\lim_{t\to 0} P_{X;t} f(x) = f(x), \quad f \in C(X), \ x \in X.$$

Then for a map $u \in C(X, N) \cap L^{1,2}(X, N)$, there exists a sequence of maps $u_n \in C(X_n, N) \cap L^{1,2}(X_n, N)$ such that u_n uniformly converges to u and for any continuously differentiable functions F and G on N, the push-forward $f_{n*}\mu_{\langle F(u_n), G(u_n)\rangle}$ of the signed measure $\mu_{\langle F(u_n), G(u_n)\rangle}$ weakly converges to the signed measure $\mu_{\langle F(u), G(u)\rangle}$; in particular,

$$\lim_{n\to\infty} \int_{X_n} d\mu^N_{\langle u_n\rangle} = \int_X d\mu^N_{\langle u\rangle}.$$

3 Let us consider a strongly local, regular Dirichlet space $X = (X, \mu, \mathcal{E})$. We denote by $\mathcal{A}_X$ the subspace of all functions u in $L^{1,2}_{loc}(X)$ such that the energy measure $\mu_{\langle u,u\rangle}$ is absolutely continuous with respect to the reference measure μ, so that $\mu_{\langle u,u\rangle} = \Gamma(u,u)\mu$ for some $\Gamma(u,u) \in L^1_{loc}(X)$. Then a pseudo-distance $\rho_{\mathcal{E}}$ on X can be introduced by

$$\rho_{\mathcal{E}}(x,y) = \sup\{u(x) - u(y) \ : \ u \in \mathcal{A}_X \cap C(X), \ \Gamma(u,u) \le 1 \ a.e.\}$$

which is called the intrinsic (psuedo-)distance on X. We consider the following property

[C]: *the topology induced by $\rho_{\mathcal{E}}$ is equivalent to the original one of X.*

In what follows, we assume that X satisfies the property [C]. We say that the volume doubling inequality [VD] holds on X if there exist positive constants R and C_D such that for all metric balls $B(x, 2r)$ with $r < R$,

$$\mu(B(x,2r)) \le C_D \mu(B(x,r))$$

and also the (scaled) Poincaré inequality [PI] holds on X if there exist positive constants R and C_P such that for all metric balls $B(x, 2r)$ with $r < R$ and $u \in L^{1,2}_{loc}(X)$,

$$\int_{B(x,2r)} |u - u_{x,r}|^2 d\mu \le C_P r^2 \int_{B(x,2r)} d\mu_{\langle u,u\rangle},$$

where $u_{x,r} = \mu(B(x,r))^{-1} \int_{B(x,r)} u \, d\mu$.

Let N be a compact Riemannain manifold of nonpositive sectional curvature. Given a homotopy class H in $C(X,N)$, we set

$$\sigma(H) = \inf \left\{ \frac{1}{\mu(X)} \int_X d\mu^N_{\langle u \rangle} \mid u \in H \cap L^{1,2}(X,N) \right\}$$

and

$$\Sigma(H) = \{ u \in A \mid \frac{1}{\mu(X)} \int_X d\mu^N_{\langle u \rangle} = \sigma(H) \}.$$

Then under the conditions [VD] and [PI] above, it follows from the standard regularity argument that a minimizer $u \in \Sigma(H)$ (if it exists) satisfies

$$d_N(u(x), u(y)) \leq C \mathrm{diam}(\mathrm{X}, \rho) \sigma(H)^{1/2} \left(\frac{\rho_X(x,y)}{\mathrm{diam}(X,\rho)} \right)^{\alpha}$$

for all $x, y \in X$ with $\rho_X(x,y) < R$, where C and α are positive constants depending only on C_D and C_P, and $\mathrm{diam}(X,\rho)$ stands for the diameter of the metric space (X, ρ_X). Therefore in this case, if $\Sigma(H)$ is not empty for any homotopy class H, then the number of homotopy classess H such that $\sigma(H) \leq \lambda$ for a positive munber λ is finite, and hence we can arrange the set of homotopy classess of $L^{1,2}(X,N) \cap C(X,N)$ in order as follows:

$$0 = \sigma(H_0) < \sigma(H_1) \leq \sigma(H_2) \leq \cdots (\leq +\infty).$$

Here if the number $\nu(X,N)$ of all homotopy classes of $C(X,N)$ is finite, then $\sigma(H_i)$ is taken to be infinite for $i > \nu(X,N)$. We write $\Sigma_i(X,N)$ and $\sigma_i(X,N)$ respectively for the homotopy classes H_i and the energy spectra $\sigma(H_i)$ $(i = 0, 1, 2, \ldots, \nu(X,N))$.

Theorem 3 *Let $X_n = (X_n, \mu_n, \mathcal{E}_n)$, $(\hat{X}, \hat{d})$, $X = (X, \mu_X, \mathcal{E}_X)$ and $f_n : X_n \to \hat{X}$ be as in Theorem 1, and assume that X_n and X are local. Let N be a compact Riemannian manifold of nonpositive sectional curvature. Suppose that each X_n is connected, X_n satisfies the property [C] with respect to the intrinsic distance ρ_n, and the volume doubling inequality [VD] and the scale invariant Poincaré inequality [PI] respectively hold on X_n with some positive constants C_D and C_P independent of n. Suppose further that for all X_n, there exist energy-minimizing maps in every homotopy class of $C(X_n, N)$. Then this holds for X; moreover for each $i < \nu(X,N)+1$, $\sigma_i(X_n, N)$ tends to $\sigma_i(X,N)$ as $n \to \infty$, and the set $\Sigma_i(X_n, N)$ of energy minimizing maps in the homotopy class converges to the set $\Sigma_i(X,N)$ of energy minimizing maps in the homotopy class in the sense that*

(1) for some sequence of positive numbers ε_n which tend to zero as $n \to \infty$, and for any $\phi_n \in \Sigma_i(X_n, N)$, there exists a map $\phi \in \Sigma_i(X,N)$ such that

$$\sup_{x \in X} d_N(\phi(x), \phi_n(h_n(x))) \leq \varepsilon_n; \ \sup_{y \in X_n} d_N(\phi(f_n(y)), \phi_n(y)) \leq \varepsilon_n;$$

(2) given a sequence of $\phi_n \in \Sigma_i(X_n, N)$, there exists a subsequece $\{\phi_m\}$ and a minimizer $\phi \in \Sigma_i(X,N)$ such that as $m \to \infty$, ϕ_m uniformly converges to ϕ and for any $F, G \in C^1(N)$, the push-forward $f_{m*}\mu_{\langle F(\phi_m), G(\phi_m) \rangle}$ of the signed measure $\mu_{\langle F(\phi_m), G(\phi_m) \rangle}$ vaguely converges to $\mu_{\langle F(\phi_m), G(\phi) \rangle}$. In particuler, the push-forward $f_{m*}\mu^N_{\langle \phi_m \rangle}$ of the energy measure of ϕ_m vaguely converges to that of ϕ, $\mu^N_{\langle \phi \rangle}$.

In addition to the results mentioned above, we would like to discuss the convergence of maps of least energy with prescribed boundary values.

GEOMETRIC ASPECTS OF VARIATIONAL CONVERGENCE

TAKASHI SHIOYA (TOHOKU UNIV.)

Variational convergences mean convergences of energy functionals. They are nowadays widely used in analysis, probability theory, geometric analysis, and applied mathematics. De Giorgi first introduced Γ-convergence. More recently, Mosco [8] has defined Mosco convergence of quadratic forms and proved that it is equivalent to the topological convergence of the associated semigroups and resolvent operators, which has earlier been studied by Rellich, Kato, Trotter, etc. (cf. [5, 9]). As a joint work with Kuwae, we develop a systematic theory of variational convergence which is suitable to be applied to the L^p-mapping (function) spaces of Gromov-Hausdorff convergent (cf. [2]) Riemannian manifolds. We refer [7] for the linear theory and a nonlinear extension is now ongoing. In this lecture we survey the theory and show its application.

1. Asymptotic relation

Throughout this article, let X_i and X be metric spaces, where i is any element of a directed set $\{i\}$, and let $\chi := (\bigsqcup_i X_i) \sqcup X$ (disjoint union). We will later apply the settings of this section for L^p-mapping spaces as X_i and X to formulate convergence of L^p-maps on different spaces.

We call a topology satisfying the following (a1)–(a4) an *asymptotic relation for* $\{X_i, X\}$.

(a1) X_i and X are all closed in χ and the restricted topology of χ on each of X_i and X coincides with its original topology.

(a2) For any $x \in X$ there exists a net $x_i \in X_i$ converging to x in χ.

(a3) If $X_i \ni x_i \to x \in X$ and $X_i \ni y_i \to y \in X$ in χ, then we have $d_{X_i}(x_i, y_i) \to d_X(x, y)$.

(a4) If $X_i \ni x_i \to x \in X$ in χ and if $y_i \in X_i$ is a net with $d_{X_i}(x_i, y_i) \to 0$, then $y_i \to x$ in χ.

In the case where X_i and X are all linear spaces over $\mathbb{R}$, an asymptotic relation for $\{X_i, X\}$ is said to be *linear* if the linear structures are continuous in χ:

January 20, 2005

(a5) If $X_i \ni x_i \to x \in X$ and $X_i \ni y_i \to y \in X$ in χ, then we have $ax_i + by_i \to ax + by$ in χ for any $a, b \in \mathbb{R}$.

Notice that a Gromov-Hausdorff convergence $X_i \to X$ induces an asymptotic relation (cf. [2]).

A net $\{f_i : X \supset \mathcal{D}(f_i) \to X_i\}$ of (not necessarily continuous) maps is called a *metric approximation for* $\{X_i, X\}$ if the following (b1)–(b2) are satisfied.

(b1) $\mathcal{D}(f_i)$ is monotone nondecreasing in i and $\bigcup_i \mathcal{D}(f_i)$ is dense in X.

(b2) For any $x, y \in \bigcup_i \mathcal{D}(f_i)$ we have $d_{X_i}(f_i(x), f_i(y)) \to d_X(x, y)$.

In the case where X_i and X are all linear spaces, a metric approximation $\{f_i\}$ for $\{X_i, X\}$ is said to be *linear* if

(b3) f_i are linear maps defined on linear subspaces $\mathcal{D}(f_i)$.

Lemma 1.1. *If $\{X_i, X\}$ has a (linear) metric approximation $\{f_i\}$, then there exists a unique (linear) asymptotic relation for $\{X_i, X\}$ such that $f_i(x) \to x$ in χ for any $x \in \bigcup_i \mathcal{D}(f_i)$.*

2. L^p-TOPOLOGY

We assume that all measure spaces are locally compact Polish spaces with Radon measures. Let M be a measure space, Y a metric space, and $p \geq 1$ a real number. For two measurable maps $u, v : M \to Y$ we define

$$d_{L^p}(u, v) := \left(\int_M d_Y(u(x), v(x))^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}} \leq +\infty,$$

where $\int_M dx$ means the integrating over M by the measure on M. For a point $o \in Y$ we set

$$L^p_o(M, Y) := \{ \, u : M \to Y \mid \text{measurable map with } d_{L^p}(u, o) < +\infty \, \}.$$

If Y is complete (resp. separable, linear), then $L^p_o(M, Y)$ is also complete (resp. separable, linear).

Let M_i and M be measure spaces. A net $\{\varphi_i : M_i \supset \mathcal{D}(\varphi_i) \to M\}$ of maps is called a *measure approximation* if the following (1) and (2) are satisfied.

(c1) φ_i are measurable maps defined on Borel sets $\mathcal{D}(\varphi_i)$.

(c2) The push-forward by φ_i of the measure on M_i vaguely converges to the measure on M, i.e., for any $u \in C_0(M)$,

$$\int_{\mathcal{D}(\varphi_i)} u \circ \varphi_i(x) \, dx \to \int_M u(x) \, dx.$$

Let $\{\varphi_i : M_i \supset \mathcal{D}(f_i) \to M\}$ be a measure approximation with measure spaces M_i and M. Let B be a Banach space and $o_i, o \in B$ be points with $o_i \to o$ (where o is not necessarily the origin). Denote by $C_o(M,B)$ the set of continuous maps $u : M \to B$ such that the set of $x \in M$ with $u(x) \neq o$ is relatively compact. It follows that $C_o(M,B)$ is dense in $L^p_o(M,B)$. For $u \in C_o(M,B)$, we define

$$\Phi_i u(x) := \begin{cases} u \circ \varphi_i(x) & \text{for } x \in \mathcal{D}(\varphi_i), \\ o_i & \text{for } x \in M_i \setminus \mathcal{D}(\varphi_i). \end{cases}$$

Then, $\Phi_i u \in L^p_{o_i}(M_i, B)$. Assume that $d_{L^p}(\Phi_i o, o_i) \to 0$. Let $\mathcal{D}(\Phi_i)$ be the set of $u \in C_o(M,B)$ such that $d_{L^p}(\Phi_j u, o_i) < +\infty$ for any $j \geq i$. It is a theroem that $\bigcup_i \mathcal{D}(\Phi_i) = C_o(M,B)$ and $\{\Phi_i : L^p_o(M,B) \supset \mathcal{D}(\Phi_i) \to L^p_{o_i}(M_i,B)\}$ is a metric approximation, which induces a unique asymptotic relation for $\{L^p_{o_i}(M_i,B), L^p_o(M,B)\}$ by Lemma 1.1. We call the topology on $(\bigsqcup_i L^p_{o_i}(M_i,B)) \sqcup L^p_o(M,B)$ the *L^p-topology* and a convergence for it an *L^p-convergence.*

We moreover extend the target space. Let (Y_i, o_i) and (Y, o) be pointed proper metric spaces such that (Y_i, o_i) converges to (Y, o) in the pointed Gromov-Hausdorff topology. It follows that there exists a Banach space B such that all Y_i and Y can isometrically be embedded into B. Thus, each $L^p_{o_i}(M_i, Y_i)$ is embedded into $L^p_{o_i}(M_i, B)$ and $L^p_o(M,Y)$ into $L^p_o(M,B)$. We define the *L^p-topology on* $\bigsqcup_i L^p_{o_i}(M_i,Y_i) \sqcup L^p_o(M,Y)$ as the restriction of that of $(\bigsqcup_i L^p_{o_i}(M_i,B)) \sqcup L^p_o(M,B)$.

3. Gamma and compact convergence

Let X_i and X be metric spaces and $\{X_i, X\}$ have an asymptotic relation. We give functions $E_i : X_i \to \bar{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ and $E : X \to \bar{\mathbb{R}}$.

We say that E_i *Γ-converges to E* if the following (Γ-1) and (Γ-2) are satisfied:

(Γ-1) For any $x \in X$ there exists a net $x_i \in X_i$ such that $x_i \to x$ and $E_i(x_i) \to E(x)$.

(Γ-2) If $x_i \to x$ then $E(x) \leq \underline{\lim}_i E_i(x_i)$.

A net $x_i \in X_i$ is said to be *bounded* if $d_{X_i}(x_i, y_i)$ is bounded for some convergent $y_i \in X_i$. $\{E_i\}$ is said to be *asymptotically compact* if for any bounded net $x_i \in X_i$ with bounded $\{E_i(x_i)\}$ there exists a convergent subnet of x_i. We say that E_i *converges to E compactly* if E_i Γ-converges to E and if $\{E_i\}$ is asymptotically compact.

Theorem 3.1. *For any $\{E_i\}$ there always exists a Γ-convergent subnet of E_i. Consequently, if $\{E_i\}$ is asymptotically compact, it has a compact convergent subnet.*

The following is a geometric interpretation of compact convergence.

Theorem 3.2. *Assume that the c-sublevel sets $X^c := \{E \leq c\}$ and $X_i^c := \{E_i \leq c\}$ are all proper for any $c \in \mathbb{R}$. Then the following (1) and (2) are equivalent.*

(1) *E_i converges to E compactly.*
(2) *For any $c \in \mathbb{R}$ there exist a net $c_i \searrow c$ of numbers and a net $o_i \in X_i$ of points converging to a point $o \in X$ such that the pointed space $(X_i^{c_i}, o_i)$ converges to (X^c, o) in the Gromov-Hausdorff topology which is compatible with the asymptotic relation for $\{X_i, X\}$.*

Notice that the proper property of X^c, $c \in \mathbb{R}$, implies the lower semi-continuity of E and is equivalent to the Rellich compactness.

4. Mosco convergence over CAT(0) spaces

CAT(0) spaces are generalization of simply connected Riemannian manifolds with nonpositive sectional curvature. For CAT(0) spaces we refer [4]. Notice that if Y is a CAT(0) space then $L_o^2(M, Y)$ is also a CAT(0) space for any measure space M and $o \in Y$, so that it is reasonable to assume that X_i and X are CAT(0).

Let X_i and X be complete separable CAT(0) spaces that have an asymptotic relation. First we generalize weak convergence following [3]. We prefer to say strong convergence as convergence for asymptotic relation, to distinguish it from weak one. We say that a net $x_i \in X_i$ *weakly converges to a point* $x \in X$ iff for any net of geodesic segments γ_i in X_i strongly converging to a geodesic segment γ in X with $\gamma(0) = x$, $\pi_{\gamma_i}(x_i)$ strongly converges to x, where $\pi_A(x)$ denotes the nearest point in A to x for a convex set A.

Lemma 4.1. *Assume that $X_i \ni x_i \to x \in X$ weakly and $X_i \ni y_i \to y \in X$ strongly. Then, we have*

(1) $d_X(x, y) \leq \varliminf d_{X_i}(x_i, y_i)$.
(2) $d_{X_i}(x_i, y_i) \to d_X(x, y)$ *iff $x_i \to x$ strongly.*
(3) *Any bounded sequence $z_i \in X_i$ has a weakly convergent subnet.*

Let $E_i : X_i \to [0, +\infty]$ and $E : X \to [0, +\infty]$ be given functions. We say that E_i *converges to E in the Mosco sense* iff both (Γ-1) in the definition of Γ-convergence and the following (M) hold:

(M) If $X_i \ni u_i \to u \in X$ weakly, then $E(u) \leq \varliminf E_i(u_i)$.

Note that a Mosco convergence implies a Γ-convergence.

For $E : X \to [0, +\infty]$ we define $E^{(\lambda)} : X \to [0, +\infty]$ by

$$E^{(\lambda)}(u) := \inf_{v \in X} (\lambda E(v) + d_{L^2}(u, v)^2), \qquad u \in X,\ \lambda > 0.$$

and call it the *Moreau-Yosida approximation* of E. If E is lower semi-continuous and convex and if $E \not\equiv +\infty$, then for any $u \in X$ there exists a unique $J_E^\lambda(u) \in X$ such that

$$E^{(\lambda)}(u) = \lambda E(J_E^\lambda(u)) + d_{L^2}(u, J_E^\lambda(u))^2.$$

This defines a map $J_E^\lambda : X \to X$, called the *resolvent of E*.

Note that if X is a Hilbert space and if E is a closed quadratic form on X, then we have $J_E^\lambda = (I + \lambda\Delta)^{-1}$, where Δ is an infinitesimal generator associated with E, i.e., $E(u) = (\Delta u, u)$ for any u in the domain of Δ.

Theorem 4.1. *Assume that functionals $E_i : X_i \to [0, +\infty]$ and $E : X_i \to [0, +\infty]$ are all lower semi-continuous and convex and are not identically equal to $+\infty$. If E_i converges to E in the Mosco sense, then for any $\lambda > 0$, the resolvent $J_{E_i}^\lambda$ of E_i converges to the resolvent J_E^λ of E, i.e., if $X_i \ni u_i \to u \in X$ then $J_i^\lambda(u_i) \to J^\lambda(u)$.*

Theorem 4.2 ([7]). *In addition to the assumption of Theorem 4.1, we suppose that X_i and X are all separable Hilbert spaces, the metric approximation is linear, and the E_i and E are all closed quadratic forms. Then the converse of Theorem 4.1 is also true and it is equivalent to that the semigroup $T_t^{(i)}$ associated with E_i strongly converges to the semigroup T_t associated with E for any $t > 0$. In this case, for any λ in the spectrum for E there exists λ_i in the spectrum for E_i such that $\lambda_i \to \lambda$.*

5. Geometric application

Let M_i and M be Riemannian manifolds. We say that M_i *compact Lipschitz converges to* M if for any relatively compact open $O \subset M$ there exist relatively compact open $O_i \subset M_i$ such that O_i Lipschitz converges to O, i.e., there exist bi-Lipschitz maps $f_i : O_i \to O$ such that $\operatorname{dil} f_i, \operatorname{dil} f_i^{-1} \to 1$, where dil denotes the smallest Lipschitz constant.

Theorem 5.1. *Let Y be a complete* CAT(0) *space and let E_i and E be the energy functionals on $L^2(M_i, Y)$ and $L^2(M, Y)$ defined in* [6]. *If M_i compact Lipschitz converges to M then E_i Mosco converges to E and consequently the resolvent for E_i converges to that for E. In particular, if we set $Y := \mathbb{R}$, the resolvent and the semigroup on $L^2(M_i)$ strongly converges to those on $L^2(M)$ respectively. For any λ in the spectrum* *of Laplacian on M there exist λ_i in the spectrum of Laplacian on M_i such that $\lambda_i \to \lambda$.*

Given $n \geq 2$ and $D. > 0$, let (M_i, x_i) be pointed n-dimensional Riemannian manifolds with Ricci curvature $\geq -(n-1)$ which converges to a pointed metric space (M, x_0) with respect to the measured pointed Gromov-Hausdorff topology. Let (Y_i, o_i) be a pointed proper metric spaces which converges to a pointed metric space (Y, o) with respect to the Gromov-Hausdorff topology. Then we have:

Theorem 5.2. *If M is compact then $\{E_i : L^p(M_i, Y_i) \to \bar{\mathbb{R}}\}$ (defined in* [6]*) is asymptotically compact and consequently it has a compact convergent subnet. If M is noncompact then $\{E_i : L^p(M_i, Y_i) \to \bar{\mathbb{R}}\}$ has a Mosco convergent subnet.*

Problem 5.1. Does the limit of E_i is determined only by the structure of M and Y?

References

1. G. Dal Maso, *An introduction to Γ-convergence*, Birkhäuser Boston Inc., Boston, MA, 1993.
2. M. Gromov, *Metric structures for Riemannian and non-Riemannian spaces*, Birkhäuser Boston Inc., Boston, MA, 1999, Based on the 1981 French original [MR 85e:53051], With appendices by M. Katz, P. Pansu and S. Semmes, Translated from the French by Sean Michael Bates. MR 1 699 320
3. J. Jost, *Equilibrium maps between metric spaces*, Calc. Var. Partial Differential Equations **2** (1994), no. 2, 173–204.
4. ———, *Nonpositive curvature: geometric and analytic aspects*, Birkhäuser Verlag, Basel, 1997.
5. T. Kato, *Perturbation theory for linear operators*, second ed., Springer-Verlag, Berlin, 1976, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, Band 132.
6. N. J. Korevaar and R. M. Schoen, *Sobolev spaces and harmonic maps for metric space targets*, Comm. Anal. Geom. **1** (1993), no. 3-4, 561–659.
7. K. Kuwae and T. Shioya, *Convergence of spectral structures: a functional analytic theory and its applications to spectral geometry*, to appear in Communications in Analysis and Geometry.
8. U. Mosco, *Composite media and asymptotic Dirichlet forms*, J. Funct. Anal. **123** (1994), no. 2, 368–421.
9. I. E. Segal and R. A. Kunze, *Integrals and operators*, enlarged ed., Springer-Verlag, Berlin, 1978, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, Band 228.

References

1. G. Dal Maso, *An introduction to Γ-convergence*, Birkhäuser Boston Inc., Boston, MA, 1993.

2. M. Gromov, *Metric structures for Riemannian and non-Riemannian spaces*, Birkhäuser Boston Inc., Boston, MA, 1999, Based on the 1981 French original [MR 85e:53051], With appendices by M. Katz, P. Pansu and S. Semmes, Translated from the French by Sean Michael Bates. MR 1 699 320
3. J. Jost, *Equilibrium maps between metric spaces*, Calc. Var. Partial Differential Equations **2** (1994), no. 2, 173–204.
4. ———, *Nonpositive curvature: geometric and analytic aspects*, Birkhäuser Verlag, Basel, 1997.
5. T. Kato, *Perturbation theory for linear operators*, second ed., Springer-Verlag, Berlin, 1976, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, Band 132.
6. N. J. Korevaar and R. M. Schoen, *Sobolev spaces and harmonic maps for metric space targets*, Comm. Anal. Geom. **1** (1993), no. 3-4, 561–659.
7. K. Kuwae and T. Shioya, *Convergence of spectral structures: a functional analytic theory and its applications to spectral geometry*, to appear in Communications in Analysis and Geometry.
8. U. Mosco, *Composite media and asymptotic Dirichlet forms*, J. Funct. Anal. **123** (1994), no. 2, 368–421.
9. I. E. Segal and R. A. Kunze, *Integrals and operators*, enlarged ed., Springer-Verlag, Berlin, 1978, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, Band 228.

MATHEMATICAL INSTITUTE, TOHOKU UNIVERSITY, SENDAI 980-8578, JAPAN
E-mail address: `shioya@math.tohoku.ac.jp`

Non-bipartiteness of graphs and the upper bounds of Dirichlet forms

Yusuke HIGUCHI[1] and Tomoyuki SHIRAI[2]

[1] Mathematics Laboratories, College of Arts and Sciences, Showa University
[2] Department of Computational Science, Kanazawa University

For finite graphs, it is known that the maximum eigenvalue of Laplacian is equal to 2 if and only if a graph is bipartite. Also for infinite graphs, it is known that the sum of the lower and the upper bounds of the spectrum is equal to or less than 2. Though the sum of them is 2 if a graph is bipartite, the converse does not hold in general. In this talk, we show that the sum is strictly less than 2 if an infinite graph is essentially non-bipartite.

Let us explain our settings. A graph $G = (V(G), E(G))$ is a connected, locally finite graph without self-loops, where $V(G)$ is the set of its vertices and $E(G)$ is the set of its unoriented edges. A graph G may have multiple edges. In this talk, we mainly deal with an infinite graph G, that is, $V(G)$ is a countable infinite set. Considering each edge in $E(G)$ to have two orientations, we can introduce the set of all oriented edges, which is denoted by $A(G)$. For an edge $e \in A(G)$, the origin vertex and the terminus one of e are denoted by $o(e)$ and $t(e)$, respectively. The inverse edge of e is denoted by $\bar{e}$. A path $p = (e_1 e_2 \cdots e_n)$ of length n is a sequence of oriented edges with $t(e_i) = o(e_{i+1})$ for $i = 1, \ldots, n-1$. Moreover, a closed path is a path such that $t(e_n) = o(e_1)$; a cycle c is a closed path $o(e_i)$'s are mutually distinct. We call a graph G bipartite if G has no odd cycles, which is a cycle of odd length.

Let $p : A(G) \to \mathbf{R}^+$ be a transition probability such that

$$\sum_{e \in A_x(G)} p(e) = 1,$$

[1] Partially supported by JSPS under the Grant-in-Aid for Scientific Research No.14204010 and No.13340030.
[2] Partially supported by JSPS under the Grant-in-Aid for Scientific Research No.13740057.

where $A_x(G) = \{e \in A(G) | o(e) = x\}$. Here, $p(e)$ implies a transition probability from $o(e)$ to $t(e)$ in one unit time along an oriented edge e. We assume that p is reversible, that is, there exists a positive valued function $m : V(G) \to \mathbf{R}^+$ such that

$$m(o(e))p(e) = m(t(e))p(\bar{e})$$

for every oriented edge $e \in A(G)$. This function m is called a reversible measure for p and it is unique, if it exists, up to a multiple constant. The discrete Laplacian $\Delta_{G,p} = \Delta_G$ is defined as follows:

$$\Delta_G f(x) = \sum_{e \in A_x(G)} p(e) f(t(e)) - f(x).$$

In other words, $\Delta_G = T_p - I$, where T_p is a transition operator for a reversible probability p and I is the identity operator. If we take $p(e) = (\deg_G o(e))^{-1}$ and $m(x) = \deg_G x$, which are associated with the simple random walk on G, then the Laplacian Δ_G is expressed by

$$\Delta_G f(x) = (\deg_G x)^{-1} \sum_{e \in A_x(G)} f(t(e)) - f(x),$$

where $\deg_G x = \# A_x(G)$. Let us set the Hilbert space

$$\ell^2(V(G)) = \{f \in C^0(G) \mid \langle f, f \rangle_V < \infty\},$$

where the inner product

$$\langle f_1, f_2 \rangle_V = \sum_{x \in V(G)} f_1(x) f_2(x) m(x).$$

Then we can see the discrete Laplacian Δ_G is a bounded self-adjoint operator on $\ell^2(V(G))$ and the spectrum of $-\Delta_G$, $Spec(-\Delta_G)$, is a closed subset in $[0, 2]$. In this talk, we mainly study the sum of the lower bound and the upper one of spectra of discrete Laplacians. We denote by $\lambda_0(G)$ the lower bound of the spectrum of $-\Delta_G$; it is characterized as

$$\lambda_0(G) = \inf\{\, \langle -\Delta_G f, f \rangle_V / \langle f, f \rangle_V \mid f \in \ell^2(V(G)) \,\}.$$

Likewise, we denote by $\lambda_\infty(G)$ the upper bound of the spectrum; it is characterized as

$$\lambda_\infty(G) = \sup\{\, \langle -\Delta_G f, f\rangle_V / \langle f, f\rangle_V \mid f \in \ell^2(V(G))\,\}.$$

By definitions, it holds that $0 \leq \lambda_0(G) \leq 1 \leq \lambda_\infty(G) \leq 2$.

For finite graphs, it is well-known that the maximal eigenvalue for any reversible transition probability p is equal to 2 if and only if a graph is bipartite. Also for infinite graphs, it holds that $\lambda_0(G) + \lambda_\infty(G) = 2$ if a graph G is bipartite. On the other hand, the converse does not hold in general. In fact, let $\mathbf{Z}^1 = (V(\mathbf{Z}^1), E(\mathbf{Z}^1))$ be the ordinary one dimensional lattice and $G = (V(G), E(G))$ a graph obtained from $\mathbf{Z}^1$ by adding an unoriented edge $[e_0]$ whose endvertices are -1 and 1. Then G becomes non-bipartite due to the odd cycle with length 3 consisting of three vertices $\{-1, 0, 1\}$. Let us consider the Laplacian assosiated with the simple random walk. It is well-known that $Spec(-\Delta_{\mathbf{Z}^1}) = [0, 2]$; $Spec(-\Delta_G)$ is still equal to $[0, 2]$ since the essential spectrum does not change under such a local perturbation.

However, under some reasonable assumption, the converse assertion in the above holds. Before stating the theorem, let us classify non-bipartite graphs as follows:

Definition 1. Let N be a positive integer. An infinite graph G is called an N-non-bipartite graph if the following condition holds: for every vertex $x \in V(G)$, there exists an odd cycle C_{2n+1} going through x with $n \leq N$.

Our main theorem is the following:

Main Theorem. *Let G be an N-non-bipartite graph. Assume that the reversible transition probability p is uniformly bounded below by p_0. Then it holds that*

$$\lambda_0(G) + \lambda_\infty(G) \leq 2 - \epsilon(N, p_0),$$

where $\epsilon(N, p_0)$ depends only on N and p_0, and $0 < \epsilon(N, p_0) < 1$.

In Definition 1, we replace an odd cycle C_{2n+1} with $M(m, n) = P_m + C_{2n+1}$ such that $m + n \leq N$. We say a graph satisfying this condition an "essentially non-bipartite graph". More precisely, $M(m, n)$ is defined as follows: setting $V(P_m) = \{x_0, x_1, \ldots, x_{m-1}, x_m\}$, $V(C_n) = \{y_1, y_2, \ldots, y_{2n}, y_{2n+1}\}$ and $x_m = y_1$,

$$V(M(m,n)) = \{x_0, x_1, \ldots, x_{m-1}, x_m = y_1, y_2, \ldots, y_{2n+1}\},$$

$$E(M(m,n)) = \{x_0x_1, x_1x_2 \ldots, x_{m-1}x_m\} \cup \{y_1y_2, y_2y_3, \ldots, y_{2n}y_{2n+1}, y_{2n+1}y_1\}.$$

Then, under the same assumption on p as in Main Theorem, we also have that $\lambda_0(G) + \lambda_\infty(G) < 2$ for any essentially non-bipartite infinite graph G. We will give a brief observation.

Results in the above give not only the complete affirmative answer to the conjecture raised in [3] but more general results (cf. [2,3]):

Original Conjecture. *Assume G is homogeneous, that is, there exists a graph automorphism mapping x to y for any pair of vertices x and y. Then it will hold that $\lambda_0(G) + \lambda_\infty(G) = 2$ if and only if G is bipartite.*

There are two key points to show Main Theorem: one is that the estimate of the quadratic form on an infinite graph G is reduced to that of local quadratic forms on finite subgraphs; another is to give a new reversible probability measure p_h by harmonic transform of p.

References

[1] J. Dodziuk and L. Karp, *Spectral and function theory for combinatorial Laplacians*, Contemp. Math. **73** (1988), 25–40.

[2] M. Kotani, T. Shirai and T. Sunada,, *Asymptotic behavior of the transition probability of a random walk on an infinite graph*, J. Funct. Anal. **159** (1998), 664–689.

[3] T. Shirai, *Asymptotic behavior of the transition probability of a simple random walk on a line graph*, J. Math. Soc. Japan **52** (2000), 99–108.

Mathematics Laboratories, College of Arts and Sciences, Showa University, 4562 Kamiyoshida, Fujiyoshida, Yamanashi 403-0005, Japan

E-mail address: higuchi@cas.showa-u.ac.jp

Department of Computational Science, Kanazawa University, Kakuma-machi, Kanazawa, Ishikawa 920-1192, Japan

E-mail address: shirai@kenroku.kanazawa-u.ac.jp

DEFORMATION OF RIEMANN SURFACES AND POTENTIAL THEORY

HIROSHIGE SHIGA

Let $\varphi : S \to S'$ be a quasiconformal mapping of a Riemann surface S onto another S'. If the maximal dilatation $K(\varphi)(\geq 1)$ of φ is close to 1, then φ is almost conformal. In other words, S and S' are almost the same as Riemann surfaces. Hence, one can expect that quantities which are conformally invariant are almost the same on S and S'.

In this talk, we show that this expectation is true for Dirichlet solutions on S if S is a bordered Riemann surface.

Let S be a compact bordered Riemann surface. We may assume that the relative boundary ∂S consists of finitely many analytic Jordan curves. For a continuous function f on ∂S, we consider a Dirichlet solution H_f^S on S, that is, the harmonic function on S with the boundary value f. Since ∂S consists of finitely many analytic Jordan curves, the mapping φ is extended to a homeomorphism of $\overline{S} = S \cup \partial S$ onto $\overline{S'}$. We use the same notation φ for the extended homeomorphism. Then $f \circ \varphi^{-1}$ is a continuous function on $\partial S'$ and we can consider the Dirichlet solution $H^{S'}_{f\circ\varphi^{-1}}$ on S' for $f \circ \varphi^{-1}$. Mainly, we discuss how $H^{S'}_{f\circ\varphi^{-1}}$ varies as $K(\varphi) \to 1$. Furthermore, we consider the smoothness of Dirichlet solutions for parameters of the quasiconformal deformation. Also, we discuss how the solutions behave as Riemann surfaces degenerate to a Riemann surface with nodes. Our results are the following (the terminologies will be described in our talk):

Theorem 1. *Let S_n $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ be compact bordered Riemann surfaces and φ_n quasiconformal mappings of S_0 onto S_n. Suppose that $\lim_{n\to\infty} K(\varphi_n) = 1$. Then, for every continuous function f on ∂S, $\{H^{S_n}_{f\circ\varphi_n^{-1}} \circ \varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ uniformly converges to $H_f^{S_0}$ on S_0.*

Theorem 2. *Let S_0 be a compact bordered Riemann surface or a parabolic end and φ_t a quasiconformal homeomorphism defined by μ_t. Suppose that there exists a compact subset K of S_0 such that every φ_t is conformal on $S_0 \setminus K$. Then, for every continuous function f on ∂S_0 and for any $p \in S_0$, a function*

$$t \to H^{S_t}_{f\circ\varphi_t^{-1}}(\varphi_t(p))$$

1

is real analytic on $(-1, 1)$.

Theorem 3. *Let* $\{(S_n, S_0, \varphi_n)\}_{n=1}^{\infty}$ *be a degenerating family of a compact bordered Riemann surface* S_0 *with nodes. Then, for any continuous function* f *on* ∂S_0, $\{H_{f\circ\varphi_n}^{S_n} \circ \varphi_n^{-1}\}_{n=1}^{\infty}$ *converges to* $H_f^{S_0}$ *uniformly on bordered parts of* S_0 *outside a neighbourhood of* $N(S_0)$.

Finally, some potential theoretic properties (regular points, Martin boundaries etc.) are discussed.

References

[1] L. V. Ahlfors, The complex analytic structure of the space of closed Riemann surfaces in "Analytic Functions", 45–66, 1960.

[2] L. V. Ahlfors, *Lectures on quasiconformal mappings*, The Wadsworth & Brooks/Cole, Monterey, California, 1987.

[3] L. V. Ahlfors and L. Bers, Riemann's mapping theorem for variable metrics, Ann. of Math. **72** (1960), 385–404.

[4] C. Constantinescu and A. Cornea, *Ideale Ränder Riemannscher Flächen*, Springer 1963.

[5] Y. Imayoshi and M. Taniguchi, *Introduction to Teichmüller Spaces*, Modern Texts in Math. Springer-Tokyo 1992.

[6] H. Masaoka and S. Segawa, Martin boundary of unlimited covering surfaces, J. Anal. Math. **83** (2000), 55–72.

[7] L. Sario and M. Nakai, *Classification Theory of Riemann Surfaces*, Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften **164**, Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York, 1970.

[8] H. Shiga, On the quasiconformal deformation of open Riemann surfaces and variations of some conformal invariants, J. Math. Kyoto Univ. **22** (1982), 463–480.

[9] H. Shiga, Quasiconformal mappings and potentials, in Proceedings of XVIth Rolf Nevanlinna Colloquium, I. Laine and O. Martio, 1996, 215–222.

[10] H. Shiga, Dirichlet solutions on bordered Riemann surfaces and quasiconformal mappings, to appear in J. D'Analyse Math.

[11] H. Shiga, On complex analytic properties of limit sets and Julia sets, preprint.

[12] M. Shishikura, Topological, Geometric and Complex Analytic Properties of Julia Sets, in "Proceedings of International Congress of Mathematicians", Birkhäuser-Verlag Basel, 886–895, 1995.

DEPARTMENT OF MATHEMATICS, TOKYO INSTITUTE OF TECHNOLOGY
E-mail address: shiga@math.titech.ac.jp

確率解析とその周辺

確率解析に関連するシンポジウムは毎年開催されている。2003 年度は以下のプログラムで京都大学で開催された。出席者は 35 名。なお、予稿等詳細は Web Site http://www.math.kyoto-u.ac.jp/probability/sympo/SA03.html を参照。

日時: 2003 年 9 月 29 日 (月) ~ 10 月 1 日 (水)
場所: 京都大学大学院理学研究科数学教室大会議室

プ ロ グ ラ ム

9 月 29 日 (月)

13:30~14:30 劉 慶平・重川 一郎（京大理）
エントロピーの一般化と分数冪対数 Sobolev 不等式

14:40~15:40 河備 浩司（東大数理）
経路空間上の拡散過程の推移半群の微分評価と Littlewood-Paley-Stein 不等式

15:50~16:50 石川 保志（愛媛大理）
Support theorem in p-variation space and the positivity of the density

9 月 30 日 (火)

9:50~10:50 植村 英明（愛知教育大）
fractional Brown 運動に関する確率積分と Itô の公式について

11:00~12:00 高信 敏（金沢大理）
Malliavin 解析における多次元 Brown 運動の局所時間
— どの一般 Wiener 関数のクラスに属するのか？

13:30~14:30 貞末 岳（大阪教育大）
無限直積測度の準不変性について

14:40~15:40 原 啓介（立命館大理工）
二次のウィナー汎関数と行列式表現を持つ整関数について

15:50~16:20 Short Communication 渡辺 信三（立命館大理工）
1 次元拡散過程の (一般化) Arc-sine-law

10 月 1 日 (水)

9:50～10:50　日野 正訓 (京大情報)

フラクタル図形上のエネルギー測度の特異性について

11:10～12:10　上村 稔大（神戸商大）

対称安定型過程の球からの脱出時間について

13:30～14:30　上木 直昌 (京大人環)

The integrated density of states of random Pauli Hamiltonians

世話人　重川 一郎 (京都大学理学研究科)
会田 茂樹 (大阪大学基礎工学研究科)
上木 直昌 (京都大学人間環境学研究科)

大規模相互作用系の確率解析

表題のシンポジウムを吉田伸生（京都大学）・長田博文（九州大学）が担当し、２００３年および２００４年に開催した。これは前年度まで舟木直久氏（東京大学）によって組織された同名の研究集会の趣旨を引き継ぐものであるが、この2年間はより広い範囲の話題も含むように方向性を微調整した。

２００３年は湘南国際村センターで合宿形式で行った。合宿形式の利点を生かし、夕食後も自由討論の時間をもうけた。その際、博士課程学生を中心とする若手研究者によるショートコミュニケーションを行い、発表・討論の機会を作った。

２００４年には開催場所を京都大学理学部に移した。そのことで、より多くの範囲の参加者が来ることを期待した。

以下に両シンポジウムのプログラムを掲載する。２００３年の研究集会については、概略を下に記する。また、２００４年の分については各講演者による報告を掲載する。

２００３年研究集会概要　いくつかの講演についてコメントを述べる。

志賀徳造：Parabolic Anderson model 及び、その離散化である directed polymer の Lyapunov 指数に対する結果が報告された。簡単のため directed polymer の場合について、その一部を述べる。$x \in \mathbf{Z}^d$ に対し $(\{\gamma_n\}_{n\geq 0}, P)$ を原点から出発する d 次元単純 random walk,

$$Z_n(x) = P\left[\exp\left(\beta \sum_{m=1}^{n} h(m, \gamma_m)\right) : \gamma_n = x\right]$$

$Z_n = \sum_x Z_n(x)$, $M_n(p) = Q[Z_n^p]$ とする。ここで、$\beta > 0$, また $h(j,x)$ $(j \geq 0$, $x \in \mathbf{Z}^d)$ は確率空間 $(H, \mathcal{G}, Q)$ 上の i.i.d. で、$\forall \beta > 0$ に対し $Q\exp(\beta h(j,x)) < \infty$ とする。このとき、次の極限が存在：

$$\lambda_0(\beta) = \lim_n \frac{1}{2n} Q[\log Z_{2n}(0)], \quad \lambda_1(\beta) = \lim_n \frac{1}{n} Q[\log Z_n], \quad m(p) = \lim_n \frac{1}{n} \log M_n(p).$$

更に、上式の最初の２つについては Q-平均をとらない量も概収束し、極限はそれぞれ $\lambda_0(\beta), \lambda_1(\beta)$ に一致。また、$m(p)$ は $p=0$ で可微分かつ、$m'(0) = \lambda_0(\beta) = \lambda_1(\beta)$ である。講演では $\log Z_n$ に対する指数的な concentration 評価と、それに関する block argument も解説された。

吉田伸生の講演：Directed polymer の連続版で、Brownian directed polymer と呼ばれる模型についての結果を報告した。これは、directed polymer における random walk を Brown 運動に、また、i.i.d.$h(j,x)$ を Poisson 点過程に置き換えることにより定義される模型であり、F. Comets 及び講演者により導入された。この模型の技術的利点は、対象の連続化により確率解析の援用が可能となった点である。こ

れにより、離散模型の研究を越える幾つかの結果が得られ、この講演でも報告された。

今野紀雄：　quantum random walk と呼ばれる、新しいタイプの確率変数列についての計算が紹介された。これはユニタリ行列からある種のルールで構成する確率変数列であるが、斬新な問題であり、今後興味深い研究テーマになりうる可能性が期待される。

永幡幸生：　講演者が考案した排他過程のあるモデルについて、拡散係数の粒子の密度に関するパラメターについての滑らかさを示したものである。この問題は、流体力学極限を実行する上で、最も計算の大変な部分を解決したものである。この時の講演では、興味深いものの、幾分特別なモデルについて解決していたのだが、講演者は次年度の講演で、一般の自然なクラスに対して証明することに成功した。

籠屋恵嗣：　講演者は、非対称な排他過程についてその拡散係数の滑らかさを証明した。講演者は依然、今回発表した結果を仮定して、速度変更のある、非対称な排他過程の流体力学極限を証明したが、今回の仕事で欠けていた部分が埋まり完成したことになった。

香取真理、種村秀紀、白井朋之、長田博文：相互作用のある粒子系やその定常分布について、最近、対数ポテンシャルのように強い相互作用をもつものはランダム行列とも関係し、注目を集めているが、それに関係して、これらの講演は、それぞれの視点から成果を発表した。

シンポジウム「大規模相互作用系の確率解析」のお知らせ

平成15年度科学研究費補助金基盤研究 (A)(1)「確率論の総合的研究」(研究代表者：重川 一郎，課題番号：14204008), 平成15年度科学研究費補助金基盤研究 (B)(1)「大規模相互作用系の確率論的研究」(研究代表者：舟木直久，課題番号：14340029) による標記の研究集会を以下の要領で開催致しますのでご案内申し上げます.

日時: 2003年10月7日 (火) 15:15 ~ 10月10日 (金) 11:45
場所: 湘南国際村センター, [URL] http://www.shonan-village.co.jp/

プ ロ グ ラ ム

10月7日 (火)

15:15~16:15　今野紀雄 (横浜国立大)

Fluctuations of quantum random walks on circles

16:30~17:30　志賀徳造 (東工大理)

Parabolic Anderson Model に関する話題

— 夕　食 (18:00 ~)—

19:30~20:00　三角 淳 (東大数理)

Percolation と random walk

20:00~20:30　石谷 謙介 (東大数理)

無限次元空間における部分積分公式

10 月 8 日 (水)

9:30~10:30　樋口 保成 (神戸大理)

Dobrushin-Hryniv theory の精密化、一般化について

10:45~11:45　杉浦 誠 (琉球大理)

The log-Sobolev inequality for one-dimensional Ginzburg-Landau model of non-conservative type

— 昼　食 (12:00 ~) —

14:00~15:00　永幡幸生 (北海道大学大学院工学研究科)

Regularity of the diffusion coefficient matrix for generalized exclusion process

15:15~16:15　籠屋 恵嗣 (筑波大数学)

非対称排他過程の拡散係数

16:30~17:30　西川貴雄 (東大数理)

界面モデルのエントロピー反発

— 夕　食 (18:00 ~) —

19:30~20:00　竹島正樹 (大阪大学大学院理学研究科)

1-dimensional chain of diamonds 上の Onece Reinforced Random Walk について

20:00~20:30　竹居 正登 (神戸大学自然科学研究科)

Precolation Cluster の個数に関する中心極限定理について

10 月 9 日 (木)

9:30～10:30　香取 真理（中央大理）, 種村秀紀（千葉大理）
Noncolliding systems of diffusion particles and multi-matrix models

10:45～11:45　香取 真理（中央大理）, 種村秀紀（千葉大理）
Infinite Systems of Noncolliding diffusion particles

— 昼 食 (12:00 ～) —

14:00～15:00　白井 朋之（金沢大理）
Fermion measures and their related topics

15:15～16:15　長田博文（名大多元数理）
Diffusions related to Fermion measures

16:30～ 17:30　舟木直久 (東大数理)
Stochastic partial differential equations with singular drifts

10月10日 (金)

9:30～10:30　坂川 博宣（慶應理工）
Entropic repulsion for multi-layered harmonic crystals

10:45～11:45　吉田 伸生 (京大理)
ランダム媒質中のディレクティドポリマー：ブラウン運動による連続模型

世話人　長田博文 (名大多元数理)
吉田 伸生 (京大理)

研究集会：

大規模相互作用系の確率解析

を下記の通り開催致しますので御案内申し上げます．なお，この研究集会は平成16年度科学研究費補助金基盤研究 (A)(1)「確率論の総合的研究」(研究代表者：重川一郎， 課題番号： 14204008), 平成16年度科学研究費補助金基盤研究 (B)(1)「大規模相互作用系の確率論的研究」(研究代表者：舟木直久， 課題番号： 14340029) による研究活動の一環として行われます。

日時：２００４年 １０月２０日 （水） から１０月２２日 （金） まで

場所：京都大学理学部数学教室大会議室

プログラム：

１０月２０日（水）

１３：５０－１４：５０　舟木直久（東大）

擬似 Winterbottom 形状の運動 —- 流体力学極限の時間スケールを超えて

１５：１０－１６：１０　保阪賢資（神戸大）

Triviality of Hierarchical Models with Small Negative ϕ^4 Model in Four Dimensions

１６：３０－１７：３０　樋口保成（神戸大）

体積条件を満たすコントゥアーモデルの interface の高さの free energy の解析性

１０月２１日（木）

９：５０－１０：５０　永幡幸生（阪大）

格子気体の拡散係数の滑らかさについて（その１）

１１：１０－１２：１０　笹本智弘（東工大）

１次元多核成長模型の多点高さ分布

１３：５０－１４：５０　石谷謙介（東大）

Integration by parts formulae for the wiener measures on a path space between two curves.

１５：１０－１６：１０　針谷 祐 （京大数理研）

A time-change approach to Kotani's extension of Yor's formula.

１６：３０－１７：３０　白井 朋之（九大）

Alpha-determinant and Wishart distribution

１０月２２日（金）

９：５０－１０：５０　永幡幸生（阪大）

格子気体の拡散係数の滑らかさについて（その２）

１１：１０－１２：１０　高橋　弘（慶應大）

Recurrence and transience of multi-dimensional diffusion processes in random environments

１３：５０－１４：５０　籠屋 恵嗣 （筑波大）

Equilibrium fluctuations for two component zero range processes

１５：１０－１６：１０　種村秀紀（千葉大）

Non-colliding generalized meanders and random matrices

世話人 ：長田博文 (九大) 吉田伸生 (京大)

擬似 Winterbottom 形状の運動

── 流体力学極限の時間スケールを超えて ──

舟木直久（東大数理）

1　平衡系

Wulff 図形（Wulff 形状）は平衡系における結晶の形を表し，体積が一定という条件の下で総表面張力（界面エネルギー）を最小にするという変分問題によって特徴づけられる．また，壁からの影響があるときは，ピンニング効果を考慮に入れた変分問題 (総表面張力 + 壁自由エネルギーの最小化) を考える必要があり，その解は Winterbottom 図形とよばれるものになる．これらの図形は物理的には巨視的なレベルで観測される対象物を表すが，微視的な系からの導出が色々知られている．代表的なものとして

- Dobrushin-Kotecký-Shlosman (1992): Ising 模型からの Wulff 図形の導出
- Pfister-Velenik, Bodineau-Ioffe-Velenik (1999, 2001): Ising 模型からの Winterbottom 図形の導出
- Deuschel-Giacomin-Ioffe (2000): $\nabla\varphi$ 界面模型からの Wulff 図形の導出
- Bolthausen-Ioffe (1997): $\nabla\varphi$ 界面模型からの Winterbottom 図形の導出

がある．詳しくは，講義録 [3] を参照されたい．

2　非平衡系

ここでの目標は，非平衡系からこのような結晶形の運動を導くことにある．

2.1　川崎ダイナミクス

Ising 模型から決まる Gibbs 分布を平衡状態にもち粒子数 (体積) を保存するモデルは川崎ダイナミクス (格子気体) だから，Wulff 図形の運動を探るには川崎ダイナミクスを採用するのが適当であると考えられる．しかも，系の温度が $T < T_c$ (臨界温度) で平均粒子密度が相共存領域内

科研費シンポジウム「大規模相互作用系の確率解析」，2004 年 10 月 20 日 (水)，京都大学理学部

にあるとき，初期分布が Gibbs 分布にしたがう (つまり系が定常状態にある) ならば，各時刻での空間に関する巨視的極限は Wulff 図形になることがわかっている．しかし勿論それだけでは時間発展の様子は見えてこない．実際，Wulff 図形の運動の解析はそれほど容易ではないのである．現在のところ，Martinelli ら [4] が heuristic な議論を与え数値計算を行なっているのを除けば，数学的に厳密な結果は知られていない．

微視的距離と巨視的距離の比を ϵ とする．ϵ が空間のスケーリングパラメータである．いいかえれば，一辺の長さが $N=\epsilon^{-1}$ の box 内で川崎ダイナミクスを考える (主に空間次元 $d=2$ とする)．予想される結果は境界条件によって大きく異なる．$T<T_c$ とする．

- 自由境界条件 (free boundary condition) の下では，Wulff 図形は box の 4 隅のいずれかに来る．$+,-$ を分ける (巨視的) 界面の長さが (図形の面積が一定という条件の下で) 短いほど好ましいからである．したがって Wulff 図形の運動は，これら 4 隅の 1 つから他の 1 つへの jump として引き起こされる．この場合，Wulff 図形の自由度は離散的であり，予想される時間スケールは
$$t \sim \exp(C\epsilon^{-1})$$
ときわめて長いものになる．

- 周期境界条件 (あるいは，解析はより難しいが $+$ または $-$ 境界条件) の下では，Wulff 図形にはトーラス上平行移動不変という連続の自由度が残されている．したがって，Wulff 図形の運動に適切な時間スケールは自由境界条件の場合よりはるかに短くなり，実際，対応する生成作用素の spectral gap に関する考察から
$$t \sim \epsilon^{-(d+2)}$$
と予想される．([4] には，$d=2$ のとき ϵ^{-3} とある)

一方，系は対称として少なくとも高温部で考えれば，流体力学極限の時間スケールは $t\sim\epsilon^{-2}$ であり，spectral gap は $O(\epsilon^{-2})$ であることが知られている (Lu-Yau).

2.2 相互作用 Brown 粒子系

川崎ダイナミクスの難しさは，ある意味で空間が離散的なことにある．ランダムウォークの連続化は Brown 運動だから，空間を連続化すれば相互作用 Brown 粒子系が得られる．ところが，相互作用 Brown 粒子系に対応する連続場 (point field) の Gibbs 分布は解析が非常に困難で，十分な結果が得られていないという難点がある．たとえば，Gibbs 分布を（低温で）すべて特徴づけることはできておらず，特に Wulff 図形がどうなるのかは未解決問題である．ただし，系の温度が 0 の場合には，相互作用ポテンシャルが最小になるように粒子を配置すればよい．[2] は相互作用 Brown 粒子系の零温度極限を
$$t \sim \epsilon^{-(d+2)}$$

の時間スケールの下で考察し，極限における Wulff 図形のランダムな運動を回転・平行移動を決定することにより完全に特徴づけた．流体力学極限の時間スケールは $t \sim \epsilon^{-2}$ である．

2.3　保存的 $\nabla\varphi$ 界面模型

Ising 模型に代わるものとして $\nabla\varphi$ 界面模型がある．このモデルに対応する時間発展を考えよう．

d 次元周期正方格子 $\mathbb{T}_N^d = \{1, 2, \ldots, N\}^d, N = \epsilon^{-1}$ の上で定義された微視的な高さ変数 $\phi_t \equiv \phi_t^N = \{\phi_t(x) \in \mathbb{R}; x \in \mathbb{T}_N^d\}, t \geq 0$ に対して確率微分方程式

$$d\phi_t(x) = -\Delta^2\phi_t(x)dt - \frac{1}{N}\Delta\left\{f\left(\frac{1}{N}\phi_t(x)\right)\right\}dt + \sqrt{2}dw_t^{\Delta}(x), \quad x \in \mathbb{T}_N^d \tag{1}$$

を考える．ただし Δ は $\mathbb{T}_N^d$ 上の離散ラプラシアン，$w_t^{\Delta} = \{w_t^{\Delta}(x); x \in \mathbb{T}_N^d\}$ は共分散

$$E[w_t^{\Delta}(x)w_s^{\Delta}(y)] = -\Delta(x, y) \cdot t \wedge s, \quad t, s \geq 0,\ x, y \in \mathbb{T}_N^d$$

をもつ Brown 運動の族である．また $f \in C_b^1(\mathbb{R})$ は巨視的なピンニング効果を表す関数である．確率微分方程式 (1) で $\frac{1}{N}f\left(\frac{1}{N}\phi\right)$ を微視的なピンニング効果 $f(\phi)$ に置きかえてモデルを考えることはより興味深いが，均質化した後に現れる壁自由エネルギーに特異性が現れモデルとしては扱いが面倒になる．このようなモデル，あるいはさらに f が跳びをもつ場合 (確率微分方程式に粘着性の local time が出現する) は，今後の課題である．

ミクロな高さ変数 ϕ_t^N に対応するマクロな高さ変数 $h^N(t, \theta), t \geq 0, \theta \in \mathbb{T}^d = [0, 1)^d$ は時空のスケール変換

$$h^N(t, \theta) = \frac{1}{N}\sum_{x \in \mathbb{T}_N^d} \phi_{N^\alpha t}^N(x) 1_{B(x/N, 1/N)}(\theta), \quad \theta \in \mathbb{T}^d \tag{2}$$

によって定義される．ただし $B(\theta, a)$ は中心が θ で一辺の長さが a の $\mathbb{T}^d$ 内の box である．$\alpha > 0$ は時空のスケーリングの比を表すパラメータである．このモデルは保存則をもち $\alpha = 4$ が流体力学極限のスケーリングである．このとき，$h^N(t, \theta)$ の極限 $h(t, \theta)$ は非線形偏微分方程式

$$\frac{\partial h}{\partial t} = -\Delta^2 h - \Delta\{f(h)\}, \quad \theta \in \mathbb{T}^d \tag{3}$$

の解になる (非線形ラプラシアンの場合も含め西川の結果がある [3])．Δ は連続のラプラシアンである．この偏微分方程式は巨視的界面の体積 "$\int_{\mathbb{T}^d} h(t, \theta)\,d\theta$" を保存する．

さて，$\alpha > 4$ ととれば $h^N(t, \theta)$ は $N \to \infty$ のとき偏微分方程式 (3) の右辺 $= 0$ を満たす解に近づくと考えられる．それは体積条件 "$\int_{\mathbb{T}^d} h(\theta)\,d\theta = v$ (一定)" の下で界面エネルギー

$$\Sigma(h) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{T}^d} |\nabla h|^2(\theta)\,d\theta + \int_{\mathbb{T}^d} F(h(\theta))\,d\theta \tag{4}$$

を最小にする関数 $\bar{h} = \bar{h}(\theta)$ である．ここでは，それを擬似 Winterbottom 形状とよぶことにする．F は $F' = -f$ によって決まる自己ポテンシャルである．Σ の右辺第 1 項は表面張力，第 2 項は弱いピンニング効果から定まるエネルギー項を表している．

擬似 Winterbottom 形状のランダムな運動について，次の定理が成立すると予想される．

定理 1. $\alpha = d+4$ ととれば，$h^N(t,\theta) \longrightarrow \bar{h}(\theta - aw_t)$ (法則収束) である．ただし w_t は $\mathbb{T}^d$ 上の Brown 運動で，拡散係数 a^2 は

$$a^2 = 2/\|\bar{h} - \langle \bar{h} \rangle\|^2_{L^2(\mathbb{T}^d)}, \quad \langle \bar{h} \rangle = \int_{\mathbb{T}^d} h(\theta)\, d\theta\, (= v)$$

によって定まる定数である． □

証明は未完成であるが，アイデアをラフに述べる．$\alpha = d+4$ として，ミクロなレベルの確率微分方程式 (1) をマクロなレベルの $h = h^N(t,\theta)$ に対する方程式に書き直せば，ほぼ

$$\frac{\partial h}{\partial t} = N^d\big[-\Delta^2 h - \Delta\{f(h)\}\big] + \sqrt{2}\,\mathrm{div}\ \dot{\mathbf{w}}(t,\theta)$$

になる．ただし $\dot{\mathbf{w}}(t,\theta)$ は d 次元の時空ホワイトノイズである．ドリフト項は，解 h^N を $\mathcal{M}_v = \{\bar{h}; \Delta\bar{h} + f(\bar{h}) = c_v, \langle \bar{h} \rangle = v\}$ の近傍に押しやる．それに伴って，ノイズ項は $\mathcal{M}_v$ の接ベクトル方向 $\{\nabla\bar{h}(\cdot - \theta)\}$ へ射影された成分のみが生き残ることになる．ただし接空間の自然な内積は $(\cdot,\cdot)_{H^{-1}} \equiv ((-\Delta)^{-1}\cdot,\cdot)_{L^2}$ である．このアイデアを実行するために，次のステップを踏む．

(a) 確率微分方程式 (1) のノイズ $w_t^\Delta(x)$ を smeared noise $w_t^\Delta * \psi^\epsilon(x)$ に置きかえた上で，Lyapunov argument を用いる．いいかえれば，ハミルトニアン

$$H(\phi) \equiv H_N^F(\phi) = \frac{1}{2}\sum_{\langle x,y \rangle}(\phi(x) - \phi(y))^2 + \sum_x F\big(\frac{1}{N}\phi(x)\big)$$

を考え，$\{H(\phi_t)\}^p$ を伊藤の公式により計算して $h^N(t) = h^{N,\epsilon}(t)$ が $\mathcal{M}_v$ の近傍に留まることを示す ([1] で用いたアイデア)．(b) もとの解と smeared noise から決まる解の差を評価する．

この研究は杉浦誠氏と共同で進める予定である．

References

[1] T. Funaki, *The scaling limit for a stochastic PDE and the separation of phases*, Probab. Theory Relat. Fields, **102** (1995), pp. 221–288.

[2] T. Funaki, *Zero temperature limit for interacting Brownian particles, I. Motion of a single body*, Ann. Probab., **32** (2004), pp. 1201–1227.

[3] T. Funaki, *Stochastic Interface Models*, to be published in Lect. Notes in Math., Springer, 2005, available at http://www.ms.u-tokyo.ac.jp/~funaki/publ/publ.htm

[4] G. Favrin, E. Marinari and F. Martinelli, *Droplet motion for the conservative 2D Ising lattice gas dynamics below the critical temperature*, J. Phys. A **34** (2001), pp. 5901–5910.

Triviality of Hierarechical Models with Small Negative ϕ^4 Model in Four Dimensions

保阪賢資　（神戸大学自然科学研究科）

$\mathbf{Z}^d$ を d 次元正方格子とする。L を 10 以上の偶数とし（この L を**くりこみ変換のスケール**と呼ぶ）、標準正規分布 $N_{0,1}$ に従う独立確率変数列 $\{Z_x^k; x \in \mathbf{Z}^d, k \in \mathbf{Z}_+\}$ に対して、次の確率場 $\{\phi_x; x \in \mathbf{Z}^d\}$ を考える。

$$\phi_x = \sum_{n=0}^{\infty} L^{-n(d-2)/2} A_{[L^{-n}x]} Z^n_{[L^{-(n+1)}x]}. \tag{1}$$

ここで、$[x] = ([x_1], \cdots, [x_d])$ で [ ] はガウス記号とし、A_x を 1 又は -1 を取る x の関数で任意の y に対して $\sum_{[L^{-1}x]=y} A_x = 0$ を満たすように選ばれているものとする。$\{\phi_x\}_{x\in\mathbf{Z}^d}$ の分布を $d\nu_{G_h}$ と書くと、ポテンシャル $V(\phi) = \sum_x v(\phi_x)$ （$v(\phi_x)$ を **single spin potential** と呼ぶ）に対して、次のようなギブス分布を形式的に定義できる。

$$d\nu_V(\phi) = \frac{1}{Z} \exp[-V(\phi)] d\nu_{G_h}(\phi). \tag{2}$$

ただし、Z は規格化定数。このような格子模型を Gawędzki-Kupiainen 型階層模型と呼ぶ。これらの確率模型は、block spin 変換

$$\phi'_x = L^{-(d+2)/2} \sum_{[L^{-1}y]=x} \phi_y \tag{3}$$

から定まるくりこみ変換を簡単に行なう為に考案された模型で、実際 (2) に (3) の変換を作用させると次のように書ける [1]。

$$d\nu_{V'}(\phi') = \frac{1}{Z'} \exp[-V'(\phi')] d\nu_{G_h}(\phi') \tag{4}$$

ポテンシャル $V'(\phi')$ は次のように、$V'(\phi') = \sum_{x\in\mathbf{Z}^d} v'(\phi'_x)$、single spin potential の和で書き表すことができ、その具体形は

$$e^{-v'(\phi'_x)} = \frac{\int_{\mathbf{R}} \exp[-\frac{1}{2}L^d[v(L^{-(d-2)/2}\phi'_x + z) + v(L^{-(d-2)/2}\phi'_x - z)]] d\nu(z)}{\int_{\mathbf{R}} \exp[-L^4 v(z)] d\nu(z)}, x \in \mathbf{Z}^d. \tag{5}$$

という 1 次元の積分で書ける。ただし、$d\nu(z) = \exp[-z^2/2]dz/\sqrt{2\pi}$ である。

[主結果]　我々は、くりこみ変換 (5) によって定義される single spin potential の離散力学系に興味を持つ。まず、single spin potential $v(\phi_x) \equiv 0$ はこの力学系の不動点の一つだとわかる。この不動点を**ガウス型固定点**と呼ぶ。そして、ある single spin potential $v_0(\phi_x)$ を初期値とするこの力学系の軌道がガウス型固定点に吸い込まれる時、その初期値の single spin potential を持つ格子模型は**自明性**を持つという。階層的な格子模型に関する自明性の結果として、次元 d が $d \geq 4$ ならば初期値の single spin potential $v_0(\phi_x)$ が $v_0(\phi_x) = \mu_0\phi_x^2 + \lambda_0\phi_x^4$ （このような初期値の single spin potential を持つ模型を **ϕ^4 模型**と呼ぶ）の**弱結合領域**（大雑把に言えば λ が十分小さいパラメタ領域）において自明性が示された [1]。弱結合領域以外の結果としては、次元 d が 4 以上として初期値の single spin potential が Hierarchical Ising $v_{I,s}$ と呼ばれる次の形のもの $e^{-v_{I,s}(\phi_x)} = \frac{1}{2}(\delta(\phi_x - s) + \delta(\phi_x + s))$ について自明性が証明されている [3]。

今回われわれは次の初期値の single spin potential の class $\mathcal{V}_0(L, D, C_1, n_0, \rho_0)$ の中に、自明性が成り立つものが存在するという以下のような結果を得た。

Ta 複素領域 $|\mathbf{Im}\phi_x| < C_1((L^{-4}\rho_0^{-1})^{1/6} \wedge n_0^{1/4})$ に対して、$\exp[-v_0(\phi_x)]$ は解析的で実軸上で正値を取る偶関数で、次の上からの評価を持つ。

$$|e^{-(v_0)(\phi_x)}| \leq \exp[D - (\lambda_0^{1/2} + \rho_0^{1/3})|\phi_x|^2 + 20\lambda_0(\mathbf{Im}\phi_x)^4 + 2004\rho_0(\mathbf{Im}\phi_x)^6]. \tag{6}$$

Tb 複素領域 $|\phi_x| < C_1((L^{-4}\rho_0^{-1})^{1/6} \wedge n_0^{1/4})$ において、 $v_0(\phi_x)$ の 4 次以上の部分 $(v_0)_{\geq 4}(\phi_x)$ は解析的でかつ、次のように書ける。

$$(v_0)_{\geq 4}(\phi_x) = \left(\lambda_0 - \frac{15\rho_0}{1-L^{-2}}\right)\phi_x^4 + \rho_0\phi_x^6 + (v_0)_{\geq 8}(\phi_x), \tag{7}$$

そして、各係数及び部分に対して次の評価を満たす。

$$\frac{C_{--}L^{-4}}{n_0} \leq \lambda_0 \leq \frac{C_{++}L^{-4}}{n_0}, \quad C_{--} = \frac{1}{42}, \quad C_{++} = \frac{1}{28}, \tag{8}$$

$$|(v_0)_{\geq 8}(\phi_x)| \leq \rho_0^{2/3} n_0^{1/8} \vee n_0^{-3/4}. \tag{9}$$

ただし、$(v_0)_{\geq m}(\phi) = v_0(\phi) - \sum_{l=0}^{m-1} \frac{d^l v_0(0)}{d\phi^l}\phi^l$ とする。主張を正確に書くと次のようになる。

Theorem 1 ([6]) $d = 4$ とし、$L \geq 10$ とする。このとき以下の主張を満たす、ある定数 D, $\bar{C}_1(L, D) \geq L$, $\bar{n}_0(L, D, C_1) \geq L^{48}$ が存在する。初期値の *single spin potential* $v_0(\phi_x)$ が $\mathcal{V}_0(L, D, C_1, n_0, \rho_0)$ に含まれているならば、ある $\mu_{crit} = \mu(\lambda_0, \rho_0)$ が存在して、初期値の *single spin potential* $v_0(\phi_x)$ を

$$v_0(\phi_x) = \mu_{crit}\phi_x^2 + v_{\geq 4}(\phi_x) \tag{10}$$

としたときの *Gawędzki-Kupiainen* 型階層的格子模型は自明性が成り立つ。

6 次の項の係数の大きさが 4 次の項の係数の大きさがほぼ等しい single spin potential の class にまで拡張できたのが本質的である。このため、初期値の single spin potential で 4 次の係数が負のものも取り扱う事ができた。その single spin potential は [1] の扱っている class に含まないだけでなく、Lee-Yang の性質 $\mathcal{L}$ を満たしていない為に [5]、Newman の不等式が成立しない為に [3] の手段では自明性を証明できないことを付記する。3 次元では Müller と Schiemann による ϕ^6 模型の自明性の結果 [4] が知られているが、彼らの方法は 3 次元特有の方法によるもので、その方法を 4 次元以上にそのまま適応することができないことに注意する。上の主張を証明する為に [1] の証明で用いた数学的帰納法を拡張した。なお、single spin potential を複素領域で考えているのはパラメタの評価のための技術的な理由からである。このことを用いる事により $\mathcal{V}_0(L, D, C_1, n_0, \rho_0)$ から出発した軌跡が [1] で扱ってる single spin potential の class に入る事を確かめることに成功した。

参考文献

[1] K. Gawędzki. and A. Kupiainen. : Triviality of ϕ_4^4 and all that in a hierarchical model approximation. J. Stat. Phys. 29, 683-699 (1982)

[2] K. Gawędzki. and A. Kupiainen. : Non-Trivial Cnotinuum Limit of a ϕ_4^4 Model with Negative Coupling Constant. Nuclear Physics B257 [FS14] (1985) 474-504

[3] T. Hara. T. Hattori. and H. Watanabe. : Triviality of Hierarchical Ising model in Four Dimensions. Commun. Math. Phys. 220, 13-40 (2001)

[4] V. F. Müller. and J. Schiemann. : Infrared Asymptotic Freedom of a Hierarchical ϕ_3^6 Lattice Theory. J. Stat. Phys. 43, 123-142 (1986)

[5] C. Newman. : Zeros of the Partition Function for Generalized Ising Systems. Commun. Pure Appl. Math. 27, 143-159 (1974)

[6] K. Hosaka. : Triviality of Hierarchical Models with Small Negative ϕ^4 Model in Four Dimensions. Preprint.

体積条件を満たすコントゥアーモデルの interface の高さの free energy の解析性

樋口 保成 (神戸大学)

ここで扱うのはもともとのモデルは finite range, translation invariant な相互作用をもつ有限個の値をもつスピン系のモデルであるが、色々な仮定をおいて、次のようなコントゥアーモデルと思うことができる。

$L \geq 1$, $\Lambda_L = [0, L] \times \mathbf{Z}$,

$$\mathcal{C}_L = \{\Gamma \subset \Lambda_L;\ \text{connected}\ , \Gamma \ni (0,0), \Gamma \cap \{x^1 = L\} \neq \emptyset\} \tag{1}$$

実際には $\mathcal{C}_L$ の要素にはも少し条件がついて、どこでも Γ の切断幅は $2r-1$ 以上 $(r \geq 1)$ という「分厚さ」を要求するが、省略する。この $\mathcal{C}_L$ の要素の統計的な性質を調べるのが目的だが、重みは次の形で与えられる.

$$W(\Gamma) = \sum_{\sigma} \exp\{-\beta H_{\Gamma}(\sigma) + \sum_{V \cap \Gamma \neq \emptyset} \Phi(V)\} \tag{2}$$

和は Γ の形によって許容される Γ 内の spin configuration についての和であり, $\Phi(V)$ は $|V|$ について指数的に減少する量である. H については Peierls 条件 ($|\Gamma|$ の定数倍で下から抑えられる) とともに, 次の体積条件を持つと仮定する.

$$H_{\Gamma}(\sigma) \geq H_B(\sigma_0) + \rho_0 |\Gamma \setminus B| \tag{3}$$

B は minimal energy に対応する図形で, $[0, L] \times [-r+1, r]$ この図形が許容する configuration は unique で, これを $sigma_0$ と書いている. 得られた結果は Γ の右端の高さに関する logarithmic moment generating function $\phi_L(\zeta)$ は、原点を含む L-independent なある領域で解析的であると言うものである。

格子気体の拡散係数の滑らかさについて

永幡 幸生[1] (大阪大学基礎工学研究科)

1 はじめに

Varadhan, Yau [6] により「Gibbs 測度に対称な格子気体の流体力学極限」が証明された. 彼らもコメントしているが極限の非線形拡散方程式の Cauchy 問題の一意性の問題は微妙である. 彼らは一意性が保証される条件として, (i) 対角行列であること, または (ii) Lipshitz 連続であること, を挙げて, (i) が成立するための条件を述べている. 今回の結果では「拡散係数は 1 階連続微分可能」であるのでこのモデルに関して流体力学極限は完成した.

これまでに流体力学極限で導出される方程式の拡散係数に関する結果はほとんどなく, Landim, Olla, Varadhan, [2] による tagged particle system の self-diffusion 係数の滑らかさと, Bernardin [1] による Bernoulli measure に対称な格子気体モデルに対する拡散係数の滑らかさと, 私自身 [4, 5] による lattice gas with energy モデルおよび generalized exclusion process モデルに対する拡散係数の滑らかさが示されている.

Landim, Olla, Varadhan, [2], Bernardin [1] 達のモデルでは基礎になる測度が Bernoulli 測度であるために自然な正規直交基底がとれる. これに対して基礎になる測度を Gibbs 測度にすると正規直交基底は構成可能であるが, それを用いて解析をすることは不可能であるように思われる. また流体力学極限の証明で, 拡散係数は変分公式を用いて定義されるのが自然であるが今までのモデルではこれと同値な Green-Kubo 形式と呼ばれる current–current 相関関数を用いて定義されるものから滑らかさを証明している.

この証明では, 正規直交基底ではない基底を用いることおよび変分公式を直接用いることにより拡散係数の滑らかさを証明する.

2 モデルと結果

Varadhan, Yau [6] による設定を導入する. $\Lambda = \Lambda_N \subset \mathbf{Z}^d$ を原点を中心とする幅 $2N+1$ の立方体とし, $\eta = (\eta_x)_{x\in\Lambda}$, $\eta_x \in \{0,1\}$ を格子気体の配置とする. $\eta_x = 1$ はサイト x に粒子があることを意味し, $\eta_x = 0$ はサイト x が空であることを意味しているものとする. 局所的かつ並行移動不変なポテンシャル $\{J_A\}_A$ が与えられ, かつ境界条件 ω が与えられたときのハミルトニアンを

$$H_\omega(\eta) := \sum_{A:A\cap\Lambda\neq\emptyset} J_A \eta^A(\eta\cup\omega)$$

[1]E-mail address: nagahata@sigmath.es.osaka-u.ac.jp

とする, 満たす最小の r, $\eta^A := \prod_{x\in A} 1_{\{\eta_x=1\}}$,

$$(\eta\cup\omega)_x = \begin{cases} \eta_x & \text{if } x\in\Lambda \\ \omega_x & \text{if } x\notin\Lambda \end{cases}$$

とする. このとき境界条件 ω, 化学ポテンシャル λ の Gibbs 測度 $\mu_{\Lambda,\omega,\lambda}$ を

$$\mu_{\Lambda,\omega,\lambda}(\eta) := Z^{-1}_{\Lambda,\omega,\lambda}\exp[-H_\omega(\eta)+\lambda\sum_{x\in\Lambda}\eta_x]$$

で定義する. 但し $Z^{-1}_{\Lambda,\omega,\lambda}$ は規格化定数. ここでは以下のような mixing condition を仮定する.

仮定 2.1 境界条件 ω, 化学ポテンシャル λ の Gibbs 測度を $\mu_{\Lambda,\omega,\lambda}$ とし, 対応する密度を $\rho=\rho(\Lambda,\omega\lambda)$ とする. このとき定数 $\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3$ が存在して $\mathrm{diam}S_f, \mathrm{diam}S_g < \gamma_3$ を満たす任意の局所関数 f,g に対して

$$|E_{\Lambda,\omega,\lambda}[f;g]| \le \gamma_1\rho(1-\rho)\exp[-\gamma_2\mathrm{dist}(S_f,S_g)]||f||_\infty||g||_\infty$$

を満たす. 但し S_f は局所関数 f の依存領域, $E_{\Lambda,\omega,\lambda}[f;g]$ は $\mu_{\Lambda,\omega,\lambda}$ による f,g の共分散とする.

この仮定は流体力学極限, もしくはその証明に必要となる Spectral gap の不等式に必要な仮定であることに注意する.

この Gibbs 測度の $\Lambda\to\mathbf{Z}^d$ の極限は DLR 方程式で特徴付けられるがこの仮定の下では粒子密度を除いて唯一つに決まるのでその極限を $\mu=\mu_\rho$ と書く.

任意の局所関数 f に対して Markov 過程の作用素を

$$Lf(\eta)=L_\Lambda f(\eta) := \sum_{i=1}^d \sum_{x\in\Lambda:x+e_i\in\Lambda} \tau_x c_i(\eta)\pi^{x,x+e_i}f(\eta)$$

で定義する. 但し e_i は i 方向への正の単位ベクトル, τ_x は平行移動の作用素で

$$\tau_x A := x+A,\quad \tau_x f(\eta) := f(\tau_x\eta),\quad (\tau_x\eta)_z := \eta_{z-x},$$

$\pi^{x,y}f(\eta)=f(\eta^{x,y})-f(\eta)$ で

$$(\eta^{x,y})_z := \begin{cases} \eta_y & \text{if } z=x \\ \eta_x & \text{if } z=y \\ \eta_z & \text{otherwise} \end{cases}$$

とし c_i は非負の局所関数で, $\eta_0\ne\eta_{e_i}$ ならば真に正で $\eta_0=\eta_{e_i}$ ならば 0, さらに十分大きな N と任意の ω に対して detailed balance condition

$$c_i(\eta)\exp[-H_\omega(\eta)] = c_i(\eta^{0,e_i})\exp[-H_\omega(\eta^{0,e_i})]$$

を満たしている．この detailed balance condition により L は ω, λ によらず $\mu_{\Lambda,\omega,\lambda}$ に対して対称な作用素になっている．

$\chi(\rho)$ を

$$\chi(\rho) := \sum_{x \in \mathbf{Z}^d} E_\rho[\eta_0; \eta_x]$$

とする．但し E_ρ は無限系の Gibbs 測度 μ による平均で，添字の $\rho \in [0,1]$ は $E_\rho[\eta_0] = \rho$ となることを表している．拡散係数行列 $D(\rho)$ は対称行列で，d-次元のベクトル $\alpha = {}^t(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_d)$ に対して

$$\begin{aligned} \langle \alpha, D(\rho)\alpha \rangle &:= \sum_{i,j=1}^{d} \alpha_i D_{i,j}(\rho)\alpha_j \\ &= \frac{1}{2\chi(\rho)} \inf_g E_\rho \left[\sum_{i=1}^{d} c_i(\eta) \left(\alpha_i(\eta_{e_i} - \eta_0) - \sum_{x \in \mathbf{Z}^d} \pi^{0,e_i} \tau_x g \right)^2 \right] \end{aligned}$$

で定義される．但し $\inf_g$ は局所関数全体について inf をとるものとする．

定理 2.2 拡散係数行列 $D(\rho)$ は $\rho \in [0,1]$ に関して 1 階連続微分可能である．

3 Varadhan Yau [6] の結果より

まず Varadhan Yau [6] の主結果であるこのモデルの流体力学極限の結果を述べる．前節で $\Lambda = \Lambda_N$ のサイズでの Markov 作用素 L を定義したがこの境界条件を周期的境界条件にしたもの (同じ L で書く) を考え更に $(2N+1)^2 L$ の生成する Markov 過程を $\eta^N(t)$ その推移確率を P_N とする．また $\theta \in [-1/2, 1/2)^d$ 上の測度である経験分布 $m_t^N(d\theta)$ を

$$m_t^N(d\theta) := \frac{1}{|\Lambda_N|} \sum_{x \in \Lambda_N} \eta_x^N(t) \delta_{x/2N+1}(d\theta)$$

と定義する．

命題 3.1 (Theorem 2.1 of [6]) J をテスト関数とする．

$$\limsup_{N\to\infty} P_N \left[\left| \int J(\theta) m_0^N(d\theta) - \int J(\theta)\rho_0(\theta) d\theta \right| > \delta \right] = 0$$

を満たせば任意の $0 \le t \le T$ で

$$\limsup_{N\to\infty} P_N \left[\left| \int J(\theta) m_t^N(d\theta) - \int J(\theta)\rho(t,\theta) d\theta \right| > \delta \right] = 0$$

を満たす．但し $\rho(t,\theta)$ は

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho(t,\theta) = \nabla \left(D(\rho(t,\theta)) \nabla \rho(t,\theta) \right), \quad \rho(0,\theta) = \rho_0(\theta)$$

の一意解である．

この節の残りで Varadhan Yau [6] の中で, 我々の定理の証明に必要な記号や定理を抜粋する.

線形空間 $\mathcal{G}$ を

$$\mathcal{G} := \{h : h \text{ is a local function and } h \text{ satisfies } E^{\mu}[h|\mathcal{F}_s] = 0 \text{ for some } s\},$$

で定義する. 但し $\mathcal{F}_s$ は Λ_s 内の総粒子数 $\sum_{x\in\Lambda_s}\eta_x$ と Λ_s の外側の配置 $\{\eta_y : y \notin \Lambda_s\}$ から生成される σ-algebra である. 任意の $f \in \mathcal{G}$ に対して

$$\begin{aligned} V(h;\rho) &:= \limsup_{l\to\infty,\rho'\to\rho} E_{\rho'}[V_l(h,m,\omega)] \\ V_l(h,m,\omega) &:= l^d E_{\Lambda_l,m,\omega}\left[\left(\frac{1}{|\Lambda_{l_1}|}\sum_{x\in\Lambda_{l_1}}\tau_x h\right)(-L_{\Lambda_l})^{-1}\left(\frac{1}{|\Lambda_{l_1}|}\sum_{x\in\Lambda_{l_1}}\tau_x h\right)\right], \end{aligned}$$

と定義する. 但し $l_1 = l - \sqrt{l}$, $E_{\Lambda_l,m,\omega}$ は $\mu_{\Lambda_l,\omega,\lambda}$ での平均 $E_{\Lambda_l,\omega,\lambda}$ に対して条件付き平均 $E_{\Lambda_l,m,\omega}[\cdot] = E_{\Lambda_l,\omega,\lambda}[\cdot|\sum_{x\in\Lambda_l}\eta_x = m]$ とする. このとき自然に $f,g \in \mathcal{G}$ に対して

$$V(f,g;\rho) := \frac{1}{4}[V(f+g;\rho) - V(f-g;\rho)]$$

と定義することにより V は $\mathcal{G}$ 上の内積になる.

命題 3.2 (Theorem 8.2 of [6]) 任意の $h \in \mathcal{G}$ に対して V は以下のような変分公式をもつ;

$$\frac{1}{2}V(h;\rho) = \sup_{\alpha_i\in\mathbf{R},u\in\mathcal{G}}\left[V(h,\sum_{i=1}^d \alpha_i w_i - Lu;\rho) - \frac{1}{2}V(\sum_{i=1}^d \alpha_i w_i - Lu;\rho)\right]$$

但し w_i は i-方向に対する current で $w_i(\eta) := c_i(\eta)(\eta_0 - \eta_{e_i})$ である.

V に関する $\mathcal{G}$ の閉包 $\overline{\mathcal{G}}$ を考える. また $\mathcal{G}^{(w)}$ を current $\{w_i\}_{i=1}^d$ の張る $\mathcal{G}$ の部分空間, $\mathcal{G}^{(0)}$ を $\{(\eta_{e_i} - \eta_0)\}_{i=1}^d$ の張る $\overline{\mathcal{G}}$ の部分空間とする. この命題 3.2 は $\mathcal{G}^{(w)} + L\mathcal{G}$ は $\overline{\mathcal{G}}$ の中で稠密であることを主張している. また $\mathcal{G}^{(0)} + L\mathcal{G}$ も同様に $\overline{\mathcal{G}}$ の中で稠密であることが証明され, さらに $\mathcal{G}^{(0)} \perp L\mathcal{G}$ が示される. すなわち $\overline{\mathcal{G}} = \mathcal{G}^{(0)} \oplus \overline{L\mathcal{G}}$ であることが示された.

さてこの線形空間 $\overline{\mathcal{G}}$ と拡散係数行列 D の関係であるが, $\overline{\mathcal{G}} = \mathcal{G}^{(0)} \oplus \overline{L\mathcal{G}}$ であるので current w_i の部分空間 $\overline{L\mathcal{G}}$ への直交射影を ξ_i とする. このとき $\{D_{i,j}\}_{j=1}^d$ が存在して V の内積での等号

$$w_i = -\sum_{j=1}^d D_{i,j}(\eta_{e_j} - \eta_0) + \xi_i$$

が成立する. この $D_{i,j}$ こそが拡散係数行列である.

4　勾配に関する同値類と代表

前節で拡散係数行列は current w を $\overline{\mathcal{G}}$ の元として直交分解したときの $(\eta_e-\eta_0)$ の係数であると述べたが残念なことに $V((\eta_e-\eta_0);\rho)$ を計算することができない．このため我々は w_i の $\overline{L\mathcal{G}}$ への直交射影 ξ_i を考える．誤解を恐れずに書くとこの節ではこの ξ_i が ρ によらないことを示しそれにより主定理を証明する．もちろん V が ρ 毎に定義されているため一般には ξ_i は ρ によるものであるがここで主張する正確な命題は **「ρ によらない局所関数の列 $\{g_{i,n}\}$ が存在して，各 ρ 毎に $V(\cdot;\rho)$ の内積で $Lg_{i,n}\to\xi_i$ となる」** である．

関数 η^A は $\eta^A := \prod_{x\in A} 1_{\{\eta_x=1\}}$ と定義されていたが，$\{\eta^A\}_A$ は局所関数全体の基底になり，局所関数 f の係数は

$$\hat{f}(A) := \sum_{B\subset A}(-1)^{\#(A\setminus B)} f(\eta_B),$$

で与えられる．但し η_B は $x\in B$ ならば $(\eta_B)_x=1$, $x\notin B$ ならば $(\eta_B)_x=0$ をみたす特殊な配置とする．これから $\{\hat{f}(A)\}_A$ は局所関数 f の係数とみなす．局所関数の係数 $\hat{f}$ は，ある $\Lambda=\Lambda(f)\subset \mathbf{Z}^d$ が存在して $A\cap\Lambda^c\neq\emptyset$ ならば $\hat{f}(A)=0$ であることに注意する．

$\mathbf{Z}^d$ の部分集合全体からなる集合 $\mathcal{P}(\mathbf{Z}^d)$ に並行移動による同値関係 $\simeq$ を定義する，すなわちある $x\in\mathbf{Z}^d$ が存在して $\tau_x A = B$ であれば $A\simeq B$ とする．この同値関係に対して同値類，代表を考え，その代表を $\mathcal{A}$ とする．任意の関数 $\hat{f}:\mathcal{P}(\mathbf{Z}^d)\to\mathbf{R}$ に対して

$$(\mathbf{H}\hat{f})(A) := \sum_{x\in\mathbf{Z}^d}\hat{f}(\tau_x A)$$

とし，任意の局所関数 f に対して

$$Hf := \sum_{A\in\mathcal{A}}(\mathbf{H}\hat{f})(A)\eta^A$$

と定義する．

補題 4.1 任意の局所関数 f に対してある局所関数列 $h=\{h_i\}_{i=1}^d$ が存在して

$$f = Hf + \sum_{i=1}^d (h_i - \tau_{e_i}h_i)$$

を満たす．

この補題により同値関係 $\sim$ をある局所関数列 $h=\{h_i\}_{i=1}^d$ が存在して

$$f = g + \sum_{i=1}^d (h_i - \tau_{e_i}h_i).$$

をみたすとき $f \sim g$ と定義する. $\sim$ に関して同値類, 代表を考えると局所関数の部分集合 $\{\sum_{A\in\mathcal{A}} \hat{f}(A)\eta^A\}$ が代表になり H は射影になっている. またこの代表は $\overline{\mathcal{G}}$ の部分空間でもある.

補題 4.2 $\overline{\mathcal{G}}$ の部分空間 $\mathcal{G}^{(g)} := \{(\tau_{e_i}h - h) : 1 \le i \le d, h$ は局所関数 $\}$ は任意の ρ に対して $V(\cdot;\rho)$ の内積で $\mathcal{G}^{(g)} = \mathcal{G}^{(0)}$ である.

この補題から H は同値類の射影であるだけでなく内積 V に関する直交射影にもなっているように思えるが決してそうはなっていない. また誤解を恐れずに書くと $w_i = \sum_j D_{i,j}(\eta_{e_i} - \eta_0) + \xi_i$ であったので両辺に対して H をほどこすと形式的には $Hw_i = H\xi_i$ なる等式が現れる. ξ_i を近似する $\{Lg_n\}$ が存在するので我々はこの $H\xi_i$ を近似する $\{HLg_n\}$ の g_n を, 正確には $\hat{g_n}$ を求める.

補題 4.3 任意の局所関数 g に対して $V(\cdot;\rho)$ の内積で $Lg = LHg$ である.

この補題より求めるべき関数列 g_n またはその係数 $\hat{g_n}$ は $\hat{g_n} : \mathcal{A} \to \mathbf{R}$ を求めればよいことが分かる.

$A \in \mathcal{A}$ に対して局所関数 $HL\eta^A$ の係数を $\hat{f}_A$ とする. すなわち $\hat{f}_A : \mathcal{A} \to \mathbf{R}$ を $HL\eta^A = \sum_{B\in\mathcal{A}} \hat{f}_A(B)\eta^B$ を満たすように定義する. 同様に current に対して Hw_i を考えその係数を $\hat{w}_i^h$ とする. すなわち $Hw_i = \sum_{B\in\mathcal{A}} \hat{w}_i^h(B)\eta^B$ を満たすように定義する.

定理 4.4 $\{g_i(A)\}_{A\in\mathcal{A}}$ が存在して $\mathcal{A}$ の各点 B で

$$\hat{w}_i^h(B) - \sum_{A\in\mathcal{A}} g_i(A)\hat{f}_A(B) = 0$$

を満たす. さらにこの $\{g_i(A)\}\}$ を用いて局所関数の列 $\{g_{i,n}\}$ を

$$g_{i,n} := \sum_{A\in\mathcal{A}, \mathrm{diam}A<n} g_i(A)\eta^A$$

で定義する. このとき局所関数の列 $\{h_{i,j,n}\}_n$ $(1 \le j \le d)$ が存在して $V(w_i - \sum_{j=1}^d(\tau_{e_j}h_{i,j,n} - h_{i,j,n}) - Lg_{i,n};\rho)$ は ρ に関して一様に 0 へ収束する.

形式的には $\sum_{A\in\mathcal{A}} g_i(A)\eta^A = \xi_i$ であると思って構わないが, 左辺の無限和が意味をもたないことに注意する. この定理によりこの節の冒頭で述べた命題の局所関数の列を実際に構成したことになる.

この $\{g_{i,n}\}$ を用いることにより対称行列である拡散係数行列 D が任意の $\alpha = {}^t(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_d)$ に対して

$$\langle\alpha, D(\rho)\alpha\rangle = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2\chi(\rho)} E_\rho\left[\sum_{i=1}^d c_i(\eta)\alpha_i^2 \left((\eta_{e_i} - \eta_0) - \sum_{x\in\mathbf{Z}^d} \pi^{0,e_i}\tau_x g_{i,n}\right)^2\right]$$

で与えられるが, この右辺に現れる関数列は各 n 毎には連続微分可能でその導関数が 定理 4.4 から一様収束することがわかり主定理が証明される.

5 Dual 過程

前節定理 4.4 で ξ_i を近似する関数列の係数 $\{g_i(A)\}$ を構成したがこの構成に「Dual 過程」を用いる.

$A^{x,y}$ を

$$A^{x,y} := \begin{cases} A \setminus \{x\} \cup \{y\} & \text{if } x \in A \text{ and } y \notin A, \\ A \setminus \{y\} \cup \{x\} & \text{if } y \in A \text{ and } x \notin A, \\ A & \text{otherwise.} \end{cases}$$

のように定義し, jump rate c_i の係数を $\hat{c}_i$ と書くことにして実際に $L\eta^A$ を計算してみると次のように書ける;

$$\begin{aligned} L\eta^A &= \sum_{i=1}^{d} \sum_{x:A^{x,x+e_i}\neq A} \Bigg[\sum_{D\subset A^{x,x+e_i}} \hat{c}_i(\tau_{-x}D)\eta^{A^{x,x+e_i}} \\ &\quad + \sum_{E\subset A^{x,x+e_i}} \sum_{F\subset \mathbf{Z}^d\setminus A^{x,x+e_i}:F\neq\emptyset} \hat{c}_i(\tau_{-x}(E\cup F))\eta^{A^{x,x+e_i}\cup F} \\ &\quad - \sum_{D\subset A} \hat{c}_i(\tau_{-x}D)\eta^A \\ &\quad - \sum_{E\subset A} \sum_{F\subset \mathbf{Z}^d\setminus A:F\neq\emptyset} \hat{c}_i(\tau_{-x}(E\cup F))\eta^{A\cup F} \Bigg]. \end{aligned} \tag{1}$$

$c(A,B)$ を次のように定義する

$$c(A,B) := \sum_{C\in\mathcal{T}_B} \tilde{c}(A,C),$$

但し $\mathcal{T}_B := \{C \subset \mathbf{Z}^d : \exists x \in \mathbf{Z}^d \text{ s.t. } \tau_x C = B\}$ で

$$\tilde{c}(A,B) := \sum_{i=1}^{d} \sum_{x:A=B^{x,x+e_i}\neq B} \tau_x c_i(\eta_A).$$

とする. この $\tilde{c}(A,B)$ は我々の考えている格子気体が特殊な配置 η_A にあったとき η_B へジャンプする jump rate にほかならない. さらに η_A から η_B へ直接ジャンプすることが出来ないときには $\tilde{c}(A,B)=0$ になっていることに注意する. ここで (1) 式右辺の第 1,3 行目に注目すると x を止める毎に $\eta^{A^{x,x+e_i}}$ の係数は $\sum_{D\subset A^{x,x+e_i}} \hat{c}_i(\tau_{-x}D) = c(A^{x,x+e_i}, A)$ であるし同様に x を止める毎に η^A の係数は $\sum_{D\subset A} \hat{c}_i(\tau_{-x}D) = c(A, A^{x,x+e_i})$ である. (1) 式の第 2,4 行からでて来る項 (に H をかけたもの) を $\Phi_A(\eta)$ と書くことにより

$$HL\eta^A = \sum_{B\in\mathcal{A}} \left[c(B,A)\eta^B - c(A,B)\eta^A\right] + \Phi_A(\eta)$$

と書ける. このとき $\Phi_A(\eta)$ の係数 $\{\widehat{\Phi_A}(B)\}$ は $\#B \le \#A$ ならば $\widehat{\Phi_A}(B) = 0$ であることに注意する.

$g(\eta) = \sum_A \hat{g}(A)\eta^A$ に対して $HLg(\eta)$ を計算すると

$$HLg(\eta) = \sum_A (\mathcal{L}\hat{g})(A)\eta^A + \sum_A \hat{g}(A)\Phi_A(\eta)$$

となる. ただし $\mathcal{L}$ は $g : \mathcal{A} \to \mathbf{R}$ に対して

$$(\mathcal{L}g)(A) := \sum_{B\in\mathcal{A}} c(A,B)(g(B) - g(A))$$

と定義する.

形式的には $Hw_i = \sum_{A\in\mathcal{A}} g_i(A)HL\eta^A$ を満たす $\{g_i(A)\}$ の構成を考えているのでこの係数の一致を考えさらに $\#A$ に関して帰納的に求まると考える. 実際に (帰納的に求まった $g_i(B)$ $(B : \#B < \#A)$ を用いて)

$$(\mathcal{L}g_i)(A) = \hat{w}_i^h(A) - \sum_{B\in\mathcal{A}:\#B<\#A} g_i(B)\widehat{\Phi_B}(A)$$

の解を求めることになる. $\mathcal{L}$ の Green 関数が分かるので, 前節定理 4.4 の $\{g_i(A)\}$ の存在が分かる. また $c(A,B)$ の性質から $\mathcal{L}$ の生成する Markov 過程が我々の考えている格子気体のうち全空間で有限個しか粒子がない特殊な配置 η_A から出発したものを考えていることになるので, この Green 関数のある種のオーダー評価ができ, 定理 4.4 の後半の主張が分かる.

参考文献

[1] C. Bernardin, Regularity of the diffusion coefficient for lattice gas reversible under Bernoulli measures, Stochastic Process. Appl. 101 (2002), no. 1 43-68

[2] C. Landim, S. Olla, and S.R.S. Varadhan, Symmetric simple exclusion process: regularity of the self-diffusion coefficient, Comm.Math.Phys. 224 (2001), no. 1 pp.307-321

[3] T. M. Liggett, Interacting particle systems, Springer, (1985)

[4] Y. Nagahata, Regularity of the diffusion coefficient matrix for the lattice gas with energy, to appear Ann. Inst. H. Poincare Probab. Statist.

[5] Y. Nagahata, Regularity of the diffusion coefficient matrix for generalized exclusion process, preprint

[6] S.R.S.Varadhan,H.T.Yau. Diffusive limit of lattice gases with mixing condition, Asian J.Math vol. 1 (1997), pp. 623-678

1次元多核成長模型の多点高さ分布

笹本 智弘 (東工大・理工学研究科)

近年1次元の界面成長模型や非対称排他過程といった確率過程模型と組合せ論・ランダム行列との関連が認識され、その性質を詳細に調べることが出来るようになりつつある.

本講演では, 一連の発展の中で中心的な役割を果たしている1次元多核成長模型 (polynuclear growth model, 以下 PNG 模型) と呼ばれる界面成長模型の性質, 特に多点における高さの同時分布の漸近的な振舞について説明する.

次のような1次元の確率的界面成長模型を考える. 時刻0で原点において高さ1の核生成が起こり, それは左右両方向に速さ1で成長する. するとそこに高さ1の台が出来るが, その上では, 単位時間・単位長さあたりの割合2で新たな核生成が起こる. 新たな核はまた左右両方向に速さ1で成長し, その上では, 単位時間・単位長さあたりの割合2で新たな核生成が起こる.

これが1次元 PNG 模型であり, 本講演ではこのモデルおよびその変型版の高さ揺らぎを問題にする. 各時刻各点における高さを $h(x,t)$ と書くことにすると, Prähofer と Spohn は, [1] の中でこのモデルの原点における高さの揺らぎに関して次のような事を示した:

$$\lim_{t\to\infty} \mathbb{P}\left[\frac{h(0,t)-2t}{t^{1/3}} < s\right] = F_2(s). \tag{1}$$

ただし右辺に現れる関数は GUE ランダム行列の最大固有値のスケールされた分布で, GUE Tracy-Widom 分布と呼ばれている. これが PNG 模型とランダム行列理論の関係の一番基本的なものである.

さらに [2] においては, 外場のある PNG 模型や半無限における PNG 模型について同様の量に関する結果が得られた.

さらに多点における高さ分布について考えることも出来る. このような問題に関しては, 外場等の無い場合に関しては [3] で考察されたが, 外場のある場合や半無限における場合に関しては, [4, 5] で調べられ, 対称性のあるランダム行列理論との関係などが明らかにされた.

参考文献

[1] M. Prähofer and H. Spohn, Universal distributions for growth processes in 1+1 dimensions and random matrices. *Phys. Rev. Lett.*, 84:4882-4885, 2000.

[2] J. Baik and E. M. Rains. Limiting distributions for a polynuclear growth model with external sources. *J. Stat. Phys*, 100:523–541, 2000.

[3] K. Johansson. Discrete polynuclear growth and determinantal processes. *Com. Math. Phys.* 242:277-329, 2003.

[4] T. Sasamoto and T. Imamura. Fluctuations of the One-Dimensional Polynuclear Growth Model in Half-Space *J. Stat. Phys.* 115:749-803, 2004.

[5] T. Imamura and T. Sasamoto. Fluctuations of the one-dimensional polynuclear growth model with external sources math-ph/0407011.

A time-change approach to Kotani's extension of Yor's formula

Yuu Hariya
Research Institute for Mathematical Sciences,
Kyoto University, Sakyo-ku, Kyoto 606-8502, Japan

In [1], Kotani proved analytically that expectations for additive functionals of Brownian motion $\{B_t, t \geq 0\}$ of the form

$$E_0[f(B_t)g(\int_0^t \varphi(B_s)\,ds)]$$

have the asymptotics $t^{-3/2}$ as $t \to \infty$ for some suitable non-negative functions φ, f and g. This generalizes, in the asymptotic form, Yor's explicit formula [2, formula (6.e)] for exponential Brownian functionals.

In this talk, we discuss this generalization probabilistically, by using a time-change argument. We may easily see from our argument that this asymptotics $t^{-3/2}$ comes from the transition probability of 3-dimensional Bessel process.

References

[1] S. Kotani, Analytic approach to Yor's formula of exponential additive functionals of Brownian motion, in Itô's stochastic calculus and probability theory, N. Ikeda, S. Watanabe, M. Fukushima, H. Kunita (Eds.), 185–195, Springer, Tokyo (1996)

[2] M. Yor, On some exponential functionals of Brownian motion, Adv. Appl. Probab. **24**, 509–531 (1992)

α-determinant and Wishart distribution

白井 朋之 (九州大数理) *

$n\times n$ 行列 $A=(a_{ij})_{i,j=1}^{n}$ に対して,

$$\det_\alpha A=\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n}\alpha^{d(\sigma)}\prod_{i=1}^{n}a_{i\sigma(i)}$$

と定義される行列変数の関数を α-行列式とよぶ. $d(\sigma)$ は $\sigma\in\mathfrak{S}_n$ を表現するに必要な最小の互換の個数である. 比較のために同様の関数

$$q\text{-}\det A=\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n}q^{\iota(\sigma)}\prod_{i=1}^{n}a_{i\sigma(i)},$$

を定義する. $\iota(\sigma)$ は反転数である. よく知られているように任意の非不定値行列 A に対して不等式

$$\det_1 A\ge\det_0 A\ge\det_{-1}A\ge 0$$

が成り立つ. q-det$A$ に対しては以下の結果が示されている.

定理 1 (Bozéjko-Speicher). $-1\le q\le 1$ ならば任意の非負定値行列 A に対して不等式 q-det$A\ge 0$ が成り立つ.

問題. $\det_\alpha A$ について上と同様の不等式が成り立つための $\alpha\in\mathbf{R}$ を決定せよ.

上記の問題は以下の問題と密接に関係する.

問題. $\alpha\in\mathbf{R}$ と $p\times p$-実対称非負定値行列 K に対して, 母関数が

$$\widehat{\mu_{\alpha,K}}(z)=\det(I+\alpha(I-Z)K)^{-1/\alpha}.$$

と与えられる $\mu_{\alpha,K}$ は存在するか?

現在まで証明できているのは以下のような α についてである.

定理 2. K は $p\times p$-実対称非負定値行列とし,

$$\alpha\in[0,\frac{2}{p-1}]\cup\{\frac{2}{p-1},\frac{2}{p-2},\dots,1,2\}$$

とする. このとき, $Q=\{0,1,2,\dots\}^p$ 上の確率測度 $\mu_{\alpha,K}$ の母関数 $\widehat{\mu_{\alpha,K}}(z)$ は Wishart 行列 $X\in W(2/\alpha,\alpha K/2)$ を用いて

$$\widehat{\mu_{\alpha,K}}(z)=\widehat{E^X\Pi_X}(z)$$

とあらわされる. Π_X はランダムな強度 $(X_{11},\dots,X_{pp})$ をもつ Poisson 測度である. 特に $\det_\alpha K$ は次のような表現をもつ.

$$\det_\alpha K=E[X_{11}\cdots X_{pp}]\ge 0.$$

ここで, Wishart 分布 $W_p(\beta,K)$ とは, $\beta>p-1$ のときは以下の分布で与えられる $p\times p$ 実対称正定値行列全体のなす集合上の確率分布である.

$$w_{p,\beta,K}(X)=C^{-1}\exp(-\frac{1}{2}\operatorname{Tr}K^{-1}X)(\det X)^{\frac{\beta-(p+1)}{2}}.$$

*研究集会「大規模相互作用系の確率解析」2004/10/20～22 @京都大

Recurrence and transience of multi-dimensional diffusion processes in random environments

高橋　弘　慶應義塾大学院理工学研究科

$\mathcal{W}$ を $W(0)=0$ をみたす $\mathbf{R}$-値連続関数全体とする．またその上の確率測度を Q とする．$W_1, W_2, \ldots, W_d$ を $\{W(x), x \in \mathbf{R}, Q\}$ の d 個の独立なコピーとして，$\mathbf{W}=(W_1, W_2, \ldots, W_d)$ とする．$\mathbf{W}$ を固定したときに生成作用素

$$\sum_{k=1}^{d} \frac{1}{2} e^{W_k(x_k)} \frac{\partial}{\partial x_k} \left\{ e^{-W_k(x_k)} \frac{\partial}{\partial x_k} \right\}$$

に対応する多次元拡散過程 $X_{\mathbf{W}}(t)$ をランダム媒質 $\mathbf{W}$ の中の多次元拡散過程とみなす．$X_{\mathbf{W}}(t)$ は独立な d 個の 1 次元 Brown 運動について，空間と時間に関するスケーリングを取ったもので実現される．

媒質を反射壁 Brown 運動にした場合，多次元拡散過程の漸近挙動に関して次の結果を得た．

定理

(1) $\{W, Q\}$ が非負反射壁 Brown 運動のとき，$X_{\mathbf{W}}$ はほとんどすべての媒質 $\mathbf{W}$ についてどの次元でも再帰的である．

(2) $\{W, Q\}$ が非正反射壁 Brown 運動のとき，$X_{\mathbf{W}}$ はほとんどすべての媒質 $\mathbf{W}$ について 2 次元以上で非再帰的である．

注意 1 次元の場合は，田中氏によって非負，非正のどちらの場合もほとんどすべての $\{W, Q\}$ について再帰的で $(\log t)^{-2} X_W(t)$ の分布が $t \to \infty$ で収束することが示されている．

定理は市原氏による，多次元拡散過程に関する再帰性，および非再帰性の判定条件を用いることで示される．

Equilibrium fluctuations for two component zero range processes

籠屋　恵嗣
筑波大学大学院数理物質科学研究科

本講演では，２つの異なる飛躍率を持つ空間的に一様でないゼロレンジ過程に対する平衡揺動問題を考える．扱うモデルは，状態空間 $\mathcal{X} = \mathbf{N}^{\mathbf{Z}} = \{\eta = (\eta_x)_{x \in \mathbf{Z}} : \eta_x \in \mathbf{N}\}$ 上のマルコフ過程で，次の生成作用素を持つものである．

$$\begin{aligned} Lf(\eta) &= \sum_{x \geq 0} c_1 \big\{ 1_{\{\eta_x \geq 1\}} [f(\sigma^{x,x+1}\eta) - f(\eta)] + 1_{\{\eta_{x+1} \geq 1\}} [f(\sigma^{x+1,x}\eta) - f(\eta)] \big\} \\ &\quad + \sum_{x \leq -1} c_2 \big\{ 1_{\{\eta_x \geq 1\}} [f(\sigma^{x,x+1}\eta) - f(\eta)] + 1_{\{\eta_{x+1} \geq 1\}} [f(\sigma^{x+1,x}\eta) - f(\eta)] \big\} \end{aligned}$$

但し，

$$(\sigma^{x,y}\eta)_u = \begin{cases} \eta_x - 1 & (u = x) \\ \eta_y + 1 & (u = y) \\ \eta_u & (\text{otherwise}) \end{cases}$$

である．初期分布は $\mathcal{X}$ 上の空間的に一様な直積測度 $\nu_\kappa\ (\kappa > 0)$ で

$$\nu_\kappa\{\eta : \eta_x = n\} = \kappa^n (1+\kappa)^{-(n+1)}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

となるものをとる．生成作用素 L と初期分布 ν_κ で生成されるマルコフ過程を $\eta(t) = \{\eta_x(t) : x \in \mathbf{Z}\}$ とし，density field

$$Y_t^N(F) = N^{-1/2} \sum_{x \in \mathbf{Z}} F(x/N)[\eta_x(N^2 t) - \kappa]$$

を考える．

定理　$\alpha \geq 3$ とすると，Y_t^N は $N \to \infty$ のとき，空間 $D([0,T], H^{-\alpha}(\mathbf{R}))$ 上 Y_t に弱収束する．但し，$H^{-\alpha}(\mathbf{R})$ は $\mathbf{R}$ 上の「ソボレフ空間」で，Y_t は次の確率偏微分方程式の（平衡）解として定まる無限次元の Ornstein-Uhlenbeck 過程である：

$$dY_t(u) = \begin{cases} c_1 \Phi'(\kappa) \Delta Y_t\, dt + \sqrt{2c_1 \Phi(\kappa)} \nabla dW_t(u), & (u > 0) \\ c_2 \Phi'(\kappa) \Delta Y_t\, dt + \sqrt{2c_2 \Phi(\kappa)} \nabla dW_t(u), & (u < 0) \end{cases}$$

ここで，$\Phi(\kappa) = \dfrac{\kappa}{1+\kappa}$ である．

Non-colliding generalized meanders and random matricies

Makoto Katori and Hideki Tanemura
Chuo University and Chiba University

Let $\mathbb{R}_+$ be the set of all nonnegative real numbers. For $t > 0$, $x, y \in \mathbb{R}_+$ and $\nu > -1$ we denote by $G_t^{(\nu)}(t; y|x)$ the transition probability density of $2(\nu+1)$ dimensional Bessel process [11], that is,

$$\begin{aligned} G^{(\nu)}(t;y|x) &= \frac{y^{\nu+1}}{x^\nu}\frac{1}{t}e^{-(x^2+y^2)/2t}I_\nu\left(\frac{xy}{t}\right), \quad x > 0, y \in \mathbb{R}_+, \\ G^{(\nu)}(t;y|0) &= \frac{y^{2\nu+1}}{2^\nu\Gamma(\nu+1)t^{\nu+1}}e^{-y^2/2t}, \quad y \in \mathbb{R}_+, \end{aligned}$$

where $\Gamma(z)$ is the Gamma function and $I_\nu(z)$ is the modified Bessel function :

$$I_\nu(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z/2)^{2n+\nu}}{\Gamma(n+1)\Gamma(\nu+n+1)}.$$

For $T > 0$, $\kappa \in [0, 2(\nu+1))$, we put

$$h_T^{(\nu,\kappa)}(t,x) = \int_0^\infty dy\ G^{(\nu)}(T-t;y|x)y^{-\kappa}, \quad x \in \mathbb{R}_+, t \in [0,T],$$

and

$$\begin{aligned} G_T^{(\nu,\kappa)}(s,x;t,y) &= \frac{1}{h_T^{(\nu,\kappa)}(s,x)}G^{(\nu)}(t-s;y|x)h_T^{(\nu,\kappa)}(t,y), \quad x,y \in \mathbb{R}_+, \\ G_T^{(\nu,\kappa)}(0,0;t,y) &= \frac{\Gamma(\nu+1-\kappa/2)}{\Gamma(\nu+1)}\left(\frac{1}{2t}\right)^{\kappa/2} G^{(\nu)}(t;y|0)h_T^{(\nu,\kappa)}(t,y), \quad y \in \mathbb{R}_+, \end{aligned}$$

for $0 \le s < t \le T$. This transition probability density $G^{(\nu,\kappa)}(s,x;t,y)$ is associated with the temporally inhomogeneous process called generalized meander, which is identical with the Brownian meander when $\nu = 1/2$ and $\kappa = 1$ [12].

Let

$$\mathbb{R}_{+<}^N = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}_+^N : 0 \le x_1 < x_2 < \cdots < x_N\}.$$

Now we consider the N generalized meanders conditioned that they never collide for a time interval $[0,T]$. According to the determinantal formula in [2, 3], the transition probability density is given as

$$g_{N,T}^{(\nu,\kappa)}(s,\mathbf{x};t,\mathbf{y}) = \frac{f_{N,T}^{(\nu,\kappa)}(s,\mathbf{x};t,\mathbf{y})\mathcal{N}_{N,T}^{(\nu,\kappa)}(T-t,\mathbf{y})}{\mathcal{N}_{N,T}^{(\nu,\kappa)}(T-s,\mathbf{x})}, \quad 0 \le s < t \le T,\ \mathbf{x},\mathbf{y} \in \mathbb{R}_{+<}^N,$$

where

$$f_{N,T}^{(\nu,\kappa)}(s,\mathbf{x};t,\mathbf{y})=\det_{1\le j,k\le N}\left[G_T^{(\nu,\kappa)}(s,x_j,t,y_k)\right],$$

and

$$\mathcal{N}_{N,T}^{(\nu,\kappa)}(t,\mathbf{x})=\int_{\mathbb{R}^N_{+<}}d\mathbf{y}\,f_{N,T}^{(\nu,\kappa)}(T-t,\mathbf{x};T,\mathbf{y}).$$

Since $f_{N,T}^{(\nu,0)}$ is temporally homogeneous and independent of T, we will write $f_N^{(\nu)}(t-s;\mathbf{y}|\mathbf{x})$ for $f_{N,T}^{(\nu,0)}(s,\mathbf{x};t,\mathbf{y})$. In [4] it is shown that for $\nu>-1$ and $\kappa\in[0,2(\nu+1))$

$$g_{N,T}^{(\nu,\kappa)}(0,\mathbf{0},t,\mathbf{y})=C_{N,T}^{\nu,\kappa}(t)\prod_{j=1}^N y_j^{2\nu+1}\prod_{1\le j<k\le N}(y_j^2-y_k^2)\,e^{-|\mathbf{y}|^2/2t}\,\widetilde{\mathcal{N}}_N^{(\nu,\kappa)}(T-t,\mathbf{y}),$$

where

$$C_{N,T}^{\nu,\kappa}(t)=\frac{T^{(N+\kappa-1)N/2}t^{-(N+\nu)N}}{2^{N(N+2a-1)/2}}\prod_{j=1}^N\frac{\Gamma(1/2)}{\Gamma(j/2)\,\Gamma(j/2+1/2+a)},$$

where $a=\nu-\kappa/2$. The N non-colliding generalized meanders *all started from the origin* $\mathbf{0}$ *at time* 0 is defined by the process $\mathbf{X}(t)$ associated with the transition probability density $g_{N,T}^{(\nu,\kappa)}$.

We denote by $\mathfrak{X}$ the space of countable subset ξ of $\mathbb{R}$ satisfying $\sharp(\xi\cap K)<\infty$ for any compact subset K. For $\mathbf{x}=(x_1,x_2,\dots,x_n)\in\bigcup_{\ell=1}^\infty\mathbb{R}^\ell$, we denote $\{x_i\}_{i=1}^n\in\mathfrak{X}$ by $\{\mathbf{x}\}$. Then $\Xi^N(t)=\{\mathbf{X}(t)\}$ is the diffusion process on the set $\mathfrak{X}$ with transition density function $\mathfrak{g}_{N,T}^{(\nu,\kappa)}(s,\xi;t,\eta)$, $0\le s\le t\le T$:

$$\mathfrak{g}_{N,T}^{(\nu,\kappa)}(s,\xi;t,\eta)=\begin{cases}g_{N,T}^{(\nu,\kappa)}(s,\mathbf{x};t,\mathbf{y}), & \text{if } s>0,\ \sharp\xi=\sharp\eta=N,\\ g_{N,T}^{(\nu,\kappa)}(0,\mathbf{0};t,\mathbf{y}), & \text{if } s=0,\ \xi=\{\mathbf{0}\},\ \sharp\eta=N,\\ 0, & \text{otherwise},\end{cases}$$

where $\mathbf{x}$ and $\mathbf{y}$ are the elements of $\mathbb{R}^N_{+<}$ with $\xi=\{\mathbf{x}\}$, $\eta=\{\mathbf{y}\}$. For $\mathbf{x}_N^{(m)}\in\mathbb{R}^N_{+<}$, $1\le m\le M+1$, and $N'=1,2,\dots,N$, we put $\mathbf{x}_{N'}^{(m)}=\left(x_1^{(m)},x_2^{(m)},\dots,x_{N'}^{(m)}\right)$ and $\xi_m^{N'}=\{\mathbf{x}_{N'}^{(m)}\}$. For a given time interval $[0,T]$, we consider the M intermediate times $0<t_1<t_2<\cdots<t_M<T$. Then the multitime transition density function of the process $\Xi^N(t)$ is given by

$$\mathfrak{g}_{N,T}^{(\nu,\kappa)}(t_1,\xi_1^N;\dots;t_{M+1},\xi_{M+1}^N)=\prod_{m=0}^M\mathfrak{g}_{N,T}^{(\nu,\kappa)}(t_m,\xi_m^N;t_{m+1},\xi_{m+1}^N),$$

where, for convenience, we set $t_0=0$, $t_{M+1}=T$ and $\xi_0^N=\{\mathbf{0}\}$. For a sequence $\{N_m\}_{m=1}^{M+1}$ of positive integers less than or equal to N, we define the $(N_1,N_2,\dots,N_{M+1})$-multitime correlation function by

$$\begin{aligned}&\rho_N^T\left(t_1,\mathbf{x}_{N_1}^{(1)};t_2,\mathbf{x}_{N_2}^{(2)};\dots;t_{M+1},\mathbf{x}_{N_{M+1}}^{(M+1)}\right)\\&=\int_{\prod_{m=1}^{M+1}\mathbb{R}_+^{N-N_m}}\prod_{m=1}^{M+1}\frac{1}{(N-N_m)!}\prod_{i=N_m+1}^N dx_i^{(m)}\mathfrak{g}_{N,T}^{(\nu,\kappa)}(t_1,\xi_1^N;t_2,\xi_2^N,\dots;t_{M+1},\xi_{M+1}^N).\end{aligned}$$

We study limit theorems of the correlation functions $\rho_N^{T_N}$ as $N \to \infty$. For an integer N and an antisymmetric $2N \times 2N$ matrix $A = (a_{ij})$, the Pfaffian is defined as

$$\mathrm{Pf}(A) = \frac{1}{N!} \sum_{\sigma} \mathrm{sgn}(\sigma) a_{\sigma(1)\sigma(2)} a_{\sigma(3)\sigma(4)} \cdots a_{\sigma(2N-1)\sigma(2N)},$$

where the summation is extended over all permutations σ of $(1, 2, \ldots, 2N)$ with restriction $\sigma(2k-1) < \sigma(2k), k = 1, 2, \ldots, N$.

Theorem 1 *Let $T_N = N$. For any $M \geq 1$, any sequence $\{N_m\}_{m=1}^{M+1}$ of positive integers, and any strictly increasing sequence $\{s_m\}_{m=1}^{M+1}$ of nonpositive numbers with $s_{M+1} = 0$,*

$$\begin{aligned} & \rho\left(s_1, \mathbf{x}_{N_1}^{(1)}; s_2, \mathbf{x}_{N_2}^{(2)}; \ldots; s_M, ; 0, \mathbf{x}_{N_{M+1}}^{(M+1)}\right) \\ \equiv & \lim_{N \to \infty} \rho_N^{T_N}\left(T_N + s_1, \mathbf{x}_{N_1}^{(1)}; T_N + s_2, \mathbf{x}_{N_2}^{(2)}; \ldots; T_N, \mathbf{x}_{N_{M+1}}^{(M+1)}\right) \\ = & \mathrm{Pf}\left[\mathbf{A}\left(\mathbf{x}_{N_1}^{(1)}, \mathbf{x}_{N_2}^{(2)}, \ldots, \mathbf{x}_{N_{M+1}}^{(M+1)}\right)\right]. \end{aligned}$$

where $\mathbf{A}\left(\mathbf{x}_{N_1}^{(1)}, \mathbf{x}_{N_2}^{(2)}, \ldots, \mathbf{x}_{N_{M+1}}^{(M+1)}\right)$ is the $2\sum_{m=1}^{M+1} N_m \times 2\sum_{m=1}^{M+1} N_m$ antisymmetric matrix determined by

$$\mathbf{A}\left(\mathbf{x}_{N_1}^{(1)}, \mathbf{x}_{N_2}^{(2)}, \ldots, \mathbf{x}_{N_{M+1}}^{(M+1)}\right) = (A^{m,n}(x_i^{(m)}, x_j^{(n)}))_{1 \leq i \leq N_m, 1 \leq j \leq N_n, 1 \leq m,n \leq M+1}$$

with 2×2 matrices $Q^{m,n}(x,y)$:

$$\begin{aligned} Q^{m,n}(x,y) &= \begin{pmatrix} \mathcal{D}(s_m, x; s_n, y) & \widetilde{\mathcal{S}}(s_n, x; s_m, y) \\ -\widetilde{\mathcal{S}}(s_m, y; s_n, x) & -\tilde{\mathcal{I}}(s_m, x; s_n, y) \end{pmatrix}, \\ \mathcal{D}(s,x;t,y) &= -\frac{1}{\pi} \int_0^1 d\lambda \left[\mathfrak{R}(\lambda, s, x)\widehat{\mathfrak{R}}(\lambda, t, y) - \widehat{\mathfrak{R}}(\lambda, s, x)\mathfrak{R}(\lambda, t, y)\right], \\ \tilde{\mathcal{I}}(s,x;t,y) &= -\frac{4}{\pi} \int_1^\infty d\lambda \left[\Psi(\lambda, s, x)\widehat{\Psi}(\lambda, t, y) - \widehat{\Psi}(\lambda, s, x)\Psi(\lambda, t, y)\right], \\ \mathcal{S}(s,x;t,y) &= \frac{2}{\pi} \int_1^\infty d\lambda \left[\Psi(\lambda, s, x)\widehat{\mathfrak{R}}(\lambda, t, y) - \widehat{\Psi}(\lambda, s, x)\mathfrak{R}(\lambda, t, y)\right]. \\ \widetilde{\mathcal{S}}(s,x;t,y) &= \mathcal{S}(s,x;t,y) - 1(s<t)\mathcal{G}(s,x;t,y). \end{aligned}$$

The function $\mathcal{G}$ is define by

$$\mathcal{G}(s,x;t,y) = s\sqrt{xy} \int_0^\infty d\eta J_\nu(2x\sqrt{\eta}) J_\nu(2y\sqrt{\eta}) e^{(s-t)\eta},$$

where J_ν is the Bessel functions with index ν. The functions $\mathfrak{R}, \widehat{\mathfrak{R}}, \Psi, \widehat{\Psi}$ depend $A = \nu - \kappa$ and $a = \nu - \kappa/2$, and defined by (i) when $A > -1$,

$$\mathfrak{R}(\theta, s, x) = \frac{1}{\Gamma(A+1)} \int_0^1 d\eta\ (1-\eta)^A \eta^{\nu/2} J_\nu(2x\sqrt{\theta\eta}) e^{-2s\theta\eta}.$$

(ii) when $A < -1, A \notin \mathbb{Z}_- \equiv \{\ldots, -2, -1\}$,

$$\mathfrak{R}(\theta, s, x) = \frac{1}{\Gamma(A+2)} J_\nu(2x\sqrt{\theta}) e^{-2s\theta}.$$

(iii) when $A \in \mathbb{Z}_-$,

$$\mathfrak{R}(\theta,s,x) = \left(\frac{d}{d\eta}\right)^{-A-1} \left\{\eta^{\nu/2} J_\nu(2x\sqrt{\theta\eta})e^{-2s\theta\eta}\right\}\Big|_{\eta=1}.$$

We also define a function $\widehat{\mathfrak{R}}(\theta,s,x)$, $\theta,s,x \in \mathbb{R}_+$ by
(i) when $A \geq 0$,

$$\widehat{\mathfrak{R}}(\theta,s,x) = \frac{1}{\Gamma(A+1)}\left\{a\int_0^1 d\eta\ (1-\eta)^A \eta^{\nu/2} J_\nu(2x\sqrt{\theta\eta})e^{-2s\theta\eta} - A\int_0^1 d\eta\ (1-\eta)^{A-1}\eta^{\nu/2}J_\nu(2x\sqrt{\theta\eta})e^{-2s\theta\eta}\right\}.$$

(ii) when $A \in (-1,0)$,
(a) if $\nu > 0$

$$\widehat{\mathfrak{R}}(\theta,s,x) = \frac{1}{\Gamma(A+1)}\left[a\int_0^1 d\eta\ (1-\eta)^A\eta^{\nu/2}J_\nu(2x\sqrt{\theta\eta})e^{-2s\theta\eta} - \int_0^1 d\eta\ (1-\eta)^A\frac{d}{d\eta}\left\{\eta^{\nu/2}J_\nu(2x\sqrt{\theta\eta})e^{-2s\theta\eta}\right\}\right],$$

(b) if $\nu = 0$

$$\widehat{\mathfrak{R}}(\theta,s,x) = \frac{1}{\Gamma(A+1)}\left[\frac{\kappa}{2}\int_0^1 d\eta\ (1-\eta)^{-\kappa}J_0(2x\sqrt{\theta\eta})e^{-2s\theta\eta} + 1 + \int_0^1 d\eta\ (1-\eta)^{-\kappa}\frac{d}{d\eta}\left\{J_0(2x\sqrt{\theta\eta})e^{-2s\theta\eta}\right\}\right].$$

(c) if $\nu \in (-1,0)$

$$\widehat{\mathfrak{R}}(\theta,s,x) = \infty.$$

(iii) when $A < -1, A \notin \mathbb{Z}_-$,
(a) if $\nu > 0$

$$\widehat{\mathfrak{R}}(\theta,s,x) = \frac{-1}{\Gamma(A+2)}\left[\frac{\kappa}{2}J_\nu(2x\sqrt{\theta})e^{-2s\theta} + \frac{d}{d\eta}\left\{\eta^{\nu/2}J_\nu(2x\sqrt{\theta\eta})e^{-2s\theta\eta}\right\}\Big|_{\eta=1}\right],$$

(b) if $\nu = 0$

$$\widehat{\mathfrak{R}}(\theta,s,x) = \frac{-1}{\Gamma(A+2)}\left[1-\frac{\kappa}{2}+\frac{\kappa}{2}J_0(2x\sqrt{\theta})e^{-2s\theta} + \frac{d}{d\eta}\left\{J_0(2x\sqrt{\theta\eta})e^{-2s\theta\eta}\right\}\Big|_{\eta=1}\right],$$

(c) if $\nu \in (-1,0)$

$$\widehat{\mathfrak{R}}(\theta,s,x) = \infty.$$

(iv) when $A \in \mathbb{Z}_-$,

$$\widehat{\mathfrak{R}}(\theta,s,x) = \left[a\left(\frac{d}{d\eta}\right)^{-A-1}\left\{\eta^{\nu/2}J_\nu(2x\sqrt{\theta\eta})e^{-2s\theta\eta}\right\}\Big|_{\eta=1} - \left(\frac{d}{d\eta}\right)^{-A}\left\{\eta^{\nu/2}J_\nu(2x\sqrt{\theta\eta})e^{-2s\theta\eta}\right\}\Big|_{\eta=1}\right].$$

We put

$$k[A] \equiv \max\{[A+2],0\}.$$

We define functions $\Psi(\theta,s,x)$, $\theta,s,x\in\mathbb{R}_+$ and $\widehat{\Psi}(\theta,s,x)$, $\theta,s,x\in\mathbb{R}_+$ by

$$\Psi(\theta,s,x) = \frac{(-1)^{k[A]}}{\Gamma(-A-1+k[A])}\int_1^\infty d\eta\ (\eta-1)^{k[A]-A-2}\left(\frac{d}{d\eta}\right)^{k[A]}\left\{\eta^{-\nu/2}J_\nu(2x\sqrt{\theta\eta})e^{-2s\theta\eta}\right\},$$

$$\widehat{\Psi}(\theta,s,x) = \frac{(-1)^{k[A]+1}}{\Gamma(-A-1+k[A])}\int_1^\infty d\xi\ \xi^a\int_\xi^\infty d\eta\ (\eta-\xi)^{k[A]-A-2}\left(\frac{d}{d\eta}\right)^{k[A]}\left\{\eta^{-\nu/2}J_\nu(2x\sqrt{\theta\eta})e^{-2s\theta\eta}\right\}.$$

Remark. The above results were partially obtained by Nagao [10]in the case $\nu = \frac{1}{2}, \kappa = 1$, and by [1] in the case $\nu \in \mathbb{N}, \kappa = \nu$.

References

[1] P.J. Forrester, T. Nagao, and G. Honner, Correlations for the orthogonal-unitary and symplectic-unitary transitions at the hard and soft edges, *Nucl. Phys.* **B553** (1999), 601-643.

[2] S. Karlin and L. McGregor, Coincidence properties of birth and death processes, *Pacific J.* **9**, 1109-1140 (1959).

[3] S. Karlin and L. McGregor, Coincidence probabilities, *Pacific J.* **9**, 1141-1164 (1959).

[4] M. Katori and H. Tanemura, Symmetry of matrix-valued stochastic process and noncolliding diffusion particle systems, *J. Math. Phys.* **45**, 3058-3085 (2004); arXiv:math.PR/0402061.

[5] M. Katori and H. Tanemura, Infinite systems of non-colliding generalized meanders, in preparation.

[6] M. Katori, T. Nagao and H. Tanemura, Infinite systems of non-colliding Brownian particles, *Adv. Stud. Pure Math.* **39**(2004), 283–306.

[7] W. König, and N. O'Connell, Eigenvalues of the Laguerre process as non-colliding squared Bessel processes, *Elect. Comm. in Probab.* **6**, 107-114 (2001).

[8] M. L. Mehta, *Random Matrices*, Academic Press, London 1991 (2nd ed.).

[9] T. Nagao, M. Katori and H. Tanemura, Dynamical correlations among vicious random walkers, *Phys. Lett.* **A 307**, 29-35 (2003).

[10] T. Nagao, Dynamical correlations for vicious random walk, *Nucl. Phys.* **B658[FS]** (2003) 373-396.

[11] D. Revuz and M. Yor, *Continuous Martingales and Brownian Motion*, Springer, 1998 (3rd ed.).

[12] M. Yor, *Some Aspects of Brownian Motion, Part I: Some Special Functionals*, Birkhäuser, Basel 1992.

ランダムなシュレーディンガー作用素、ランダム行列とその周辺

標記の研究集会は南就将（筑波大学数学系）を世話人として平成１５年１１月５日から７日にかけて東京大学大学院数理科学研究科において開催された。参加者は１８名であった。

ランダムなポテンシャルをもつシュレーディンガー作用素の日本における研究は、１９７０年代の福島正俊氏等の仕事や１９８０年代の小谷眞一氏等の仕事に顕著に見られるように、主として確率論研究者の手によって進められてきたが、近年になって多次元シュレーディンガー作用素におけるアンダーソン局在の証明に spectral shift function, multiscale analysis といった技法が常用されるようになり、研究の主役が作用素論の専門家に移りつつあるように見える。特に日本では東京大学の中村周氏、東北大学の中野史彦氏等によって多くの研究成果があげられている。本研究集会ではこの二氏を含む幾人かの方々に最近の研究成果を報告していただき、確率論がこの分野において寄与し得る方向を探った。同時に量子カオス、ランダム行列等に関わる物理学者も講演者に加え、ランダム系および量子カオス系におけるスペクトルの揺らぎについて総合的な研究を行なった。会場の準備にご協力いただいた中村周氏にこの場を借りて感謝する。

研究集会のプログラム、および各講演の概要を以下に示す。

プログラム

１１月５日 (水)

13:30–14:30 南就将・永井克己（筑波大学数学系・大学院数理物質科学研究科）
Lévy noise をポテンシャルとする Schrödinger 作用素の第一固有値について

14:45–15:45 中村周（東京大学大学院数理科学研究科）
状態密度に関するいくつかの話題

16:00–17:00 神永正博（東京電機大学理工学部）
電気伝導現象の数学的解析

１１月６日（木）

10:00–11:00 上木直昌（京都大学大学院人間・環境学研究科）
The integrated density of states of random Pauli Hamiltonians

11:15–12:15 野村祐司（東京工業大学大学院理工学研究科）
Random magnetic fields on line graphs

13:30–14:30 中野史彦（東北大学大学院理学研究科）
Absense of transport in Anderson localization II

14:45–15:45 笹本智弘（東京工業大学大学院理工学研究科）
一次元半無限多核成長模型とランダム行列における対称性の転移

16:00–17:00 永尾太郎（大阪大学大学院理学研究科）
量子グラフのエネルギー準位統計

１１月７日（金）

10:00–11:00 牧野浩典（東海大学電子情報学部）
ベリー・ロブニックの仮定を基礎とする可積分量子系の準位統計

11:15–12:15 南就将（筑波大学数学系）
準位統計の基礎概念と定常点過程

南就将・永井克己：Lévy noise をポテンシャルとする Schrödinger 作用素の第一固有値について

Gaussian white noise をポテンシャルとする一次元シュレーディンガー作用素を $H = -d^2/dt^2 + B'(t)$ とし、Dirichlet 境界条件の下での区間 $[0, L]$ への H の制限を H_L, H_L の第一固有値を $-\Lambda(L)$ とする。確率 1 で $-\Lambda(L) \to -\infty$ $(L \to \infty)$ となることがわかっているので、$\Lambda(L) > 0$ と考えてよい。H.P.McKean は 1994 年に、$(1/\pi)L\sqrt{\Lambda(L)}\exp(-\frac{8}{3}\Lambda(L)^{3/2})$ の分布が $L \to \infty$ とするとき指数分布 $e^{-x}dx$ に収束することを示した。H に対する integrated density of states $N(\lambda)$ が

$$N(\lambda) \sim \frac{1}{\pi}\sqrt{-\lambda}\exp\left(-\frac{8}{3}(-\lambda)^{3/2}\right), \quad \lambda \to -\infty$$

を満たすことと合わせると McKean の結果は

$$\lim_{L\to\infty} P(LN(-\Lambda(L)) > x) = e^{-x} \ (\forall x > 0)$$

と書くことができる。我々は white noise $B'(t)$ を Lévy 過程 $Q(t)$ の形式的な微分 $Q'(t)$ (Lévy noise) で置き換えた場合にこれと対応する結果を証明しようとしたが、今のところ成功していない。本講演ではその途中経過を報告した。

参考文献

H.P.McKean: A limit law for the ground state of Hill's equation. J. Stat. Phys. Vol. 74, Nos. 5/6 (1994) 1227–1232

M.Fukushima, S.Nakao: On spectra of the Schrödinger operator with a white Gaussian noise potential. Z. Wahr. verw. Geb. Vol. 37, 267–274 (1977)

A.M.Savchuk, A.A.Shkalikov: Sturm-Liouville operators with singular potentials. Math. Notes, Vol. 66, No. 6, 741–753 (1999)

中村周：状態密度に関するいくつかの話題

$\mathbf{Z}^d$ の有限部分集合 Λ 上の Anderson model

$$H(\mathbf{q})u(n) = (H_0u)(n) + q(n)u(n)$$

を考える。ただし $u \in L^2(\Lambda)$ であり H_0 は $L^2(\Lambda)$ における勝手な自己共役作用素、$\mathbf{q} = \{q(n);\ n \in \mathbf{Z}^d\}$ は独立同分布確率変数族とし、各 $q(n)$ の分布を μ とする。μ は必ずしも絶対連続ではないとして $\epsilon > 0$ に対して

$$s(\mu;\epsilon) := \sup\{\mu([s,t]) \mid 0 \le t - s \le \epsilon\}$$

と定義する。また $H(\mathbf{q})$ の spectral resolution を $E_{\mathbf{q}}(d\lambda)$ とする。初等的な方法で次の評価が得られた。

定理. 任意の $a < b$ に対して

$$\mathbf{E}[\mathrm{Tr}E_{\mathbf{q}}([a,b])] \le |\Lambda| s(\mu; b-a) .$$

この評価の系として、Wegner estimate および integrated density of states の連続性の評価が次のように得られる：

系 1.

$$\mathbf{P}(\mathrm{Spec}(H(\mathbf{q})) \cap [a,b] \ne \emptyset) \le |\Lambda| s(\mu; b-a) .$$

系 2. $\Lambda = C_L$ （辺の長さ L の立方体）、$H_0 = -\Delta_L$ (C_L における discrete Laplacian) として、integrated density of states を

$$k(E) = \lim_{L\to\infty} \frac{1}{|C_L|}\sharp\{\text{eigen values of } H(\mathbf{q}) \le E\}$$

とすると、任意の $a < b$ に対して $k(b) - k(a) \le s(\mu; b-a)$.

神永正博：電気伝導現象の数学的解析

一次元の Kronig-Penny model

$$H = -\frac{d^2}{dx^2} + \sum_{j\in\mathbf{Z}} V(j)\delta(x-j)\ ,\ -\infty < x < \infty$$

により記述される系に対して定義される 2 種類の電気伝導度を比較する。すなわち $\mathcal{E}_F$ を Fermi 準位として、$\mathcal{E}_F$ における Kubo 伝道度 $\sigma_K(\mathcal{E}_F)$ および Landauer 伝道度 $\sigma_L(\mathcal{E}_F)$ を次のように定義する（ただし極限値の存在を仮定）：

(i) $\sigma_K(\mathcal{E}_F) = \lim_{\epsilon\to 0}\sigma_K(\epsilon, \mathcal{E}_F)$, ただし

$$\sigma_K(\epsilon, \mathcal{E}_F) := \epsilon^2 \int_{\mathbf{R}} |x|^2 |G(\mathcal{E}_F + i\epsilon; x, 0)|^2 dx\ .$$

(ii) ポテンシャルの台を有界な範囲で打ち切って得られる作用素 H_n を考える：

$$H_n := -\frac{d^2}{dx^2} + \sum_{j=1}^{n} V(j)\delta(x-j)\ .$$

$\mathcal{E}_F = k^2 > 0$ として $H_n\psi = \mathcal{E}_F\psi$ の Jost 解を

$$\psi(x) = \begin{cases} ce^{ikx} + de^{-ikx} & (x < 1) \\ e^{ikx} & (x > n) \end{cases}$$

により定義し、$\tau(n, \mathcal{E}_F) := |c(n, \mathcal{E}_F)|^{-2}$ とすると

$$\sigma_L(\mathcal{E}_F) = \lim_{n\to\infty} \frac{\tau(n, \mathcal{E}_F)}{1 - \tau(n, \mathcal{E}_F)}\ .$$

(I) $\mathcal{E}_F$ が H の resolvent に属すときは $\sigma_K(\epsilon, \mathcal{E}_F) \le C\epsilon^2$, $\sigma_L(n, \mathcal{E}_F) \le Ce^{-2\gamma(\mathcal{E}_F)n}$ となるため、$\sigma_K(\mathcal{E}_F) = \sigma_L(\mathcal{E}_F) = 0$ である。($\gamma(\mathcal{E}_F)$ は方程式 $Hu = \mathcal{E}_F u$ の Lyapunov exponent.)

(II) $V(j) = V > 0$ ($j \in \mathbf{Z}$) の場合、H の spectrum は無限個の bands からなるが、$\mathcal{E}_F$ が band の端点であれば $\sigma_L(n, \mathcal{E}_F) = \mathcal{O}(n^{-2})$, $\mathcal{E}_F$ が band の内点ならば数列 $\{\sigma(n, \mathcal{E}_F)\}_n$ は振動発散する。一方 $\mathcal{E}_F$ が band の右端ならば $\sigma(\epsilon, \mathcal{E}_F) = \mathcal{O}(\epsilon^{1/2})$, $\mathcal{E}_F$ が band の内点ならば $\sigma_K(\epsilon, \mathcal{E}_F) \ge C\epsilon^{-1}$, $\mathcal{E}_F$ が band の左端ならば $\sigma_K(\epsilon, \mathcal{E}_F) \ge C\epsilon^{-1/2}$.

(III) $\{V(j)\}$ が独立同分布確率変数列で $V(0)$ の分布が有界かつコンパクト台を持つ密度関数 $r(\cdot)$ を持つとする。このとき $\mathcal{E}_F$ なる限り $\sigma_K(\mathcal{E}_F) = \sigma_L(\mathcal{E}_F) = 0$.

(IV) $\{V(j)\}$ がある種の準周期性を持つとき、$\{\sigma_L(n, \mathcal{E}_F)\}$ を調べることはできるが、$\sigma_K(\epsilon, \mathcal{E}_F)$ については今のところ結果は得られていない。

参考文献

M.Kaminaga, F.Nakano: The Landauer resistivity on quantum wires. J. Stat. Phys. Vol. 111, Nos. 1/2, 339–353 (2003)

上木直昌：The integrated density of states of random Pauli Hamiltonians

$\{B(x)|\ x \in \mathbf{R}^2\}$ はランダムな磁場を表す定常でエルゴード的な確率場とし、$(A_1(x), A_2(x))$ は対応するベクトル・ポテンシャルとする：$\partial_1 A_2 - \partial_2 A_1 = B$. ランダムなシュレーディンガー作用素

$$H_\pm := (i\nabla + A(x))^2 \pm B(x)$$

の integrated density of states を $N_\pm(\lambda)$ とすると、

$$N_+(\lambda) - N_-(\lambda) = N_+(0) - N_-(0) = -\frac{1}{2\pi}\mathbf{E}[B(0)]$$

であることがわかっている。$\mathbf{E}[B(0)] = 0$ のとき、さらに $N_\pm(\lambda)$ の $\lambda \searrow 0$ における漸近挙動が問題になるが、これに関して次の結果が得られた：

定理. $x = (x^1, x^2)$, $B(x) = B(x^1)$ とし、さらに確率過程 $\{B(t)\}$ は平均 0 の正規定常過程とする。さらにその相関関数 $\beta(t) := \mathbf{E}[B(t)B(0)]$ は非負かつ t について可積分であり、十分小さな $\gamma > 0$ に対して $\inf_{|t|\le\gamma} \beta(t) > 0$ とする。このとき

$$\liminf_{\lambda\searrow 0} N_\pm(\lambda)\left(\log\frac{1}{\lambda}\right)^{1/3} > 0$$

なる評価が成立する。

野村祐司：Random magnetic fields on line graphs

$G = (V(G), \mathcal{E}(G))$ を有向グラフとし、edge $\alpha \in \mathcal{E}(G)$ が $x \in V(G)$ を始点、$y \in V(G)$ を終点とするとき $\alpha = xy$ と記す。また $xy \in \mathcal{E}(G)$ ならば必ず $yx \in \mathcal{E}(G)$ となるものとする。グラフ G に対する line graph $L(G)$ を次のように定義する：まず $L(G)$ の頂点集合は

$$V(L(G)) = E(G) := \{|\alpha|;\ \alpha \in \mathcal{E}(G)\}\ .$$

但し $\alpha = xy$ のとき $|\alpha| := \{x, y\}$ は edge α の向きを無視したもの。また $L(G)$ の辺の集合は

$$|\alpha||\beta| \in \mathcal{E}(L(G)) \iff |\alpha| \text{ と } \beta \text{ が } G \text{ の頂点を共有する}$$

として定義する。

ここで特に $G = \mathbf{Z}^2$ を考える。但し $\mathcal{E}(\mathbf{Z}^2) = \{xy;\ |x-y| = 1\}$ とする。写像 $A : \mathcal{E}(\mathbf{Z}^2) \to \mathbf{T} = \mathbf{R}/2\pi\mathbf{Z}$ が $A(xy) = -A(yx)$ をみたすとき $\mathbf{Z}^2$ 上の vector potential と呼ぶことにし、対応する magnetic Laplacian $H(A)$ を

$$H(A)u(x) := \sum_{y:xy\in\mathcal{E}(\mathbf{Z}^2)} \{u(x) - e^{iA(xy)}u(y)\}$$

により定義する。また $\mathbf{Z}^2$ の各単位正方形 f に対して、f の周囲を正の向きに一周する 4 つの有向辺の集合を ∂f とするとき、f における磁場 $B(f)$ は

$$B(f) := \sum_{\alpha\in\partial f} A(\alpha) \pmod{2\pi}$$

で与えられる。

さて、line graph $L(\mathbf{Z}^2)$ 上の vector potential A_L を

$$A_L(|\alpha||\beta|) := \frac{1}{2}\{A(yx) + A(xz)\},\ |\alpha| = \{x, y\},\ |\beta| = \{x, z\}$$

により定義すると、対応する magnetic Laplacian $H_L(A)$ は

$$H_L(A)u(|\alpha|) = \sum_{|\beta|:|\alpha||\beta| \in \mathcal{E}(L(\mathbf{Z}^2))} \{u(|\alpha|) - e^{iA_L(|\alpha||\beta|)}u(|\beta|)\}$$

となる。これを次のようにランダム化する。

左下の頂点が $x \in \mathbf{Z}^2$ であるような単位正方形を f_x とするとき、f_x における磁場 $B_\omega(x) := B_\omega(f_x)$, $x \in \mathbf{Z}^2$ は以下の条件を満たす確率変数族とする：

(A1) $B_\omega((2n+1, m)) = -B_\omega((2n, m))$;

(A2) $\{B_\omega(2n+1, m);\ n.m \in \mathbf{Z}\}$ は独立同分布;

(A3) $B_\omega((1, 0))$ の分布は有界な密度 $g(\lambda)$ を持ち、ある $c > 0$ に対して $\mathrm{supp}\, g \subset \mathbf{T} \setminus (-c, c)$, $\pm c \in \mathrm{supp}\, g$ かつ g は $\mathbf{T} \setminus (-c, c)$ において Lipschitz 連続。

$\mathcal{E}(\mathbf{Z}^2)$ 上の vector potential $A_\omega(\alpha)$, $\alpha \in \mathcal{E}(\mathbf{Z}^2)$ を

$$A_\omega(xy) := \begin{cases} B_\omega(2n+1, m) & \text{if } x = (2n+1, m),\ y = (2n+1, m+1) \\ -B_\omega(2n+1, m) & \text{if } x = (2n+1, m+1),\ y = (2n+1, m) \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

により定義すると、$A_\omega(\cdot)$ は磁場 $B_\omega(\cdot)$ を与える。line graph $L((Z)^2)$ 上の magnetic Laplacian $H_L(A_\omega)$ について

$$\sigma(H_L) = [4(1 - \cos(c/4)), 4(1 + \cos(c/4)] \cup \{8\} =: [E_0, E_1] \cup \{8\}$$

であることがわかっているが、H_ω のスペクトルについてさらに次の結果を得た。

定理. (i) $R > 0$ が存在して、H_L の spectrum は $I_R := [E_0, E_0 + R] \cup [E_1 - R, E_1]$ において確率 1 で pure point, かつ対応する固有関数は指数的に減衰する。

(ii) $H_L(A_\omega)$ の integrated density of states を $k_L(E)$ とするとき、

$$\limsup_{E \searrow E_0} \frac{\log\{-\log k_L(E)\}}{\log(E - E_0)} \leq -1\ .$$

(iii) $k_L(\cdot)$ は I_R 上で Lipschitz 連続。

(iv) 8 は多重度無限大の固有値。

(v) $k_L(8) - k_L(8-0) = 1/2$.

(vi) エネルギー E に対する Kubo 伝道度を $\sigma(E)$ とすると、$E \in I_R$ に対しては $\sigma(E) = 0$, $0 < \sigma(8) < \infty$.

参考文献

F.Nakano, Y.Nomura: Random magnetic fields on line graphs. J. Math. Phys. Vol. 44, No. 11, 4988–5002 (2003)

中野史彦：Absense of transport in Anderson localization II

$\mathbf{Z}^d$ 上の Anderson tight binding model

$$(H_\omega u)(x) := \sum_{|x-y|=1} u(y) + \lambda V_\omega(x)u(x)$$

を考える。但し $\{V_\omega(x);\ x \in \mathbf{Z}^d\}$ は独立同分布確率変数族であり、ある $C > 0$ に対して $V_\omega(x) \geq C$, $\mathbf{E}[V(0)^2] < \infty$, かつ $V(0)$ の分布は $r(\cdot) \in L^p(\mathbf{R})$ $(p > 1)$ なる密度関数 r を持つとする。

$\mathcal{E}_F$ を Fermi 準位として $P_{\mathcal{E}_F} := \chi_{(-\infty,\mathcal{E}_F]}(H_\omega)$, また一般に作用素 A に対して

$$\mathcal{T}(A) := \lim_{\Lambda \nearrow \mathbf{Z}^d} \frac{1}{|\Lambda|} \mathrm{Tr}(\chi_\Lambda A \chi_\Lambda)$$

と定義する。これを用いてエネルギー $\mathcal{E}_F$ における伝導度 (charge transport) $\sigma_1(\omega, \mathcal{E}_F)$ を

$$\sigma_1(\omega, \mathcal{E}_F) = \lim_{T \nearrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T dt \lim_{\epsilon \searrow 0} \frac{1}{\epsilon} \mathcal{T}\left(e^{itH_{\omega,\epsilon}} i[H_\omega, x_1] e^{-itH_{\omega,\epsilon}} P_{\mathcal{E}_F}\right)$$

により定義する。但し $H_{\omega,\epsilon} := H_\omega + \epsilon x_1$. 一方

$$\sigma_2(\omega, \mathcal{E}_F) := \lim_{\delta \searrow 0} \lim_{\epsilon \searrow 0} \frac{\delta}{\epsilon} \int_0^\infty e^{-t\delta} \mathcal{T}\left(e^{itH_{\omega,\epsilon}} i[H_\omega, x_1] e^{-itH_{\omega,\epsilon}} P_{\mathcal{E}_F}\right)$$

とおく。$\sigma_2(\omega, \mathcal{E}_F)$ は Kubo 伝導度に該当するものである。ここで条件

$$\mathbf{E}\left[\sum_{x \in \mathbf{Z}^d} |x_1| \, |P_{\mathcal{E}_F}(\omega; x, 0)|^2\right] < \infty$$

を仮定する。この条件は H_ω に対する Anderson 局在が成りたつような典型的な状況ではほぼ正しい。この条件の下に、確率 1 で

$$\sigma_1(\omega, \mathcal{E}_F) = \sigma_2(\omega, \mathcal{E}_F) = 0$$

であることを証明することができた。

参考文献

F.Nakano: Absence of transport in Anderson localization. Rev. Math. Phys., Vol. 14, No. 4, 375–407 (2002)

笹本智弘：一次元半無限多核成長模型とランダム行列における対称性の転移

半無限空間における多核成長モデルの height fluctuation を、同時刻の多点同時分布において調べた。スケール極限において、原点における揺らぎから bulk におけるそれへの転移は、ランダム行列モデルの最大固有値の揺らぎの GOE から GUE への転移に該当することが示される。

参考文献

T. Sasamoto, T. Imamura: Fluctuations of a one-dimensional polynuclear growth model in a half space. cond-mat/0307011

永尾太郎：量子グラフのエネルギー準位統計

N 個の頂点が長さを持つ線分 (bond) によって結ばれたグラフを考える。ここではすべての頂点が、それ自身も含めた他のすべての頂点と結ばれている場合を考える。(したがって向きを持つ bonds の総数は N^2.) このグラフ上を磁場の影響の下で動く粒子の波動関数 ψ は、頂点 j, ℓ を結ぶ bond 上では

$$\left(-i\frac{d}{dx_{j,\ell}} - A_{j,\ell}\right)^2 \psi = k^2\psi$$

の解で与えられ、bond (j,ℓ) と bond (ℓ,m) 上での波動関数の振幅比は $\sigma_{j,m}^{(\ell)}$ で与えられるとする。このとき bond (j,ℓ') と bond (ℓ,m) との間の散乱行列は

$$S_{j\ell',\ell m} = \sigma_{j,m}^{(\ell)} \exp(ikL_{\ell m} + iA_{\ell m}L_{\ell m})\delta_{\ell,\ell'}$$

である。($L_{j\ell}$ は bond (j,ℓ) の長さ。) ここでさらに $\sigma_{j,m}^{(\ell)} = N^{-1/2}e^{2\pi imn/N}$ と仮定する。本講演では磁場が弱いときに、S のスペクトルに対する form factor (2点相関関数の Fourier 変換) とランダム行列のスペクトルに対するそれとの比較を行った。

参考文献

T. Nagao, K. Saito: Form factor of a quantum graph in a weak magnetic field. nlin.CD/0211006

牧野浩典：ベリー・ロブニックの仮定を基礎とする可積分量子系の準位統計

可積分な古典系の量子化として得られるハミルトニアンは、Berry-Robnik の仮説に従えば相互作用を持たない多数の部分系に分かれる。このときハミルトニアンのスペクトルは、互いに独立な多数のスペクトルの重ね合わせとみなされる。さて、i 番目の部分系の相対的な重みを ρ_i, i 番目の部分系のスペクトルにおける準位間隔の累積分布関数を $\mu_i(S)$ とするとき、$\mu(S,N) := \sum_{i=1}^{N} \rho_i\mu_i(S)$ の $N \to \infty$ での極限 $\bar{\mu}(S)$ の存在を仮定する。この $\bar{\mu}(S)$ を用いて、考えているハミルトニアンの準位間隔分布 $dM(S)$ は次の3通りに分類されることを示した：

1. $\bar{\mu}(\infty) = 0$ のとき、$dM(S)$ は指数分布。すなわちハミルトニアンのスペクトルは Poisson 点過程とみなされる。
2. $0 < \bar{\mu}(\infty) < \infty$ のとき、大きな S に対しては $dM(S)$ は指数分布に近いが、小さな S に対しては指数分布からのズレが見られる。
3. $\bar{\mu}(\infty) = 1$ のとき、$M(S)$ は $S \to \infty$ とするとき指数分布の場合よりもゆっくり 1 に飽和する。

参考文献

H. Makino, S. Tasaki: Level spacing statistics of classically integrable systems: Investigation along the lines of the Berry-Robnik approach. Phys. Rev. E 67, 066205 (2003)

南就将：準位統計の基礎概念と定常点過程

物理学者により論じられているエネルギー準位統計とは、量子ハミルトニアンのスペクトルを適当な "unfolding" という操作により規格化して定常点過程の実現とみなした上で、準位の間隔分布等、その統計的性質を調べることと理解される。本講演ではハミルトニアンのスペクトルが既に $mathbfR$ 上の定常点過程とみなされるようになっていることを前提にして、準位統計の文献によく現れる gap probability $E(S)$, 間隔分布 $P(S)dS$ 等の間の関係式が、点過程論における Pakm-Khinchin の等式から導かれることを注意した。さらに、独立な定常点過程の重ね合わせに関するよく知られた定理を紹介した上で、牧野氏の講演で触れられた $\bar{\mu}(\infty) = 0$ の場合にそれを適用し、重ね合わせの極限は (間隔分布が指数分布であるだけでなく) 実際に Poisson 点過程であることを示した。

参考文献

南就将：点過程論によるエネルギー準位統計の数学的基礎付け. 物性研究 73-6 (2000) 957–1011

無限粒子系，パーコレーション，量子ランダムウォークとその周辺

日程：平成１５年１１月２５日（火）－２７日（木）
場所：岡山大学 文化科学系 総合研究棟
世話人：樋口保成（神戸大），今野紀雄（横浜国大）

Indian Statistical Institute より Rahul Roy 教授を迎え，講演を２回して頂いたのをはじめ，下記プログラムのように数多くの研究者により，様々な無限粒子系，パーコレーション，或いは，量子ランダムウォークに関連する話題について，３日間発表及びそれにもとづく活発な討論がなされた．参加者は３０名前後であった．

プログラム
11 月 25 日（火）
13:30 - 14:20
Oriented percolation on Sierpinski carpet lattices
篠田 正人（奈良女子大学）
14:30 - 15:20
Mixing properties of continuous-time quantum random walks on graphs
今野 紀雄（横浜国立大学）
15:30 - 16:00
Fluctuations of quantum random walks on circles
小西 克尚（姫路工業大学）
16:10 - 16:40
量子ランダムウォークと可逆量子セルオートマトン
曽雌 隆洋（横浜国立大学）
16:50 - 17:40
Subcritical behavior in the alternating supercritical Domany-Kinzel dynamics
増田 直紀（横浜国立大学）

11 月 26 日（水）
10:00 - 11:00
Oriented spanning trees: a model of river network
Rahul Roy (Indian Statistical Institute)
11:10 - 12:00
The structure of finite clusters in high intensity Poisson Boolean stick process
種村 秀紀（千葉大学），Rahul Roy (Indian Statistical Institute)
13：30 - 14:20
Slab percolation for the Ising model
杉峰 伸明（神戸大学）
14:20 - 14:50
Remarks on central limit theorems for the number of percolation clusters
杉峰 伸明，竹居 正登（神戸大学）

15:00 - 15:50
Stock price process and the long-range percolation
黒田 耕嗣（日本大学），村井 浄信（岡山大学）
15:50 - 16:30
Recurrence of once reinforced random walk on a kind of 1-dimensional chain
竹島 正樹（大阪大学）
16:40 - 17:20
Poisson approximation for misanthropes process
馬 霞（横浜国立大学）

11 月 27 日（木）
10:00 - 11:00
Coverage of space by random sets
Rahul Roy (Indian Statistical Institute)
11:10 - 12:00
Pirogov-Sinai model の interface
樋口 保成（神戸大学）
13:30 - 14:20
2 次元量子ランダムウォークの局在化
乾 徳夫（姫路工業大学）
14:30 - 15:20
Regularity of the diffusion coefficient matrix for generalized exclusion process
永幡 幸生（北海道大学）

Oriented Percolation On Sierpinski Carpet Lattices

MASATO SHINODA
Faculty of Science, Nara Women's University

In this talk we consider oriented percolation on a family of Sierpinski carpet lattices in $\mathbb{Z}^d$, $d \geq 2$. Let a and b be positive integers. We write $L = 2a + b$. For $\mathbf{i} = (i_1, i_2, \dots, i_d) \in \{0, 1, \dots, L-1\}^d$ we set an affine map $\Psi_{\mathbf{i}}$ from $[0,1]^d$ to $[i_1/L, (i_1+1)/L] \times [i_2/L, (i_2+1)/L] \times \cdots \times [i_d/L, (i_d+1)/L]$ which preserves the directions. Set

$$T^d_{a,b} = \Big\{ (i_1, i_2, \dots, i_d) \in \{0, 1, \dots, L-1\}^d \;\Big|\; \#\{j \mid a \leq i_j \leq a+b-1\} \leq 1 \Big\}.$$

We take the unique nonempty compact set $K^d_{a,b} \subset [0,1]^d$ which satisfies the equation $K^d_{a,b} = \bigcup_{\mathbf{i} \in T^d_{a,b}} \Psi_{\mathbf{i}}(K^d_{a,b})$. We note that $K^d_{1,1}$ is called d-dimensional *Menger sponge* (see Mandelbrot [2]). Set $F^{d,n}_{a,b} = \bigcup_{\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \cdots, \mathbf{i}_n \in T^d_{a,b}} \Psi_{\mathbf{i}_1} \circ \Psi_{\mathbf{i}_2} \circ \cdots \circ \Psi_{\mathbf{i}_n}([0,1]^d)$. Set $V^{d,n}_{a,b} = \mathbb{Z}^d \cap L^n F^{d,n}_{a,b}$ and $G^{d,n}_{a,b} = (V^{d,n}_{a,b}, E(V^{d,n}_{a,b}))$ where $E(V) = \{\langle u, v \rangle | \; ||u - v||_1 = 1\}$. We define a graph $G^d_{a,b} = \bigcup_{n=1}^{\infty} G^{d,n}_{a,b}$, that is $G^d_{a,b} = (V^d_{a,b}, E^d_{a,b})$ where $V^d_{a,b} = \bigcup_{n=1}^{\infty} V^{d,n}_{a,b}$ and $E^d_{a,b} = \bigcup_{n=1}^{\infty} E(V^{d,n}_{a,b})$. As an example, the graph of $G^2_{2,2}$ is illustrated in Figure 1.

We consider bond percolation and oriented bond percolation on $G^d_{a,b}$. Let $0 \leq p \leq 1$. Each $e \in E$ is declared to be *open* with probability p and *closed* with probability $1-p$ independently. We denote by P_p the product measure. Next let us consider a sequence of vertices $\pi = (v_0, v_1, \cdots, v_m)$ where $v_i \in V$ for $0 \leq i \leq m$. We say π is a *path* when

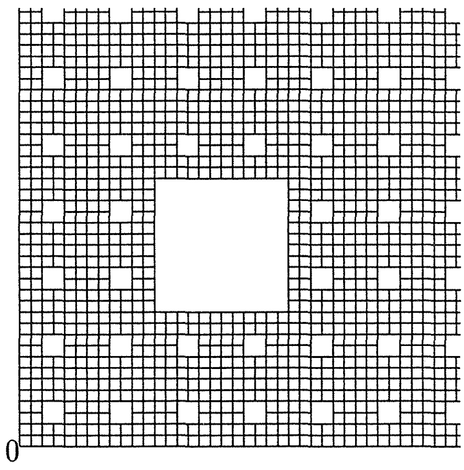


Figure 1: the graph of $G^2_{2,2}$

$\langle v_{i-1}, v_i \rangle \in E$ for $1 \leq i \leq m$ and $v_i \neq v_j$ for $i \neq j$. We give a partial order on $\mathbb{Z}^d$ such that $(x_1, x_2, \dots, x_d) \leq (y_1, y_2, \dots, y_d)$ if and only if $x_i \leq y_i$ for $1 \leq i \leq d$. We say π is an *oriented path* when π is a path and $v_{i-1} \leq v_i$ for $1 \leq i \leq m$. We write $u \leftrightarrow v$ if and only if there exists a path π with $v_0 = u$, $v_m = v$ and $\langle v_{i-1}, v_i \rangle$ are open for $1 \leq i \leq m$. We denote $C(v) = \{u \in V \mid v \leftrightarrow u\}$. We call $C(v)$ the *open cluster containing* v, and we denote by C the open cluster containing the origin. We define $\theta(p) = P_p(|C| = \infty)$ where $|C|$ means the number of vertices in C. Set $p_c = \inf\{p \mid \theta(p) > 0\}$. We write $u \rightarrow v$ if and only if there exists an oriented path π with $v_0 = u$, $v_m = v$ and $\langle v_{i-1}, v_i \rangle$ are open for $1 \leq i \leq m$. We define $\vec{C}(v) = \{u \in V \mid v \rightarrow u\}$, $\vec{C}$, $\vec{\theta}(p)$ and $\vec{p_c}$ in the same way as $C(v)$, C, $\theta(p)$ and p_c. We write $p_c(G)$ and $\vec{p_c}(G)$ for p_c and $\vec{p_c}$ respectively, in order to emphasize its dependence on the graph.
In case of percolation, $p_c(G^d_{a,b}) < 1$ has been shown for all a and b in [1](see also [3]). In contrast we obtain two theorems in case of oriented percolation.

Theorem 1 **([4])** *Let $d = 2$. If $a \leq b$ then $\vec{p_c}(G^2_{a,b}) = 1$.*

Theorem 2 **([4])** *Let $2 \leq d \leq b$. Then $\vec{p_c}(G^d_{1,b}) = 1$.*

Theorem 1 says that on two-dimensional Sierpinski carpet lattices if the ratio of its hole in $T^2_{a,b}$ is not smaller than $1/3^2$ then there is no phase transition. Theorem 2 says that for any $d \geq 2$ there exist d-dimensional Sierpinski carpet lattices on which there is no phase transition.

Problem Whether $\vec{p_c}(G^d_{a,b}) = 1$ for *all* d,a and b or not.

Remark. We may define generalized Sierpinski carpet lattices in a different manner. Set $L = 3$ and $T^d_{sc} = \{0, 1, 2\}^d \setminus \{(1, 1, \dots, 1)\}$. Let K^d_{sc} be the unique nonempty compact set which satisfies the equation $K^d_{sc} = \bigcup_{\mathbf{i} \in T^d_{sc}} \Psi_{\mathbf{i}}(K^d_{sc})$. K^d_{sc} is called *d-dimensional Sierpinski carpet*. Both $K^d_{1,1}$ and K^d_{sc} are a generalization of the Sierpinski carpet in d dimensions. Let G^d_{sc} be the graph corresponding to K^d_{sc}. We note that G^d_{sc} contains $\mathbb{Z}^{d-1}$ as a subgraph, and we observe that $\vec{p_c}(G^d_{sc}) \leq \vec{p_c}(\mathbb{Z}^{d-1}) < 1$ when $d \geq 3$.

References

[1] Kumagai,T. (1997) Percolation on Pre-Sierpinski carpets, *New Trend in Stochastic Analysis* (Proceedings of a Taniguchi International Workshop, Eds. K.D.Elworthy et al.), World Scientific, 288-304.

[2] Mandelbrot,B.B. (1983) *Fractal geometry of nature*, W.H.Freeman.

[3] Shinoda,M. (2002) Existence of phase transition of percolation on Sierpinski carpet lattices, *Journal of Applied Probability* **39**,1-10.

[4] Shinoda,M. (2003) Non-existence of phase transition of oriented percolation on Sierpinski carpet lattices, *Probability Theory and Related Fields* **125**, 447-456.

MIXING PROPERTIES OF CONTINUOUS-TIME QUANTUM RANDOM WALKS ON GRAPHS

Norio Konno

Department of Applied Mathematics, Yokohama National University
Yokohama, 240-8501, Japan
E-mail: norio@mathlab.sci.ynu.ac.jp

Recently discrete- and continuous-time qunatum random walks have been studied by many researchers from various aspects, for examples, see [1, 2, 3, 4, 5, 6, 7]. In this talk we focus mainly on continuous-time qunatum random walks on C_N which is the cycle with N vertices, i.e., $C_N = \{0, 1, \dots, N-1\}$. We assume $N \geq 3$ except for the trivial case of $N = 2$. Let A_N be the $N \times N$ adjacency matrix of C_N. The continuous-time quantum random walk considered here is given by the following unitary matrix:

$$U(t) = e^{itA_N/2}. \tag{1}$$

The amplitude wave function at time t, $|\Psi_N(t)\rangle$, is defined by

$$|\Psi_N(t)\rangle = U(t)|\Psi_N(0)\rangle. \tag{2}$$

Concerning the details of the definitions for continuous-time case, see [8, 9, 10]. The $(n+1)$-th coordinate of $|\Psi_N(t)\rangle$ is denoted by $|\Psi_N(n,t)\rangle$ which is the amplitude wave function at vertex n at time t for $n = 0, 1, \dots, N-1$. The probability that the particle is at vertex n at time t, $P_N(n,t)$, is given by

$$P_N(n,t) = \langle \Psi_N(n,t)|\Psi_N(n,t)\rangle. \tag{3}$$

Moreover, a random walk on C_N is said to have the instantaneous uniform mixing property (IUMP) if there exists $t > 0$ such that $P_N(n,t) = 1/N$ for any $n = 0, 1, \dots, N-1$. It is easily checked that continuous-time quantum random walks on C_N for $N = 3, 4$ have the IUMP (see [8], for example). On the other hand, Ahmadi et al. [8] conjectured that continuous-time quantum random walks on C_N for any $N \geq 5$ do not have the IUMP. In the continuous-time classical random walk,

$$P_N(n,t) = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} \cos(\xi_j n) e^{t(\cos \xi_j - 1)}, \tag{4}$$

for any $t \geq 0$ and $n = 0, 1, \dots, N-1$, where $\xi_j = 2\pi j/N$. So classical walks on C_N do not have the IUMP for any $N \geq 3$. For quantum case, Ahmadi et al. [8] proved

$$P_N(n,t) = \frac{1}{N} + \frac{2}{N^2} \sum_{0 \leq j < k \leq N-1} \cos\{t(\cos \xi_k - \cos \xi_j) - n(\xi_k - \xi_j)\}, \tag{5}$$

for any $t \geq 0$ and $n = 0, 1, \ldots, N-1$. Next a time-averaged distribution in the continuous-time case is defined by

$$\bar{P}_N(n) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T P_N(n,t)dt, \tag{6}$$

if the right-hand side of Eq. (6) exists. In contrast to classical case, it is shown that $\bar{P}_N$ is not uniform distribution on C_N for any $N \geq 3$. As for discrete-time quantum case given by the Hadamard transformation, Aharonov et al. [1] and Bednarska et al. [11] showed that $\bar{P}_N(n) \equiv 1/N$ if N is odd or $N = 4$, and $\bar{P}_N(n) \not\equiv 1/N$, otherwise. Moreover we introduce the following temporal standard deviation $\sigma_N(n)$ in the continuous case:

$$\sigma_N(n) = \lim_{T\to\infty} \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T \left(P_N(n,t) - \bar{P}_N(n)\right)^2 dt}, \tag{7}$$

The discrete-time case is also defined in a similar way. In the continuous- and discrete-time classical cases, $\sigma_N(n) = 0$ for $N \geq 3$ and $n = 0, 1, \ldots, N-1$. As for discrete-time quantum case, we obtained an explicit form of $\sigma_N(n)$ [12]. In the present talk, we report some results on $\sigma_N(n)$ and the conjecture on IUMP in continuous-time quantum case.

References

1. D. Aharonov, A. Ambainis, J. Kempe and U.V. Vazirani (2001), *Quantum walks on graphs*, in Proceedings of the 33rd Annual ACM Symposium on Theory of Computing, pp. 50-59.
2. A. Ambainis, E. Bach, A. Nayak, A. Vishwanath and J. Watrous (2001), *One-dimensional quantum walks*, in Proceedings of the 33rd Annual ACM Symposium on Theory of Computing, pp. 37-49.
3. A.M. Childs, E. Farhi and S. Gutmann (2002), *An example of the difference between quantum and classical random walks*, Quantum Information Processing, Vol. 1, pp. 35-43.
4. J. Kempe (2003), *Quantum random walks - an introductory overview*, Contemporary Physics, Vol.44, pp. 307-327.
5. B. Tregenna, W. Flanagan, W. Maile and V. Kendon (2003), *Controlling discrete quantum walks: coins and initial states*, New Journal of Physics, Vol.5, pp. 83.1-83.19.
6. N. Konno (2002), *Quantum random walks in one dimension*, Quantum Information Processing, Vol. 1, pp. 345-354.
7. G. Grimmett, S. Janson and P.F. Scudo (2003), *Weak limits for quantum random walks*, quant-ph/0309135.
8. A. Ahmadi, R. Belk, C. Tamon and C. Wendler (2003), *On mixing in continuous quantum walks on some circulant graphs*, Quantum Information and Computation, Vol. 3, pp. 611-618.
9. H. Gerhardt and J. Watrous (2003), *Continuous-time quantum walks on the symmetric group*, quant-ph/0305182, to appear at RANDOM'03.
10. W. Adamczak, K. Andrew, P. Hernberg and C. Tamon (2003), *A note on graphs resistant to quantum uniform mixing*, quant-ph/0308073.
11. M. Bednarska, A. Grudka, P. Kurzyński, T. Luczak and A. Wójcik (2003), *Quantum walks on cycles*, quant-ph/0304113.
12. N. Inui, Y. Konishi, N. Konno and T. Soshi (2003), *Fluctuations of quantum random walks on circles*, quant-ph/0309204.

Oriented spanning trees: a model of river network

RAHUL ROY, *Indian Statistical Institute*

Consider the d-dimensional lattice $\mathbf{Z}^d$ where each vertex is 'open' or 'closed' with probability p or $1-p$ respectively. An open vertex v is connected by an edge to the closest open vertex w such that the dth co-ordinates of v and w satisfy $w(d) = v(d) - 1$. In case of non-uniqueness of such a vertex w, we choose any one of the closest vertices with equal probability and independently of the other random mechanisms. It is shown that this random graph is a tree almost surely for $d = 2, 3$ and it is an infinite collection of distinct trees for $d \geq 4$. In addition, for any dimension, we obtain central limit theorems of (a) the number of vertices of a fixed degree ν and (b) of the number of edges of a fixed length l. These results are obtained by using the martingale convergence theorem and a coupling of the process with independent random walks.

Coverage of space by random sets

RAHUL ROY *Indian Statistical Institute*

Let $\xi_1, \xi_2, \ldots$ be a Poisson point process of density λ on $(0, \infty)^d$, $d \geq 1$ and let $\rho, \rho_1, \rho_2, \ldots$ be i.i.d. positive random variables independent of the point process. Let $C := \cup_{i\geq 1}\{\xi_i + [0, \rho_i]^d\}$. If, for some $t > 0$, $(t, \infty)^d \subseteq C$, then we say that $(0, \infty)^d$ is eventually covered. We show that the eventual coverage of $(0, \infty)^d$ depends on the behaviour of $xP(\rho > x)$ as $x \to \infty$ as well as on whether $d = 1$ or $d \geq 2$. These results are quite dissimilar to those known for complete coverage of $\mathbf{R}^d$ by such Poisson Boolean models (Hall).

In addition, we consider the region $C := \cup_{\{i\geq 1: X_i = 1\}}[i, i + \rho_i]$, where $X_1, X_2, \ldots$ is a $\{0, 1\}$ valued Markov chain and $\rho, \rho_1, \rho_2, \ldots$ are i.i.d. positive integer valued random variables independent of the Markov chain. We study the eventual coverage properties of this random set C.

The structure of finite clusters in high intensity Poisson Boolean stick process

Rahul Roy (Indian Statistical Institute)
Hideki Tanemura (Chiba University)

Consider one dimensional sticks placed at random locations and with random orientations in the two dimensional plane. In the language of stochastic geometry we have a planar fibre process whose *grains* are two dimensional linear segments and whose germs are the random locations. The most commonly studied fibre process model which incorporates these features is when the germs arise as realisations of a Poisson point process of intensity λ on $\mathbb{R}^2$ and each germ is the centre of a stick of either fixed length or a random length and having a random orientation, with the distribution of the length and orientation of a stick being independent of the underlying Poisson process. This is the Poisson Boolean stick process, a particular instance of the more general planar Boolean fibre process.

We study the geometric features of finite clusters in the Poisson Boolean stick process when the intensity of the underlying Poisson process is high. More particularly, consider a Poisson point process of intensity λ on $\mathbb{R}^2$ conditioned to have a point at the origin. At each point x_i we centre a stick of length r_i and orientation θ_i measured anticlockwise w.r.t. the x-axis. We suppose that
(i) $r_1, r_2, \ldots$ is an i.i.d. sequence of random variables,
(ii) $\theta_1, \theta_2, \ldots$ is an i.i.d. sequence of random variables, and
(iii) the sequences $\{r_i\}$ and $\{\theta_i\}$ and the underlying Poisson process are independent of each other.
Consider the cluster of the origin (which is the connected component formed by sticks containing the stick at the origin). For this model it is known that if the random variable r_1 is bounded, and the random variable θ_1 is non-degenerate then there is a critical intensity λ_c such that, for $\lambda > \lambda_c$, with positive probability the cluster defined above is unbounded. Moreover this probability goes to 1 as $\lambda \to \infty$.

Given the rare event that for high intensity the cluster C_0 is bounded and contains exactly m sticks, we investigate its geometric structure. We first consider the case that
(i) there are sticks with only two orientations, either horizontal or an angle $\alpha \in (0, \frac{\pi}{2})$, and
(ii) sticks which are horizontal are all of length R_0 and sticks at an angle α are all of length R_α.

For $m = k + 1$, we obtain the asymptotic distribution of

$$\mu_{\lambda_\rho}(\sharp C_0 = (k, \ell) | \text{the origin } \mathbf{O} \text{ is the centere of a stick})$$

as $\lambda \to \infty$, where $\sharp C_0 = (k, \ell)$ means that C_0 contains k horizontal sticks and ℓ sticks at an angle α w.r.t. the x-axis; and thereby obtain the conditional distribution

$$p_{\lambda,m} := \mu_{\lambda_\rho}(\sharp C_0 = (k, \ell) | \sharp C_0 = (k', \ell'), k' + \ell' = m).$$

We also discuss the significantly different phenomenon which occurs when sticks in 3 orientations are allowed.

研究集会　**確率過程とその周辺**

平成１５年度科学研究費補助金基盤研究 (A)(1)「確率論の総合的研究」(研究代表者 重川一郎，課題番号 14204008) による標記の研究集会を以下の要領で開催致しますのでご案内申し上げます．

日程:　２００３年１２月１０日（水）－１３日（土）
場所:　金沢大学サテライト・プラザ
920-0913 金沢市西町３番丁 16 番地 金沢市西町教育研修館内
`http://www.ad.kanazawa-u.ac.jp/ad_koho/satellite/`

プログラム

１２月１０日（水）

13:30–14:10 稲浜譲（大阪大・基礎工学研究科）
Eigenvalue asymptotics for the Schrödinger operators on the real and the complex hyperbolic spaces (with Shin-ichi Shirai)

14:20–15:00 桑江一洋（横浜市立大・総合理学研究科）
Perturbation of symmetric Markov processes

15:10–15:50 永幡幸生（北海道大・工学研究科）
Regularity of the diffusion coefficient matrix for generalized exclusion process

16:15–16:55 木上淳（京都大・情報学研究科）
Local Nash Inequality と自己相似集合上の熱核の評価

17:05–17:45 吉田稔（電気通信大・電気通信学部）
$\mathbf{Z}$ を添字として持つ無限次元拡散過程系の一様化問題について
(S. Albeverio (Bonn 大学), M. Roeckner (Bielefeld 大学), M. S. Bernabei (Camerino 大学) との共同研究)

１２月１１日（木）

9:20–10:00 坂井哲 (EURANDOM)
High-dimensional graphical networks of self-avoiding walks

10:10–10:50 桑田和正（京都大・情報学研究科）
On large deviations for random currents induced from stochastic line integrals

11:00–11:40 西岡國雄（東京都立大・理学研究科）
n 階境界条件に対応するブラウン運動，その２

13:20–14:00 長田博文（名古屋大・多元数理研究科）
Diffusions in infinite dimension related to sine, Airy and Bessel kernels

14:10–14:50 笠原雪夫（東京大・情報理工学系研究科）
定常過程の標準表現について

15:00–15:40 小松孝（大阪市立大・理学研究科）
The Malliavin calculus for stochastic flows of interacted particles

16:05–16:45 部家直樹（東京大・数理科学研究科）
抽象 Wiener 空間上の確率微分方程式の解の分布の絶対連続性について

16:55–17:35 種村秀紀（千葉大・理学部）
Coexistence results for a spatial stochastic epidemic model
(今野紀雄（横浜国立大・工学研究院），Rinaldo Schinazi (Univ. of Colorado) との共同研究)

１２月１２日（金）

9:20–10:00 磯川幸直（鹿児島大・教育学部）
Random sequential packing of rods

10:10–10:50 乙部厳己（信州大・理学部）
井戸型ポテンシャルを持つ確率偏微分方程式

11:00–11:40 一瀬孝（金沢大・理学部）
On path integral for the radial dirac equation

13:20–14:00 中山季之（東京大・数理科学研究科）
Support Theorem の拡張

14:10–14:50 池田信行，小倉幸雄（佐賀大・理工学部）
連続な経路をもつ１次元マルコフ過程について

15:30– ショートコミュニケーション

河備浩司（東京大），御代川知宏（京都大）
Notes on the Littlewood-Paley-Stein inequality for certain infinite dimensional diffusion processes

下山由貴子（東京都立大）
Lévy metric による擬似乱数の比較

有吉哲平（京都大）
σ-有限測度空間上の対称拡散半群の短時間漸近挙動

鈴木桜子（お茶の水女子大）
緩変動な末尾確率を持つ i.i.d. 確率変数の trimmed sum に関する関数型極限定理

馬霞（横浜国大）
Poisson approximation for misanthropes process

桑江一洋（横浜市立大）
0-energy CAF による確率積分について

１２月１３日（土）

9:20–10:00 竹島正樹（大阪大・理学研究科）
１次元ダイヤ・チェーン上の once reinforced random walk の再帰性について

10:10–10:50 河津清（山口大・教育学部），鈴木由紀（慶應大・医学部）

Limit theorems for a diffusion process with a one-sided Brownian potential

11:00–11:40 渡辺信三（立命館大・理工学部）

1 次元拡散過程の一般化 arc-sine law

13:00–13:40 藤田安啓（富山大・理学部）

p 次 $(p > 1)$ のべき項を有する半線形 Kolmogorov 方程式の解の漸近挙動

13:50–14:30 畑宏明（大阪大・基礎工学研究科）

A risk-sensitive stochastic control approach to an optimal investment problem with partial information

世話人: 高信敏 (金沢大・理学部)，白井朋之 (金沢大・理学部)，日野正訓 (京都大・情報学研究科)

Eigenvalue asymptotics for the Schrödinger operators on the real and the complex hyperbolic spaces

Yuzuru INAHAMA * and Shin-ichi SHIRAI †

1 Introduction

In this talk we consider the real hyperbolic n-space $\mathbb{H}^n = \mathrm{SO}_0(1,n)/\mathrm{SO}(n)$ and the complex hyperbolic n-space $\mathbb{H}^n_c = \mathrm{SU}(1,n)/\mathrm{U}(n)$, which are non-compact, irreducible symmetric spaces of rank one. We study the asymptotic distribution of large eigenvalues of the Schrödinger operator

$$H_V = -\frac{1}{2}\Delta + V$$

on the real and the complex hyperbolic spaces, where Δ is the Laplace-Beltrami operator and V is the scalar potential. We assume that V is continuous, real-valued, and semi-bounded from below and diverges at infinity in an appropriate sense. (The precise formulation is given below.)

In the (asymptotically) Euclidean case, this kind of eigenvalue distribution has been studied by many authors (see, e.g., Ivrii's book (1998), Levendorskiĭ's book (1990), Matsumoto (1993)). Roughly speaking, two different type of proof exit. One is the functional analytic approach based on the min-max principle or the technique of the pseudo-differential operators. Another is the probabilistic one based on the stochastic analysis and the Feynman-Kac formula. A typical result is formulates as follows: As $\lambda \nearrow \infty$, the number of eigenvalues less than λ behaves like the (a constant multiple of) the volume of the semi-classically allowed region

$$\{(x;\zeta) \in \mathrm{T}^*\mathbb{R}^n | \frac{1}{2}|\zeta|^2 + V(x) < \lambda\}$$

if the scalar potential V diverges at infinity (in an appropriate sense).

In the case of the hyperbolic spaces, the Riemannian metric grows exponentially and the Laplace-Beltrami operator is degenerate at infinity. These facts cause the some difficulties if we intend to give a proof by using pseudo-differential tecniques as in the Euclidean case. Both $\mathrm{SO}_0(1,2)/\mathrm{SO}(2)$ and $\mathrm{U}(1,1)/\mathrm{U}(1)$ are canonically isomorphic to $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})/\mathrm{SO}(2)$, which is realized as the Poincaré upper half-plane or the Poincaré disk. In this case the authors [1] has studied the large eigenvalue asymptotics for H_V along the lines of the Malliavin calculus and of the Tauberian argument as in the proof of Theorem 10.5 in Simon [3]. The proof is based on the explicit form of the Brownian motion and the Feynman-Kac representation of the heat kernel of H_V.

In this talk we give a natural generalization of the result obtained in [1] in the case of the real and complex hyperbolic n-spaces.

2 Real hyperbolic spaces

Let n be an integer and $n \geq 2$. The real hyperbolic n-space

$$\mathbb{H}^n = \{z = (x,y) \in \mathbb{R}^n | x = (x_1, \ldots, x_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1}, y > 0\}$$

*Partially supported by JSPS Research Fellowships for Young Scientists. Department of Mathematical Science, Graduate School of Engineering Science, Osaka University. E-mail: inahama@sigmath.es.osaka-u.ac.jp

†Research Institute for Mathematical Sciences, Kyoto University. E-mail: shirai@kurims.kyoto-u.ac.jp

is an n-dimensional complete Riemannian manifold endowed with the Riemannian metric $ds^2 = y^{-2}(dx^2 + dy^2)$. The Riemannian measure is $m(dz) = y^{-n}dxdy$ and the Laplace-Beltrami operator is given by

$$\triangle_{\mathbb{H}^n} = y^2 \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\partial^2}{\partial x_k^2} + y^2 \frac{\partial^2}{\partial y^2} - (n-2) y \frac{\partial}{\partial y}.$$

3 Complex hyperbolic spaces

Let n be an integer and $n \geq 1$. In this talk the complex hyperbolic n-space $\mathbb{H}_c^n$ is realized as the half space model, i.e.,

$$\mathbb{H}_c^n = \{z = (y, x; z_2, \ldots, z_n) \in \mathbb{C}^n | y > 0, x \in \mathbb{R}, z_k = x_k + y_k\sqrt{-1} \in \mathbb{C}\,(2 \leq k \leq n)\}.$$

The metric tensor is given by

$$ds^2 = \frac{dy^2}{y^2} + \frac{1}{y^2}\sum_{k=2}^{n}(dx_k^2 + dy_k^2) + \frac{1}{y^4}\left(dx + \sum_{k=2}^{n}(x_k dy_k - y_k dx_k)\right)^2.$$

With this metric, $\mathbb{H}_c^n$ is a complete Riemannian manifold of dimension $2n$. It is well-known that $\mathbb{H}_c^n$ can be identified with the symmetric space $\mathrm{SU}(1,n)/\mathrm{U}(n)$. In our coordinate, the Laplace-Beltrami operator on $\mathbb{H}_c^n$ is given by

$$\begin{aligned}\triangle_{\mathbb{H}_c^n} &= y^2\frac{\partial^2}{\partial y^2} - (2n-1)y\frac{\partial}{\partial y} + y^4\frac{\partial^2}{\partial x^2} \\ &\quad + y^2\sum_{k=2}^{n}\Big(\frac{\partial}{\partial x_k} + y_k\frac{\partial}{\partial x}\Big)^2 + y^2\sum_{k=2}^{n}\Big(\frac{\partial}{\partial y_k} - x_k\frac{\partial}{\partial x}\Big)^2\end{aligned}$$

and the Riemannian measure is given by $m(dz) = y^{-(2n+1)}dydx\prod_{k=2}^{n} dx_k dy_k$.

4 Statement of the results

In the following, the notation M denotes either the real or the complex hyperbolic n-spaces for notational convenience.

To formulate the conditions for the scalar potential V on M, we introduce some notations. First, for any real-valued function V on M and for any positive number ε, we define the auxiliary potential V_ε by

$$V_\varepsilon(z) = \sup\{V(z') \,|\, d_M(z, z') \leq \varepsilon\}.$$

Next, we introduce the 'principal symbol' h_V of the Schrödinger operator with scalar potential V. If $M = \mathbb{H}^n$, we set

$$h_V(z;\zeta) = \frac{y^2}{2}|\zeta|^2 + V(z)$$

for any $z = (x, y) \in \mathbb{H}^n$ and $\zeta \in \mathbb{R}^n$ and, if $M = \mathbb{H}_c^n$, we set

$$h_V(z;\zeta) = \frac{y^2}{2}\eta^2 + \frac{y^4}{2}\xi^2 + \frac{y^2}{2}\sum_{k=2}^{n}(\xi_k + y_k\xi)^2 + \frac{y^2}{2}\sum_{k=2}^{n}(\eta_k - x_k\xi)^2 + V(z)$$

for any $z \in \mathbb{H}_c^n$ and $\zeta = (\eta, \xi; \xi_2, \eta_2, \ldots, \xi_n, \eta_n) \in \mathbb{R}^{2n}$.

Now we introduce the following conditions **(A.0)**-**(A.2)** on V.

(A.0) The scalar potential V is a real-valued, continuous function on M. Moreover, V is bounded from below.

(A.1) In addition to **(A.0)**, the integral

$$\int_M \exp\bigl(-tV(z)\bigr)m(dz)$$

is finite for each $t > 0$.

(A.2) Let N denote the dimension n if $M=\mathbb{H}^n$, the dimension $2n$ if $M=\mathbb{H}^n_c$. There exist positive constants γ, C_V such that

$$\lim_{\lambda\nearrow\infty}(2\pi)^{-N}\lambda^{-\gamma}\Bigl|\{(z;\zeta)\in M\times\mathbb{R}^N|h_V(z;\zeta)<\lambda\}\Bigr| \;=\; C_V$$

holds. Moreover, for any small $\varepsilon > 0$, there exists positive constant $C_{V,\varepsilon}$ such that

$$\lim_{\lambda\nearrow\infty}(2\pi)^{-N}\lambda^{-\gamma}\Bigl|\{(z;\zeta)\in M\times\mathbb{R}^N|h_{V,\varepsilon}(z;\zeta)<\lambda\}\Bigr| \;=\; C_{V,\varepsilon}$$

and $\lim_{\varepsilon\searrow 0} C_{V,\varepsilon} = C_V$ hold. Here, $|\cdot|$ denotes the $2N$-dimensional Lebesgue measure, and h_V, $h_{V,\varepsilon}$ and V_ε are as above.

The main result of this talk is the following:

Theorem *Let $N(H_V < \lambda)$ denote the number of eigenvalues (counting multiplicity) of H_V less than λ. Suppose that V satisfies the assumptions* **(A.1)** *and* **(A.2)**. *Then we have the asymptotic relation*

$$\lim_{\lambda\nearrow\infty}\lambda^{-\gamma}N(H_V<\lambda) = C_V.$$

Here γ and C_V be the constants as in (**A.2**).

References

[1] Inahama, Y. and Shirai, S., Eigenvalue asymptotics for the Schrödinger operators on the hyperbolic plane, To appear in J. Funct. Anal.

[2] Inahama, Y. and Shirai, S., Eigenvalue asymptotics for the Schrödinger operators on the real and complex hyperbolic spaces, Submitted.

[3] Simon, B., *Functional Integration and Quantum Physics,* Academic Press, 1979.

PERTURBATION OF SYMMETRIC MARKOV PROCESSES

Z.Q. Chen, P.J. Fitzsimmons, K. Kuwae and Z.S. Zhang

University of Washington, UCSD, Yokohama City University and University of Manchester

1. Setting

$\mathbf{X} = (\Omega, X_t, \zeta, \mathbf{P}_x)$ is a symmetric Markov process with state space E having ∂ as an isolated point, symmetry measure m, (quasi-regular) Dirichlet form $(\mathcal{E}, \mathcal{F})$. The transition semigroup of $\mathbf{X}$ is denoted (P_t), the resolvent (R_α), the $L^2(E; m)$-infinitesimal generator $(L, D(L))$. Let $(N(x, dy), H_t)$ be a Lévy system for $\mathbf{X}$; that is, $N(x, dy)$ is a kernel from $(E, \mathcal{B}(E))$ to $(E_\partial, \mathcal{B}(E_\partial))$ and H_t is a PCAF of $\mathbf{X}$ with bounded 1-potential such that for any nonnegative Borel function ϕ on $E \times E_\partial$ vanishing on the diagonal and any $x \in E$,

$$(1) \quad \mathbf{E}_x \left(\sum_{s \le t} \phi(X_{s-}, X_s) \right) = \mathbf{E}_x \left(\int_0^t \int_{E_\partial} \phi(X_s, y) N(X_s, dy) dH_s \right).$$

We write $N\phi(x) := \int_{E_\partial} \phi(x, y) N(x, dy)$ and $(N\phi * H)_t := \int_0^t N\phi(X_s) dH_s$. Let μ_H be the Revuz measure of the PCAF H. Then the jumping measure J and killing measure κ of $\mathbf{X}$ are given by $J(dx, dy) = \frac{1}{2} N(x, dy)\mu_H(dx)$ and $\kappa(dx) = N(x, \partial)\mu_H(dx)$.

We shall say that a smooth measure μ is of *Hardy class* (notation $\mu \in S_H$) if there exists $\delta \in]0, \infty[$ and $\gamma \in [0, \infty[$ such that

$$(2) \qquad \int_E \tilde{u}^2 d\mu \le \delta \mathcal{E}(u, u) + \gamma \int_E u^2 dm, \quad \forall u \in \mathcal{F}.$$

holds. A well-known sufficient condition for $\mu \in S_H$ is that for some $\delta > 0$, $\beta \ge 0$ the β-potential $U^\beta \mu$ is bounded above q.e. by δ, in which case $\gamma = \delta\beta$ does the job.

2. Stochastic Calculus

Let $\mathcal{M}$ and $\mathcal{N}$ denote the space of martingale additive functionals of $\mathbf{X}$ of finite energy and the space of continuous additive functionals of $\mathbf{X}$ of zero energy, respectively. For $u \in \mathcal{F}$, the following Fukushima's decomposition holds:

$$(3) \qquad u(X_t) - u(X_0) = M_t^u + N_t^u,$$

where $M^u \in \mathcal{M}$ and $N^u \in \mathcal{N}$. Furthermore, the martingale part M_t^u in (3) can be decomposed as

$$M_t^u = M_t^{u,c} + M_t^{u,j} + M_t^{u,\kappa},$$

where $M_t^{u,c}$ is the continuous part of martingale M^u, and

$$\begin{aligned} M_t^{u,j} &= \lim_{\varepsilon\downarrow 0}\left\{\sum_{0<s\le t}(u(X_s)-u(X_{s-}))I_{\{|u(X_s)-u(X_{s-})|>\varepsilon\}}I_{\{s<\zeta\}}\right.\\ &\qquad\left. -\int_0^t\left(\int_{\{y\in E:\,|u(y)-u(X_s)|>\varepsilon\}}(u(y)-u(X_s))N(X_s,dy)\right)dH_s\right\},\\ M_t^{u,\kappa} &= \int_0^t u(X_s)N(X_s,\delta)dH_s - u(X_{\zeta-})I_{\{t\ge\zeta\}}, \end{aligned}$$

are the jump and killing parts of M^u, respectively.

Let $\mathcal{N}^*\subset\mathcal{N}$ denote the class of continuous additive functionals of the form $N^u+\int_0^\cdot g(X_s)ds$ for some $u\in\mathcal{F}$ and $g\in L^2(E;m)$. Nakao [7] showed that there is a linear map Γ from $\mathcal{M}$ into $\mathcal{N}^*$ in the following way. It is shown in [7] that, for every $Z\in\mathcal{M}$, there is a unique $w\in\mathcal{F}$ such that

$$\mathcal{E}_1(w,f)=\frac{1}{2}\mu_{\langle M^f+M^{f,\kappa},\,Z\rangle}(E)\quad\text{for every } f\in\mathcal{F}. \tag{4}$$

This unique w will be denoted as $\gamma(Z)$. The Γ-operator is define as

$$\Gamma(Z)_t=N_t^{\gamma(Z)}-\int_0^t\gamma(Z)(X_s)ds\qquad\text{for } Z\in\mathcal{M}. \tag{5}$$

It is shown in Nakao [7] that $\Gamma(Z)$ can be characterized by the following equation

$$\lim_{t\downarrow 0}\frac{1}{t}\mathbf{E}_{g\cdot m}\left[\Gamma(Z)_t\right]=-\frac{1}{2}\mu_{\langle M^g+M^{g,\kappa},\,Z\rangle}(E)\qquad\text{for every } g\in\mathcal{F}_b. \tag{6}$$

So in particular we have $\Gamma(M^u)=N^u$ for $u\in\mathcal{F}$. Nakao [7] used this Γ operator to define stochastic integral

$$\int_0^t f(X_s)dN_s^u:=\Gamma(f\cdot M^u)_t-\frac{1}{2}\langle M^{f,c}+M^{f,j},\,M^{u,c}+M^{u,j}\rangle_t, \tag{7}$$

where $u\in\mathcal{F}$, $f\in\mathcal{F}\cap L^2(E;\mu_{\langle u\rangle})$ and $(f\cdot M^u)_t:=\int_0^t f(X_{s-})dM_s^u$. If we define

$$\widetilde{\mathcal{N}}:=\left\{N\in\mathcal{N}\ \middle|\ N=N^u+A^\mu\ \exists u\in\mathcal{F}\text{ and some signed smooth measure }\mu\right\},$$

then we see by (5) that $\int_0^\cdot f(X_s)dN_s^u\in\widetilde{\mathcal{N}}$ if $u\in\mathcal{F}$ and $f\in\mathcal{F}\cap L^2(E;\mu_{\langle u\rangle})$. However Nakao's definition of stochastic integral is quite restrictive on the integrand $f(X_t)$ and on the integrator N^u and is not enough for our study of the perturbation theory for general symmetric Markov processes.

Definition 2.1. Let M be a locally square integrable MAF of $\mathbf{X}$ on $[0,\zeta[$ and φ be a Borel function on $E\times E_\partial\to\mathbb{R}$ with $\varphi(x,x)=0$ and $\varphi(X_{t-},X_t)=\Delta M_t:=M_t-M_{t-}$ for all $t\in[0,\zeta[$. Assume that

$$\int_0^t\int_E\widehat{\varphi}^2(X_s,y)N(X_s,dy)dH_s<\infty\quad\text{for every } t<\zeta, \tag{8}$$

where $\widehat{\varphi}(x,y) := \varphi(x,y) + \varphi(y,x)$. Define

$$(9) \qquad \Lambda(M)_t := -\frac{1}{2}\left(M_t + M_t \circ r_t + \varphi(X_t, X_{t-}) + K_t\right) \qquad \text{for } t \in [0, \zeta[,$$

where K_t is the purely discontinuous local MAF of $\mathbf{X}$ on $[0,\zeta[$ with

$$(10) \qquad K_t - K_{t-} = -\widehat{\varphi}(X_{t-}, X_t).$$

Theorem 2.1. *For a MAF M of $\mathbf{X}$ having finite energy, $\Lambda(M)$ defined above coincides with $\Gamma(M)$ defined in (5) $\mathbf{P}_m$-a.s. on $[0, \zeta[$.*

Definition 2.2. Suppose that M is a locally square integrable MAF of $\mathbf{X}$ on $[0,\zeta[$ and $f \in \mathcal{F}_{loc}$. Let φ be a Borel function on $E \times E_\partial \to \mathbb{R}$ with $\varphi(x,x) = 0$ and $\varphi(X_{t-}, X_t) = \Delta M_t$ for all $t > 0$. Define on $[0, \zeta[$,

$$(11) \qquad \int_0^t f(X_{s-})\, d\Lambda(M)_s \ :=$$

$$\Lambda(f \cdot M)_t - \frac{1}{2}\langle M^{f.c}, M^c\rangle_t + \frac{1}{2}\int_0^t \int_E (f(y) - f(X_s))\varphi(y, X_s)N(X_s, dy)dH_s.$$

3. Perturbation

We now fix locally square integrable MAFs M and $\widehat{M}$ with energy measures $\mu_{\langle M\rangle}$ and $\mu_{\langle\widehat{M}\rangle}$ from S_H such that $\Delta M_\zeta = \Delta\widehat{M}_\zeta = 0$, and a signed smooth measure μ with $|\mu| \in S_H$. Let φ (resp. ψ) be a Borel function on $E \times E$ vanishing on the diagonal such that $\varphi(X_{t-}, X_t) = \Delta M_t$ (resp. $\psi(X_{t-}, X_t) = \Delta\widehat{M}_t$). Note that $\mu_{\langle M\rangle} = \mu_{\langle M^c\rangle} + N(\varphi^2)\mu_H$, where M^c is the continuous part of M. We assume $N(|\varphi|)\mu_H$ and $N(|\psi|)\mu_H$ are smooth measures and $\varphi > -1, \psi > -1$ on $E \times E$. Let $\delta(\langle M\rangle)$, $\delta(\langle\widehat{M}\rangle)$, $\delta(A^{\mu^+})$, $\delta(\varphi^2)$ and $\delta(\psi^2)$ denote the coefficient of $\mathcal{E}(u)$, and $\gamma(\langle M\rangle)$, $\gamma(\langle\widehat{M}\rangle)$, $\gamma(A^{\mu^+})$, $\gamma(\varphi^2)$ and $\gamma(\psi^2)$ denote the coefficient of $\|u\|_2^2$ in the estimate (2) for $\mu_{\langle M\rangle}$, $\mu_{\langle\widehat{M}\rangle}$, μ^+, $N(\varphi^2)\mu_H$ and $N(\psi^2)\mu_H$ respectively. We assume that

$$(12) \quad \delta_0 := [2\delta(\langle M\rangle)]^{1/2} + [2\delta(\langle\widehat{M}\rangle)]^{1/2} + \delta(A^{\mu^+}) + [\delta(\varphi^2)\delta(\psi^2)]^{1/2} < 1.$$

Given these elements, we define a quadratic form $\mathcal{Q}$ on $\mathcal{F}$: For $f, g \in \mathcal{F}$,

$$\begin{aligned}\mathcal{Q}(f,g) \ := \ & \mathcal{E}(f,g) - \int_E \tilde{g}d\mu_{\langle M^f, M\rangle} - \int_E \tilde{f}d\mu_{\langle M^g, \widehat{M}\rangle} - \int_E \tilde{f}\tilde{g}d\mu \\ & - \int_{E\times E} f(y)g(x)\varphi(x,y)\psi(y,x)N(x,dy)\mu_H(dx).\end{aligned}$$

It is easy to check that there is a constant $C > 0$ that

$$(13) \qquad |\mathcal{Q}(f,g)| \le C\mathcal{E}_1(f,f)^{1/2}\mathcal{E}_1(g,g)^{1/2}, \quad f, g \in \mathcal{F}.$$

Moreover,

$$(14) \qquad \mathcal{Q}_\alpha(f,f) \ge (1-\delta_0)\mathcal{E}(f,f) + (\alpha - \alpha_0)\|f\|_2^2, \quad f \in \mathcal{F},$$

where $\alpha_0 := \gamma(\langle M\rangle)\,(2/\delta(\langle M\rangle))^{1/2} + \gamma(\langle\widehat{M}\rangle)\left(2/\delta(\langle\widehat{M}\rangle)\right)^{1/2} + \gamma(A^{\mu^+})+$ $\left(\delta(\varphi^2)\delta(\psi^2)\right)^{1/2}\left\{\dfrac{\gamma(\varphi^2)}{\delta(\varphi^2)} \vee \dfrac{\gamma(\psi^2)}{\delta(\psi^2)}\right\}$. The quadratic form $(\mathcal{Q},\mathcal{F})$ is closed as a form on $L^2(E;m)$. Standard resolvent theory now yields the existence of a strongly continuous semigroup $(Q_t)_{t\geq 0}$ of operators on $L^2(E;m)$ with $\|Q_t\|_{2\to 2} \leq e^{\alpha_0 t}$ for all $t \geq 0$. Define a multiplicative function $Z = (Z_t)$ by

$$(15)\qquad Z_t := \mathrm{Exp}(\widehat{M}_t)\circ r_t\,\mathrm{Exp}\left(M_t + A_t^{\mu} + \langle M^c, \widehat{M}^c\rangle_t\right)\,(1+\psi(X_t, X_{t-})),$$

where A^{μ} is the (signed)CAF of locally bounded variation associated with the smooth signed measure μ and $r_t : \Omega\cap\{t<\zeta\} \to \Omega\cap\{t<\zeta\}$ is the reverse operator defined by $r_t(\omega)(s) := \omega((t-s)-)$ if $0 \leq s \leq t$, and $r_t(\omega)(s) := \omega(0)$ if $t < s$. Here $\mathrm{Exp}\,(M_t) := \exp\left(M_t - \frac{1}{2}\langle M^c\rangle_t\right)\prod_{0<s\leq t}(1+\Delta M_s)e^{-\Delta M_s}$ denote the solution of Doléan-Dade equation $L_t = 1 + \displaystyle\int_0^t L_{s-}dM_s$.

Theorem 3.1. *Define $T_t f(x) := \mathbf{E}_x[Z_t f(X_t)]$, whenever the integral makes sense. Then*

(a) *T_t is a well-defined mapping of $L^2(E;m)$ into itself, and $(T_t)_{t\geq 0}$ is a strongly continuous semigroup of bounded operator on $L^2(E;m)$, with $\|T_t\|_{2\to 2} \leq e^{\alpha_0 t}$ for all $t > 0$.*
(b) *For each $f \in L^2(E;m)$, $Q_t f = T_t f$, m-a.e.*

References

[1] Z.-Q. Chen, P. J. Fitzsimmons, M. Takeda, J. Ying and T. S. Zhang, Absolute continuity of symmetric Markov processes, to appear in *Ann. Probab.*

[2] Z.-Q. Chen and R. Song, Conditional gauge theorem for non-local Feynman-Kac transforms, *Probab. Theory Relat. Fields* **125** (2003), 45–72

[3] Z.-Q. Chen and R. Song, Drift transforms and Green function estimates for discontinuous processes, *J.F.A* **201** (2003), 262–281.

[4] Z.-Q. Chen and T. S. Zhang, Girsanov and Feynman-Kac type transformations for symmetric Markov processes, *Ann. Inst. H. Poincaré Probab. Statist.* **38** (2002), 475–505.

[5] P. J. Fitzsimmons and K. Kuwae, Non-symmetric perturbations of symmetric Dirichlet forms, preprint 2002, to appear in *J.F.A.*

[6] M. Fukushima, Y. Oshima and M. Takeda, "Dirichlet Forms and Symmetric Markov Processes,"de Gruyter Studies in Mathematics, **19** Walter de Gruyter & Co., Berlin, 1994.

[7] S. Nakao, Stochastic calculus for continuous additive functionals of zero energy, *Z. Wahrsch. Verw. Gebiete* **68** (1985), 557–578.

[8] S. Nakao, Girsanov formula in Dirichlet space theory, *The Science Reports of Kanazawa University*, **46** (2001), 1–7.

[9] J. B. Walsh, Markov processes and their functionals in duality, *Z. Wahrsch. verw. Gebiete* **24** (1972), 229–246.

Regularity of the diffusion coefficient matrix for generalized exclusion process.

永幡幸生[1] 北海道大学知識メディアラボラトリー

Kipnis, Landim, Olla, [2] および Kipnis, Landim, [1] により導入された「generalized exclusion process」は non-gradient タイプの格子気体の典型例である. [1,2] ではこのモデルに対して流体力学極限の導出を行なっているが極限の方程式の Cauchy 問題の一意性が示されるのが $d=1$ の時だけなので, 彼らはこの場合だけに制限している. 同時に方程式の導出に関してはそのまま適用でき, またこのことについてコメントされている. 今回全ての次元に対して, 拡散係数が滑らかであることが証明できたので, この係数の正値性とあわせて極限の方程式の解の一意性が示せ, よってこのモデルの流体力学極限が完成した.

ある正の整数 k に対して Markov 過程の状態空間を $X=\{0,1,2,\dots,k\}^{\mathbf{Z}^d}$ とする. X の元を $\eta=(\eta_x)_{x\in\mathbf{Z}^d}$ で表すと各 η_x はサイト x での粒子数を表す. 任意の局所関数 f に対して作用素を

$$Lf(\eta):=\sum_{x,y\in\mathbf{Z}^d:|x-y|=1} c(\eta_x)\pi^{(x,y)}f(\eta),$$

但し $c(r)$ は $c(0)=0$, $c(r)>0$ を満たす関数とし,

$$\pi^{(x,y)}f(\eta):=1_{\{\eta_x\neq 0,\eta_y\neq k\}}(f(\eta^{(x,y)})-f(\eta)),$$

$$(\eta^{(x,y)})_z:=\begin{cases}\eta_x-1, & \text{if } z=x\\ \eta_y+1, & \text{if } z=y\\ \eta_z, & \text{otherwise.}\end{cases}$$

とする.

以下のような直積測度の族を考える:

$$\nu_\alpha(\{\eta:\eta_x=l\}):=\begin{cases}\dfrac{1}{Z_\alpha} & \text{if } l=0,\\ \dfrac{1}{Z_\alpha}\dfrac{\alpha^l}{c(1)\dots c(l)} & \text{if } 1\le l\le k.\end{cases}$$

この測度を粒子密度でパラメタライズしなおす. 即ち $\rho=\rho(\alpha):=E^{\nu_\alpha}[\eta_0]$ を考えると単調増大関数なのでこの逆関数を $\overline{\alpha}$ として $P_\rho(\cdot)=\nu_{\overline{\alpha}(\rho)}(\cdot)$ とする. このとき Markov 作用素 L は P_ρ に関して対称になる.

平行移動の作用素 τ_x を以下の様に定める:

$$\tau_x A:=x+A,\quad \tau_x f(\eta):=f(\tau_x\eta),\quad (\tau_x\eta)_z:=\eta_{z-x}.$$

これらを用いて拡散係数行列 $D(\rho)$ は $d\times d$ 対称行列で, 変分公式を用いて以下のように表される.

$$\begin{aligned}D(\rho)&:=\frac{1}{\chi(\rho)}\overline{D}(\rho),\\ \chi(\rho)&:=E_\rho[\eta_0^2]-\rho^2,\\ &=\inf_u E_\rho[\sum_i c(\eta_0)\{\pi^{(0,e_i)}a_i\eta_0+\sum_x\pi^{(0,e_i)}\tau_x u\}^2],\end{aligned}$$

但し a は d-次元ベクトルで, $\inf_u$ は全ての局所関数に対して取られる.

[1]E-mail address: nagahata@aurora.es.hokudai.ac.jp
[1]Home page: http://aurora.es.hokudai.ac.jp/~nagahata/reprints.html

定理 0.1 上で定義した拡散係数 $D(\rho)$ は滑らかな関数である.

一方 Spohn [3] によると上で与えた変分公式による D は current–current 相関関数により与えられる Green–Kubo 公式と同値になる:

$$(a\cdot\overline{D}(\rho)a) = E_\rho[c(\eta_0)\{a_i\pi^{(0,e_i)}\eta_0\}^2] - \frac{1}{2}\int_0^\infty \sum_x E_\rho[w_a\tau_x e^{tL}w_a]dt$$

但し w_a は current で以下で定義する:

$$w_a := \sum_{1\le i\le d} a_i w_{e_i},\quad w_{e_i} := c(\eta_0)1_{\{\eta_0\neq 0,\eta_{e_i}\neq k\}} - c(\eta_{e_i})1_{\{\eta_{e_i}\neq 0,\eta_0\neq k\}}.$$

この同値性により, 中心極限定理の分散, 即ち Green–Kubo 公式の第 2 項が ρ の関数として滑らかであることが示せれば十分である.

定理 0.2 中心極限定理の分散 $\int_0^\infty\sum_x E_\rho[w_a\tau_x e^{tL}w_a]dt$ は ρ の関数として滑らかである.

$\mathcal{A} := \{A = (A_1,\ldots,A_k) : A_i \subset\subset \mathbf{Z}^d,\ \text{with } A_i\cap A_j = \emptyset \text{ if } i\neq j\}$ とする. この $\mathcal{A}$ 上にある Markov 過程 (dual 過程と呼ぶ) があり, これを X, $A\in\mathcal{A}$ から出発したこの過程の distribution を P_A, その平均を E_A と書く事にする. このとき中心極限定理の分散は以下の $F_\lambda(\rho)$ の $\lambda\to 0$ の極限で与えられる:

$$\begin{aligned} F_\lambda(\rho) &= \sum_{B\in\mathcal{A}} h(B,\rho)\sum_{C\in\mathcal{C}}\tilde{w}_a(C)m(C,\rho)\\ &\quad\times\{E_C[\int_0^\infty 1_{\mathcal{B}(B)}(X_s)e^{-\lambda s}ds] - E_{\theta(C)}[\int_0^\infty 1_{\mathcal{B}(B)}(X_s)e^{-\lambda s}ds]\}\end{aligned}$$

但し $h(B,\rho), m(C,\rho)$ は ρ の関数として滑らかで, $h(B,\rho), \tilde{w}_a(C)$ は有限個の B または C を除いて恒等的に 0 であり, $\mathcal{B}(B)$ はある無限集合である. これにより $F_\lambda(\rho)$ は ρ に依存する部分と λ に依存する部分とに分離できた. すなわち F_λ の極限関数を考えるのに, 関数の極限を見るのではなく, 係数の極限だけを見れば良いことが分かった. よって以下の補題により F_λ の極限, すなわち中心極限定理の分散は ρ の関数として滑らかであることが分かる.

補題 0.3 以下を満たす coupling process が存在する.
- $\mathcal{A}_n\times\mathcal{A}_n$ 上の Markov 過程でありこれを $\mathbf{X}_s = (Y_s, Z_s)$ と書き, 出発点 $A, B\in\mathcal{A}_n$ に関する distribution を $\mathbf{P}_{A,B}$ と書く.
- 各 marginal process Y, Z はそれぞれ A, B から出発した dual 過程になる.
- 任意の $B, C, D\in\mathcal{A}$, (但し C, D は同じ ergodic class に属する) に対して

$$\mathbf{E}_{C,D}[\int_0^\infty |1_{(\mathcal{B}(B),\mathcal{A})} - 1_{(\mathcal{A},\mathcal{B}(B))}|ds] < \infty$$

を満たす. (但し $\cup_n\mathcal{A}_n = \mathcal{A}$ であり ergodic class を表す.)

参考文献

[1] C.Kipnis, C.Landim Scaling Limits of Interacting Particle Systems, Springer (1999)
[2] C.Kipnis, C.Landim, S.Olla Hydrodynamic Limit for a Nongradient System: The Generalized Symmetric Exclusion Process, Comm. Pure Appl. Math. 47 (1994), no. 11, pp. 1475-1545
[3] H.Spohn. Large Scale Dynamics of Interacting Particles, Springer 1991.

Local Nash Inequality と自己相似集合上の熱核の評価

京都大学大学院情報学研究科
木上　淳

[7] において Nash は放物型偏微分方程式の基本解の漸近挙動を研究した。現代流に言い直せば、彼の結果は次のようなものである。
(X,d) を locally compact な距離空間、μ を (X,d) 上の Radon 測度、$(\mathcal{E},\mathcal{F})$ を $L^2(X,\mu)$ 上の regular Dirichlet form, $-L$ を $(\mathcal{E},\mathcal{F})$ に付随する $L^2(X,\mu)$ 上の non-negative self-adjoint operator, $T_t = exp{-}Lt$, $p(t,x,y)$ を $\partial u/\partial t = Lu$ の基本解、すなわち　$(T_tu)(x) = \int_X p(t,x,y)u(y)\mu(dy)$ とする。このとき、

Theorem 0.1. *Nasy inequality*

$$\mathcal{E}(u,u)||u||_1^{4/\theta} \geq c||u||_2^{2+4/\theta}, \tag{0.1}$$

（ただし $||\cdot||_p$ は L^p-ノルム）が任意の $u \in \mathrm{Dom}(\mathcal{E}) \cap L^1$ について成り立つならば、

$$||T_t||_{1\to\infty} = \sup_{x,y\in X} p(t,x,y) \leq c't^{-\theta/2}. \tag{0.2}$$

が任意の $t > 0$ について成り立つ。

[2] においてこの逆が成り立つことも示された。この Nash の結果は熱核の空間一様な漸近評価を与えるものである。
一方 Li-Yau[6] は X が Ricci 曲率が非負の Reiman 多様体で d が geodesic 距離のとき

$$\frac{c_1}{V(\sqrt{t},x)}\exp\big(-\frac{d(x,y)^2}{c_2t}\big) \leq p(t,x,y) \leq \frac{c_3}{V(\sqrt{t},x)}\exp\big(-\frac{d(x,y)^2}{c_4t}\big), \tag{0.3}$$

（ただし $V(r,x)$ は $B_r(x) = \{y|d(x,y) < r\}$ の体積）を示した。この評価は空間非一様性を許すことに注目してもらいたい。Riemann 多様体についてはその後 [3] and [8] において (0.3) は Poincaŕe inequality と volume doubling property: 任意の $r > 0$ と任意の $x \in X$ に対して $V(2r,x) \leq CV(r,x)$ と同値であることを示した。

近年、[1, 4] などの結果より自己相似集合上の熱核は強い空間非一様性を持つことがわかってきた。たとえば [0,1] 区間上の通常の Brown 運動を自己相似測度 μ に関して time change した場合には、$\overline{\lim}_{t\to 0} -\log p(t,x,x)/\log t$ の値は x に強く依存しいわゆる multifractal 構造をもつことがわかっている。

本講演では Nash inequality の自然な拡張として local Nash inequality と呼ばれるものをする。そしてこの local Nash inequality が自己相似集合の場合も含めて (0.3) のようなタイプの空間非一様性を許す評価を導くことを示す。

Definition 0.2 (local Nash inequality). local Nash inequality が満たされるとは定数 $A,B > 0$ があって任意の $r > 0$ と任意の $u \in \mathcal{F} \cap L^1$ に対して

$$\mathcal{E}(u,u) + A\frac{||u||_1^2}{r^\beta \inf_{y\in\mathrm{supp}(u)} V(r,y)} \geq B\frac{||u||_2^2}{r^\beta} \tag{0.4}$$

となることである。

Theorem 0.3. (1) μ が距離 d に関して *Ahlfors regular* であるとき、すなわち $b_1 r^\alpha \le V(r,x) \le b_2 r^\alpha$ が任意の $r>0$ でなりたつときは、*local Nash inequality* は古典的な (0.1) と同値である。
(2) 熱核の対角部分の上からの評価

$$p(t,x,x) \le \frac{c}{V(t^{1/\beta},x)}, \tag{0.5}$$

は *local Nash inequality* を導く。
(3) ある $a_1, a_2 > 0$ があって任意の $r>0$ に対して

$$a_1 r^\beta \le E_x(\tau_{B_r(x)}) \le a_2 r^\beta, \tag{0.6}$$

(ただし $\tau_{B_r(x)}$ は半径 r の球 $B_r(x)$ からの *exit time*) となるとき *exit time estimate* が成り立つという。*volume doubling condition* のもとでは *local Nash inequality + exit time estimate* は次の熱核の上からの評価と同値である。

$$p(t,x,y) \le \frac{c_3}{V(t^{1/\beta},x)} \exp\Big(-\big(\frac{d(x,y)^\beta}{c_4 t}\big)^{\frac{1}{\beta-1}}\Big). \tag{0.7}$$

本講演ではさらにこの結果を自己相似集合上の熱核の評価に応用する。

References

[1] M. T. Barlow and T. Kumagai, *Transition density asymptotics for some diffusion processes with multi-fractal structures*, Electron. J. Probab. **6** (2001).

[2] E. Carlen, S. Kusuoka, and D. Stroock, *Upper bounds for symmetric Markov transition functions*, Ann. Inst. Henri Poincaré **23** (1987), 245–287.

[3] A. Grigor'yan, *The heat equation on noncompact Riemannian manifolds. (in Russian)*, Mat. Sb. **182** (1991), 55–87, English translation in Math. USSR-Sb. 72(1992), 47–77.

[4] B. M. Hambly, J. Kigami, and T. Kumagai, *Multifractal formalisms for the local spectral and walk dimensions*, Math. Proc. Cambridge Phil. Soc. **132** (2002), 555–571.

[5] J. Kigami, *Local Nash inequality and inhomogeneity of heat kernels*, preprint

[6] P. Li and S.-T. Yau, *On the parabolic kernel of the Schrödinger operator*, Acta Math. **156** (1986), 153 -201.

[7] J. Nash, *Continuity of solutions of parabolic and elliptic equations*, Amer. J. Math. **80** (1958), 931–954.

[8] L. Saloff-Coste, *A note on Poincaré, Sobolev, and Harnack inequalities*, Internat. Math. Res. Notices (1992), 27–38.

Homogenization of infinite dimensional diffusion processes with periodic drift coefficients

Sergio Albeverio, Inst. Angew. Mathematik, Universität Bonn,
M. S. Bernabei, Università di Camerino,
M. Röckner, Fakultät für Mathematik, Universität Bielefeld,
Minoru W. Yoshida, The Univ. Electro commun, 182-8585 Chofu-shi
Tokyo, Japan *

Dec., 2003

1 Introduction and setting of the problem

In this paper we discuss the limiting probability distribution of a scaling limit of infinite dimensional diffusion processes on $\mathbf{R}^{\mathbf{Z}}$ with periodic drift coefficients. By making use of an approximation sequence that converges to the original infinite dimensional diffusion process, we discuss the homogenization problem in a generalized sense, namely, here we do not take the scaling limit of the original process directly, but take the scaling limit of an approximation sequence the index of which is controlled by the parameter of the scaling limit, such that the index diverges to ∞ as the scaling parameter tends to 0 (cf. Problem $\mathrm{Q_G}$ below). We show the existence of a non trivial limiting process for the so modified process which is an infinite dimensional diffusion having constant coefficients.

By the discussion of the modified problem we will be able to reconsider the original homogenization problem (cf. Remark 1.1), however, the detailed discussions of this will be postponed to a future study.

The homogenization problem for diffusion processes with regular coefficients can be best explained by means of a formulation using stochastic differential equations. We begin with the definition of a complete probability space $(\Omega, \mathcal{F}, P; \mathcal{F}_t)$ on which the stochastic differential equations are defined.

Definition 1.

Let $(\Omega, \mathcal{F}, P; \mathcal{F}_t)$ be a complete probability space with an increasing family of sub σ-field $\mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}$ $(t \in \mathbf{R}_+)$. Suppose that on $(\Omega, \mathcal{F}, P; \mathcal{F}_t)$ we are given a family of independent one-dimensional $\mathcal{F}_t$ standard Brownian motion processes $\{B_k(t)\}_{t\in\mathbf{R}_+}$ $(k \in \mathbf{Z})$. □

Suppose that we are given a function $J \in C^\infty(\mathbf{R} \to \mathbf{R}_+)$ such that
(i) there exists $\beta > 0$ and $J(x) \geq \beta$ holds for all $x \in \mathbf{R}$;
(ii) the derivatives of all order of J are bounded functions;
(iii) J is a periodic function with the period 2π.

In Lemma 1.2 of [HS] through an iteration argument it is shown that for each $\epsilon > 0$ and each initial state $\mathbf{x} = (\cdots, \mathbf{x}_{-1}, \mathbf{x}_0, \mathbf{x}_{+1}, \cdots) \in \mathbf{R}^{\mathbf{Z}}$ there exists a unique strong solution $\{\mathbf{X}^\epsilon(t, \mathbf{x})\}_{t\in\mathbf{R}_+}$

*email: yoshida.se.uec.ac.jp

on $(\Omega, \mathcal{F}, P; \mathcal{F}_t)$ such that

$$\begin{aligned} X_k^\epsilon(t, \mathbf{x}) &= x_k + \sqrt{2} B_k(t) \\ &+ \frac{1}{\epsilon} \int_0^t \{ J'(\frac{X_{k+1}^\epsilon(s, \mathbf{x})}{\epsilon} - \frac{X_k^\epsilon(s, \mathbf{x})}{\epsilon}) \\ &- J'(\frac{X_k^\epsilon(s, \mathbf{x})}{\epsilon} - \frac{X_{k-1}^\epsilon(s, \mathbf{x})}{\epsilon}) \} ds, \qquad k \in \mathbf{Z}, \end{aligned} \tag{1}$$

$$\mathbf{X}^\epsilon(t, \mathbf{x}) = (\cdots, \mathbf{X}_{-1}^\epsilon(\mathbf{t}, \mathbf{x}), \mathbf{X}_0^\epsilon(\mathbf{t}, \mathbf{x}), \mathbf{X}_{+1}^\epsilon(\mathbf{t}, \mathbf{x}), \cdots).$$

A formal extension of the homogenization problem of finite dimensional diffusions to the problem of infinite dimensional diffusions will be the following.

Problem Q

Characterize the probability law, if it exists, of the limiting process

$$\lim_{\epsilon \downarrow 0} \mathbf{X}^\epsilon(t, \mathbf{x}), \qquad \mathbf{t} \in \mathbf{R}_+. \tag{2}$$

□

Here, we do not discuss above original Problems Q, but rather the following Problem $\mathbf{Q_G}$, where the procedure of taking the scaling limit is modified.

Problem $\mathbf{Q_G}$

For the infinite dimensional diffusion $\{\mathbf{X}^\epsilon(t, \mathbf{x})\}_{\mathbf{t} \geq \mathbf{0}}$ in Problem Q, let $\{\mathbf{X}^{\epsilon, N}(t, \mathbf{x})\}_{\mathbf{t} \geq \mathbf{0}}$ be an approximation sequence of the original process such that for each $\epsilon > 0$

$$\lim_{N \to \infty} \mathbf{X}^{\epsilon, N}(\cdot, \cdot) = \mathbf{X}^\epsilon(\cdot, \cdot), \qquad \textit{in law}.$$

Characterize the probability law, if it exists, of the limiting process

$$\lim_{\epsilon \downarrow 0} \mathbf{X}^{\epsilon, N(\epsilon)}(t, \mathbf{x}), \qquad \mathbf{t} \in \mathbf{R}_+,$$

for some sequence $N(\epsilon) \in \mathbf{N}$ indexed by $\epsilon > 0$, such that

$$\lim_{\epsilon \downarrow 0} N(\epsilon) = +\infty.$$

□

Our intermediate goal is to show that we can find an $N(\epsilon)$ satisfying the assumption of Problem $\mathrm{Q_G}$ and such that $\{\mathbf{X}^{\epsilon, N(\epsilon)}(t, \mathbf{x})\}_{\mathbf{t} \in \mathbf{R}_+}$ converges weakly as $\epsilon \downarrow 0$, to a continuous process $\{\mathbf{Y}(t)\}_{t \in \mathbf{R}_+}$, which is an infinite dimensional diffusion with a constant covariance matrix, under the condition that the initial state $\mathbf{x}$ satisfies that $\frac{\mathbf{x}}{\epsilon}$ obeys a probability distribution whose Radon-Nikodym density with respect to the "Gibbs state" of $\{\mathbf{X}^1(t, \mathbf{x})\}_{\mathbf{t} \in \mathbf{R}_+}$ is a bounded function.

Above we used the terminology "Gibbs state", however the distribution of $\{\mathbf{X}^1(t, \mathbf{x})\}_{\mathbf{t} \in \mathbf{R}_+}$ is not a Gibbs state in the strict sense, but rather a Gibbs state of the quotient process η_t such that $\mathbf{X}^1(t, \mathbf{x}) = \eta_\mathbf{t} \ \mathbf{mod}\ \mathbf{2}\pi$ (cf. Proposition 2.1 in the next section).

Remark (scope for the original problem Q)

By making use of $\{\mathbf{X}^{\epsilon, N(\epsilon)}(t, \mathbf{x})\}_{\mathbf{t} \in \mathbf{R}_+}$, by which the modified problem $\mathrm{Q_G}$ is solved, we will be able to reconsider the original problem Q. In fact, in our procedures to prove Theorem 2.2 and Lemma 2.2, for each $\epsilon > 0$ we construct the approximation process $\{\mathbf{X}^{\epsilon, N(\epsilon)}(t, \mathbf{x})\}_{\mathbf{t} \in \mathbf{R}_+}$ on the same probability space on which the original process $\{\mathbf{X}^\epsilon(t, \mathbf{x})\}_{\mathbf{t} \in \mathbf{R}_+}$ is defined, and we can then evaluate the distance between these two continuous processes by using a martingale inequality. In this way, we can also discuss the tightness of the probability laws of the original sequence $\{\mathbf{X}^\epsilon(t, \mathbf{x})\}_{\mathbf{t} \in \mathbf{R}_+}$, ($\epsilon > 0$). For this discussion we should take a new metric on $\mathbf{R}^\mathbf{Z}$ that is weaker than the metric adopted here (cf. Definition 2.1, and section 23 of [I]).

□

High-dimensional graphical networks of self-avoiding walks

Mark Holmes[1], Antal A. Járai[2], Akira Sakai[3], Gordon Slade[1]

1. Motivation

A single self-avoiding walk has been used as a model of a linear polymer in a good solution. It is known that the model exhibits a phase transition and power-law behavior characterized by a set of dimension-dependent critical exponents, around the phase transition point. An interesting fact which is ubiquitous in various statistical mechanical models is that the critical exponents cease to depend on the dimension d and take on the values for random walk, when d is above the upper critical dimension 4. Therefore, the behavior of a linear polymer chain whose end-to-end distance is large can be predicted by random walk when $d > 4$. The lower-dimensional situation has not yet been completely settled.

Not only in a single linear polymer, but we are also interested in a network of polymers containing monomers capable of making more than two chemical bonds, leading to branching. For example, we may consider a network which looks like a "watermelon". A network of mutually-avoiding self-avoiding walks could be used as a model. A natural question is, if d is sufficiently large, whether we can describe the asymptotic behavior of a network of self-avoiding walks by the corresponding network of random walks.

2. Models and results

i) A single self-avoiding walk. We consider the d-dimensional integer lattice $\mathbb{Z}^d$ as space. For a walk $\omega = (\omega(0), \omega(1), \ldots, \omega(|\omega|))$ in $\mathbb{Z}^d$, we define the transition probability along ω by

$$W_p(\omega) = \prod_{i=1}^{|\omega|} \big[p\, D(\omega(i) - \omega(i-1))\big], \qquad \text{where} \quad D(x) = \frac{\mathbb{1}_{\{0<\|x\|_\infty \le L\}}}{(2L+1)^d - 1}. \tag{1}$$

The parameter $L < \infty$ is the range of each one step. The two-point function for a single self-avoiding walk is defined by

$$G_p(x) = \sum_{\omega: o \to x} W_p(\omega)\, K(\omega), \qquad \text{where} \quad K(\omega) = \mathbb{1}_{\{\omega \text{ has no self-intersection}\}}. \tag{2}$$

If we ignore $K(\omega)$, we obtain random walk Green's function with killing rate $1-p$, so that its sum over $x \in \mathbb{Z}^d$ equals $(1-p)^{-1}$. Self-avoiding walk is known to exhibit a similar phase transition at $p_c \ge 1$ such that $\sum_{x \in \mathbb{Z}^d} G_p(x)$ is finite only when $p < p_c$ and diverges as $p \uparrow p_c$. From now on, we fix $p = p_c$ and simply write $G(x) = G_{p_c}(x)$. We also use the notation $|\!|\!|x|\!|\!| = \|x\|_2 \vee 1$ for $x \in \mathbb{Z}^d$. The asymptotic behavior of $G(x)$ was determined as follows.

Theorem 1 *[1] Let $d > 4$ and $\kappa_1 = 2(d-4) \wedge 2$, and fix an arbitrarily small number $\epsilon > 0$. There exist $A = A(d, L)$ and $L_0 = L_0(d, \epsilon)$ such that, for $L \ge L_0$,*

$$G(x) = A\sigma^{-2} |\!|\!|x|\!|\!|^{2-d}\, [1 + O(|\!|\!|x|\!|\!|^{-\kappa_1+\epsilon})], \tag{3}$$

where $A = d\,\Gamma(d/2-1)/(2\pi^{d/2}) + O(L^{-2+\epsilon})$. In addition, for $x \ne o$,

$$G(x) \le O(L^{-2+\epsilon} |\!|\!|x|\!|\!|^{2-d}). \tag{4}$$

The constant in the error term in (3) depends on ϵ and L, while the constant in (4) depends on ϵ but not on L.

[1]Department of Mathematics, The University of British Columbia, Canada. holmes@math.ubc.ca, slade@math.ubc.ca
[2]Centrum voor Wiskunde en Informatica, The Netherlands. Antal.Jarai@cwi.nl
[3]EURANDOM, The Netherlands. sakai@eurandom.tue.nl

Theorem 1 states that, if $d > 4$ and $L \gg 1$, the leading asymptotic behavior of the two-point function is equivalent to that of random walk Green's function, apart from the error term in the constant A. The proof in [1] is based on the lace expansion, and L has to be large enough to ensure convergence of the lace expansion.

ii) A network of self-avoiding walks. The shape of a network is denoted by $\nu = (S, E)$, where S is the set of network's branch points and E is the set of (directed) edges $e = (e_1, e_2)$, which joins distinct branch points $e_1, e_2 \in S$. The degree of the branch point $i \in S$ is denoted by Δ_i. We combine self-avoiding walks according to the shape ν such that the resulting structure has the same shape. Then, we embed the entire object into $\mathbb{Z}^d$ such that each $i \in S$ is embedded at $x_i \in \mathbb{Z}^d$. For $\nu = (S, E)$ and $\vec{x} = (x_i : i \in S)$, the network function is defined by

$$G^\nu(\vec{x}) = \sum_{\substack{(\omega_e : e \in E) \\ \omega_e : x_{e_1} \to x_{e_2}}} \left[\prod_{e \in E} [W_{p_c}(\omega_e)\, K(\omega_e)]\right] \prod_{e \neq e'} I(\omega_e, \omega_{e'}), \tag{5}$$

where $I(\omega_e, \omega_{e'})$ is 1 if ω_e has no intersection with $\omega_{e'}$ (except for a possible common endpoint), and 0 otherwise. If we ignore $\prod_{e \neq e'} I(\omega_e, \omega_{e'})$, we obtain $\prod_{e \in E} G(x_{e_2} - x_{e_1})$, i.e., the network of independent self-avoiding walks. We are interested in the asymptotic behavior of $G^\nu(\vec{x})$ as the network's branch points are widely separated from each other.

Theorem 2 *[2] Let $d > 4$ and fix $\kappa_2 < (d-4) \wedge 1$. For $\nu = (S, E)$, there exist $L_0 = L_0(d, \nu)$ and $V_\Delta = V_\Delta(d, L)$ such that, for $L \geq L_0$,*

$$G^\nu(\vec{x}) = \left[\prod_{e \in E} A\sigma^{-2} |\!|\!| x_{e_2} - x_{e_1} |\!|\!|^{2-d}\right] \left[\prod_{i \in S} V_{\Delta_i}\right] \left[1 + \sum_{i,j \in S : i \neq j} O(|\!|\!| x_i - x_j |\!|\!|^{-\kappa_2})\right]. \tag{6}$$

Constants in the error term depend on d, L, ν and κ_2.

Theorem 2 states that the leading asymptotic behavior of the network function is the product of self-avoiding walk two-point functions, as explained above Theorem 2, apart from the vertex factors V_Δ. By definition, $V_1 = 1$. Each vertex factor takes into account the local effect of the mutual avoidance of the self-avoiding walks combined at that vertex. The mutual avoidance diminishes the number of allowed configurations, so that $V_\Delta < 1$ for $\Delta \geq 2$.

The proof of Theorem 2 is based on an extension of the the lace expansion on a general graph and on an application of Theorem 1. I will explain those two key steps at the symposium.

References

[1] T. Hara, R. van der Hofstad, G. Slade. Critical two-point functions and the lace expansion for spread-out high-dimensional percolation and related models. *Ann. Probab.*, **31** (2003): 349-408.

[2] M. Holmes, A. A. Járai, A. Sakai, G. Slade. High-dimensional graphical networks of self-avoiding walks. To appear in *Canad. J. Math.*

On large deviations for random currents induced from stochastic line integrals *

桒田 和正 † (京都大学大学院情報学研究科)

M をコンパクトリーマン多様体とし、M 上 $\Delta/2+b$ を生成作用素とする非退化な拡散過程を $(\{z_t\}_{t\geq 0}, \{\mathbb{P}_x\}_{x\in M})$ とおく。但し、Δ は Laplace-Beltrami 作用素、b は滑らかなベクトル場とする。

滑らかな一次微分形式の空間上に、L^2-Sobolev ノルムの族 $\{\|\cdot\|_p\}_{p\in\mathbb{R}}$ を次で定義する:

$$\|\alpha\|_p := \int_M |(1-\Delta_1)^{p/2}\alpha|^2 dv$$

但し、v は正規化された Riemann 測度、Δ_1 は一次微分形式に作用する Hodge-Kodaira ラプラシアンとする。以下、$\mathscr{D}_{1,p}$ で、滑らかな微分形式の成す空間の $\|\cdot\|_p$ による完備化を表わすものとする。

滑らかな微分形式 α に対し、拡散過程 $\{z_s\}_{s\in[0,t]}$ の経路に沿った確率線積分 $\int_{z[0,t]}\alpha$ が定まる。このとき $\int_{z[0,t]}\alpha$ は、対応 $X_t : \alpha \mapsto \int_{z[0,t]}\alpha$ により、$\mathscr{D}_{1,-p}$ に値を取る確率変数 X_t とみなすことができる (但し、$p > d+1$)。また $X_t(\alpha)$ は半マルチンゲールであるから、マルチンゲール部分 $Y_t(\alpha)$ と有界変動部分 $A_t(\alpha)$ の和に分解する。上と同様にして、Y_t および A_t は $\mathscr{D}_{1,-p}$ に値を取る確率変数とみなすことができる。

本講演ではこれらの確率変数 X_t、Y_t 及び A_t の homogenization に付随する大偏差原理を扱う。まず、Y_t についての結果から紹介する。$\tilde{Y}^\lambda = g(\lambda)^{-1}\lambda^{-1/2}Y_\lambda$ とおく。但し、$\lim_{\lambda\to\infty} g(\lambda) = \infty$ とする。

定義 1 速度関数 $L : \mathscr{D}_{1,-p} \to [0,\infty]$ を次で定義する:

$$L(\omega) = \begin{cases} \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_M |\tilde{\omega}|^2 dm & \langle\omega,\alpha\rangle = \displaystyle\int_M (\tilde{\omega},\alpha)\, dm \text{ が各 } \alpha\in\mathscr{D}_{1,p} \text{ で成り立つとき、} \\ \infty & \text{そうでないとき。} \end{cases}$$

ここで、m は拡散過程 $\{z_t\}_{t\geq 0}$ の正規化された不変測度とする。

定理 1 [2] $g(\lambda) = o(\sqrt{\lambda})$ とする。このとき、速度関数 L に関する大偏差原理が $\tilde{Y}^\lambda$ について成り立つ。即ち、任意の *Borel* 集合 $\mathscr{A} \subset \mathscr{D}_{1,-p}$ に対して、

$$\limsup_{\lambda\to\infty} \frac{1}{g(\lambda)^2} \log\left(\sup_{x\in M} \mathbb{P}_x[\tilde{Y}^\lambda \in \mathscr{A}]\right) \leq -\inf_{\omega\in\bar{\mathscr{A}}} L(\omega), \tag{I}$$

$$\liminf_{\lambda\to\infty} \frac{1}{g(\lambda)^2} \log\left(\inf_{x\in M} \mathbb{P}_x[\tilde{Y}^\lambda \in \mathscr{A}]\right) \geq -\inf_{\omega\in\mathscr{A}^\circ} L(\omega) \tag{II}$$

但し、$\bar{\mathscr{A}}$ は $\mathscr{A}$ の閉包、$\mathscr{A}^\circ$ は $\mathscr{A}$ の開核とする。

*研究集会「確率過程とその周辺」(2003 年 12 月 10 日-12 月 13 日、於金沢) 講演予稿

†Partially supported by JSPS fellowship for young scientists. e-mail:kkuwada@acs.i.kyoto-u.ac.jp

定義 2 速度関数 $I : \mathscr{D}_{1,-p} \to [0,\infty]$ を次で定義する。

$$I(\omega) = \begin{cases} \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_M |\hat{\omega}|^2 d\mu^\omega & \omega \in \mathscr{H} \text{ のとき、} \\ \infty & \text{そうでないとき。} \end{cases}$$

ここで、$\mathscr{H}$ を、次の 3 つの条件を満たす $\omega \in \mathscr{D}_{1,-p}$ 全体として定義する:

(i) M 上の確率測度 μ^ω が存在して、各 $u \in C^\infty(M)$ に対して、

$$\langle \omega, \alpha \rangle + \int_M \left(\frac{1}{2}\Delta + b \right) u \, d\mu^\omega = 0.$$

(ii) $\hat{\omega} \in L_1^2(d\mu^\omega)$ が存在して、各 $\alpha \in \mathscr{D}_{1,p}$ に対して、$\langle \omega, \alpha \rangle = \displaystyle\int_M (\hat{\omega}, \alpha) \, d\mu^\omega$ が成り立つ。

(iii) 上で定めた μ^ω は Riemann 測度 v について絶対連続。さらに、その密度関数を F としたとき、$\sqrt{F} \in \mathrm{Dom}(d)$。ここで、$\mathrm{Dom}(d)$ は M 上の外微分 d の $L^2(dv)$-最小閉拡大の定義域とする。

定理 2 [1] $g(\lambda) = \sqrt{\lambda}$ と仮定する。このとき、$\tilde{Y}^\lambda$ は速度関数 I について大偏差原理を満たす。即ち、(I) および (II) の評価が速度関数 L を I に置き換えた形で成立する。

次に X_t 及び A_t についての大偏差原理を述べる。$e \in \mathscr{D}_{1,-p}$ を次で定義する:

$$e(\alpha) = \int_M \left((\hat{b}, \alpha) - \frac{1}{2}\delta\alpha \right) dm$$

但し、$\hat{b}$ はベクトル場 b に対応する一次微分形式、δ は外微分の $L_1^2(dv)$ 上での随伴作用素とする。$\tilde{X}^\lambda$ 及び $\tilde{A}^\lambda$ を $\tilde{X}^\lambda = g(\lambda)^{-1}\lambda^{-1/2}(X_\lambda - \lambda e)$ 及び $\tilde{A}^\lambda = g(\lambda)^{-1}\lambda^{-1/2}(A_\lambda - \lambda e)$ で定める。また、$\mathscr{D}_{1,-p}$ 上の速度関数 $\mathscr{I}$ と $\mathscr{D}_{1,-p}$ 上の連続線型作用素 $T : \mathscr{D}_{1,-p} \to \mathscr{D}_{1,-p}$ に対して、$\mathscr{I}^{(T)}(\omega) := \inf_{T\eta=\omega} \mathscr{I}(\eta)$ とおく。冪等な連続線型写像 $Q : \mathscr{D}_{1,p} \to \mathscr{D}_{1,p}$ を $Q\alpha = du_\alpha$ で定義する。但し、u_α は次の微分方程式の解とする:

$$\left(\frac{1}{2}\Delta + b \right) u = (\hat{b}, \alpha) - \frac{1}{2}\delta\alpha - e(\alpha).$$

Q の随伴作用素を $Q^* : \mathscr{D}_{1,-p} \to \mathscr{D}_{1,-p}$ と書くことにする。

定理 3 [1] $\tilde{Y}^\lambda$ が速度関数 $\mathscr{I}$ について大偏差原理を満たすとする。このとき、$\tilde{X}^\lambda$ 及び $\tilde{A}^\lambda$ は各々速度関数 $\mathscr{I}^{(1-Q^*)}$ 及び $\mathscr{I}^{(-Q^*)}$ について大偏差原理を満たす。

参考文献

[1] K. Kuwada. On large deviations for random currents induced from stochastic line integrals. preprint.

[2] K. Kuwada. Sample path large deviations for a class of random currents. to appear in *Stochastic Process. Appl.*

n 階境界条件に対応する Brown 運動, その 2

西岡 國雄[1]

I. 半直線 $\mathbf{R}_+ \equiv [0,\infty)$ 上の熱方程式にたいし, 次の境界値-初期値問題を考える.

[n 階境界値-初期値問題] $\varphi \in \mathcal{C}_b^\infty(\mathbf{R}_+)$ を初期関数, n を非負整数とする. 熱方程式の n 階境界値-初期値問題とは, (1a) - (1d) を満たす解 u を求める事である:

$$\text{(1a)} \qquad \partial_t u(t,x) = \frac{1}{2}\partial_x^2 u(t,x) \quad \text{for } t>0 \text{ and } x \in \mathbf{R}_+,$$

$$\text{(1b)} \qquad \partial_x^n u(t,0) = 0 \quad \text{for } t>0,$$

$$\text{(1c)} \qquad \lim_{t\to 0} u(t,x) = \varphi(x) \quad \text{for } x>0,$$

$$\text{(1d)} \qquad \lim_{t\to 0} \partial_x^k u(t,0) = \partial_x^k \varphi(0) \text{ with } k = \begin{cases} 0,2,\cdots,n-2 & \text{if } n\ge 2 \text{ and even} \\ 1,3,\cdots,n-2 & \text{if } n \ge 3 \text{ and odd.} \end{cases}$$

ここで, $\partial_x^n u(t,0)$ などの境界での微分はすべて右微分であり, 解 u は $(t,x)\in(0,\infty)\times\mathbf{R}_+$ の滑らかな関数で下の有界条件を満すものとする:

$$\text{(2)} \qquad \begin{array}{l} \text{For each } t>0,\ u(t,x)\in\mathcal{C}_b^\infty(\mathbf{R}_+) \text{ in } x\in\mathbf{R}_+, \text{ and} \\ \sup_{x\ge 0}|u(t,x)| \le C(t^\ell+1) \text{ with some positive constants } C \text{ and } \ell. \quad \diamondsuit \end{array}$$

この問題で $n=0,1,2$ の場合には, 基本解 $p^{(n)}$ の具体的な形が判っており, それを推移確率密度とする Brown 運動 $\{B^{(n)}(t)\}$ も簡単に構成できる: 熱核を $p(t,x)\equiv(1/\sqrt{2\pi t})\exp\{-x^2/2t\}$, $\mathbf{R}^1$ 上の Brown 運動を $\{B(t)\}$ とおくと

$$\text{(3)} \qquad \begin{array}{l} p^{(0)}(t,x,y) \equiv p(t,y-x) - p(t,y+x), \\ \textit{Killed Brownian motion} \quad B^{(0)}(t) \equiv B(t) \text{ if } t<\tau_0; \quad \equiv \partial \text{ if } t \ge \tau_0, \end{array}$$

$$\text{(4)} \qquad \begin{array}{l} p^{(1)}(t,x,y) \equiv p(t,y-x) + p(t,y+x), \\ \textit{Reflecting Brownian motion} \quad B^{(1)}(t) \equiv B(t) + L(t), \end{array}$$

$$\text{(5)} \qquad \begin{array}{l} p^{(2)}(t,x,y) \equiv p^{(0)}(t,x,y) + \mathbf{P}_x[\tau_0 \le t]\ \delta(y:0), \\ \textit{Stopped Brownian motion} \quad B^{(2)}(t) \equiv B(t\wedge\tau_0). \end{array}$$

ここで ∂ は $\mathbf{R}^1$ の extra point, τ_0 は $\{B(t)\}$ の 0 への first hitting time

$$\text{(6)} \qquad \tau_0 \equiv \inf\{t>0 : B(t)=0\}, \quad \mathbf{P}_x[\tau_0 \in dt] = -\partial_x p(t,x)\,dt,$$

$\{L(t)\}$ は Brown 運動 $\{B(t)\}$ の下限過程

$$\text{(7)} \qquad L(t)\equiv 0 \text{ if } t<\tau_0; \quad \equiv -\min\{B(s) : \tau_0 \le s \le t\} \text{ if } t \ge \tau_0,$$

で $\{B^{(1)}(t)\}$ の local time になっている. $\delta(y:a)$ は a に質量を持つデルタ関数である.

しかし $n\ge 3$ の場合,

(i) $p^{(n)}$ の具体型はどうなるのか?

[1] kunio@comp.metro-u.ac.jp ; 都立大学数学教室, 〒 192-0397 八王子市南大沢 1-1

(ii) $p^{(n)}$ を推移確率密度とする Brown 運動は存在するのか?

(iii) もし存在すれば, それらの Brown 運動の挙動はどうなるのか?

と言うことは知られていない. この設問に解答することが, 我々の目的である.

II. 前回のシンポジウムでは, 我々は以下の報告を行った.

定義 1. 質点が a にあるデルタ関数 $\delta(y:a)$ の超関数の意味での k 階導関数を $\partial_y^k\delta(y:a)$ と表記する. 超関数 $p^{(n)}$ を次で定義する:

$$
\begin{aligned}
\text{(8)}\qquad & p^{(2m-1)}(t,x,y)\,dy = p^{(1)}(t,x,y)\,dy \\
&\quad + \sum_{k=1}^{m-1}\Big(\int_0^t \mathbf{P}_x[\tau_0\in ds]\,\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{(t-s)^{k-1/2}}{(2k-1)!!}\Big)\,\partial_y^{2k-1}\delta(y:0)\,dy, \quad m\ge 1,\\
\text{(9)}\qquad & p^{(2m)}(t,x,y)\,dy = p^{(2)}(t,x,y)\,dy \\
&\quad + \sum_{k=1}^{m-1}\Big(\int_0^t \mathbf{P}_x[\tau_0\in ds]\,\frac{(t-s)^{k}}{(2k)!!}\Big)\,\partial_y^{2k}\delta(y:0)\,dy, \quad m\ge 1. \quad \diamondsuit
\end{aligned}
$$

定理 2 (解の存在と一意性). 初期関数 $\varphi\in\mathcal{C}_b^\infty(\mathbf{R}_+)$ にたいし,

$$u^{(n)}(t,x)\equiv\int_0^\infty dy\;p^{(n)}(t,x,y)\;\varphi(y)$$

とおくと, この $u^{(n)}$ は [n 階境界値-初期値問題] の一意解である. $\diamondsuit$

注意 3. $n\ge 2$ で有効となる条件 (1d)[2] を落とすと, 解の一意性が成立しない. その反例を提出する. なお, この (1d) が自然な条件である事を IV で述べる.

(i) $u^{(0)}$ を [0 階境界値-初期値問題] の解とする:

$$u^{(0)}(t,x)\equiv\int_0^t dy\;p^{(0)}(t,x,y)\;\varphi(y)=\mathbf{E}_x[\varphi(B^{(0)}(t))].$$

すると簡単な計算から, 任意の自然数 m にたいし

$$\partial_x^{2m}u(t,0)=0,\quad t>0$$

となることが判る. つまり [$2m$ 階境界値-初期値問題] で (1d) 以外の条件は満たしている.

(ii) $k=1,\cdots,m-1$ とすると, [$2k$ 階境界値- 初期値問題] の解 $u^{(k)}$ は [$2m$ 階境界値- 初期値問題] で (1d) 以外の条件を全て満たしている. そこで $u^{(k)}$ の適当な線形結合を考えると, 一意性を保証するためには (1d) のどの項も落とせないことが判る.

また [$2m-1$ 階境界値-初期値問題] の場合も, 同様. $\diamondsuit$

さて前回の報告では, この基本解 $p^{(n)}$ に対応する Brown 運動の存在も述べたが, その構成方法に曖昧な点があったので, 今回はその修正部分を報告する.

III. $n\ge 3$ では基本解 $p^{(n)}$ の右辺にはデルタ関数の導関数 $\partial_y^k\delta(y:0)\,dy$ が現れる. そのため $p^{(n)}(t,x,y)\,dy$ は $\mathcal{C}_b(\mathbf{R}_+)$ 上の連続な線形汎関数すなわち測度にはならず, 通常の意味では $p^{(n)}\,dy$ を推移確率とする確率過程は存在しない.

そこで我々は, “超関数値 Brown 運動” を考えることになるが, その状態空間 $\mathbb{S}^{(n)}$ を指定しよう.

[2] PDE では, この種の条件を *the consistency condition* と呼ぶ.

定義 4. (i) デルタ関数およびその導関数が張る空間 $\mathbb{S}^{(n)}$ を次のように定義する:

$$
(10)\quad
\begin{aligned}
&\mathbb{S}^{(2m-1)} \equiv \{S = \delta(y:x_0) + \sum_{k=1}^{m-1} x_k\, \partial_y^{2k-1}\delta(y:0) : x_0, x_1, \cdots, x_{m-1} \in \mathbf{R}_+\},\\
&\mathbb{S}^{(2m)} \equiv \big\{S = \delta(y:x_0) + \sum_{k=1}^{m-1} x_k\, \partial_y^{2k}\delta(y:0) : x_0, x_1, \cdots, x_{m-1} \in \mathbf{R}_+\big\}.
\end{aligned}
$$

(ii) 空間 $\mathbb{S}^{(2m-1)}$, $\mathbb{S}^{(2m)}$ の元 S は, m 個の実数の組 $\mathbf{x} = \big(x_0, x_1, \cdots, x_{m-1}\big) \in {\mathbf{R}_+}^m$ と 1:1 に対応している. そこで今後は, 超関数 $S \in \mathbb{S}^{(2m-1)}$ or $\mathbb{S}^{(2m)}$ を実数 $\mathbf{x} \in {\mathbf{R}_+}^m$ と同一視する. ◇

まず $\mathbf{R}^m$ の右半空間

$$
(11)\quad
\begin{aligned}
&\mathbf{D} \equiv \mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}^{m-1} = \{x = (x_0, x_1, \cdots, x_{m-1}) : x_0 \geq 0\} \supset {\mathbf{R}_+}^m,\\
&\mathbf{\Gamma} \equiv \{x \in \mathbf{D} : x_0 = 0\} = \ \mathbf{D}\ \text{の境界}
\end{aligned}
$$

の値をとる確率過程

$$
(12)\quad
\begin{aligned}
&\mathbf{X}^{(2m-1)}(t) = \big(X_0^{(2m-1)}(t), X_1^{(2m-1)}(t), \cdots, X_{m-1}^{(2m-1)}(t)\big),\\
&\mathbf{X}^{(2m)}(t) = \big(X_0^{(2m)}(t), X_1^{(2m)}(t), \cdots, X_{m-1}^{(2m)}(t)\big)
\end{aligned}
$$

を与えよう.

<u>$n = 2m-1$ の場合</u>: $\mathbf{X}^{(2m-1)}(0) = (x_0, x_1, \cdots, x_{m-1}) \in \mathbf{D}$ とする. $\{B^{(1)}(t)\}$ を $x_0 \in \mathbf{R}_+$ から出発する reflecting Brownian motion (4), $\{L(t)\}$ をその local time (7) として

$$
(13)\quad
\begin{aligned}
&X_0^{(2m-1)}(t) \equiv B^{(1)}(t) = B(t) + L(t),\\
&X_1^{(2m-1)}(t) \equiv x_1 + L(t),\\
&X_k^{(2m-1)}(t) \equiv x_k + \frac{1}{2}\int_0^t ds\ X_{k-1}^{(2m-1)}(s), \quad k = 2, \cdots, m-1.
\end{aligned}
$$

<u>$n = 2m$ の場合</u>: $\mathbf{X}^{(2m)}(0) = (x_0, x_1, \cdots, x_{m-1}) \in \mathbf{D}$ とする. $\{B^{(2)}(t)\}$ を $x_0 \in \mathbf{R}_+$ から出発する stopped Brownian motion (5) として

$$
(14)\quad
\begin{aligned}
&X_0^{(2m)}(t) \equiv B^{(2)}(t) = B(t \wedge \tau_0),\\
&X_1^{(2m)}(t) \equiv x_1 + \frac{1}{2}\int_0^t ds\ I_{\{0\}}\big(X_0^{(2m)}(s)\big) = x_1 + \frac{t - t\wedge\tau_0}{2},\\
&X_k^{(2m)}(t) \equiv x_k + \frac{1}{2}\int_0^t ds\ X_{k-1}^{(2m)}(s), \quad k = 2, \cdots, m-1.
\end{aligned}
$$

拡散過程の一般論に従うと, この $\{\mathbf{X}^{(n)}(t)\}$ がどのような確率過程か簡単に判る.

命題 5. (13, 14) で与えられた $\{\mathbf{X}^{(n)}(t)\}$ は $\mathbf{D}$ 上の拡散過程である. ◇

$\mathbf{D}$ の元は, 定義 4 (ii) により $\mathbb{S}^{(n)}$ の元に対応するので, $\{\mathbf{X}^{(n)}(t)\}$ から $\mathbb{S}^{(n)}$ 値 Brown 運動 $\{\mathbb{B}^{(n)}(t)\}$ が自然に得られる:

$$
(15)\quad
\begin{aligned}
&\mathbb{B}^{(2m-1)}(t) \equiv \delta\big(y : X_0^{(2m-1)}(t)\big) + \sum_{k=1}^{m-1} X_k^{(2m-1)}(t)\ \ \partial_y^{2k-1}\delta(y:0),\\
&\mathbb{B}^{(2m)}(t) \equiv \delta\big(y : X_0^{(2m)}(t)\big) + \sum_{k=1}^{m-1} X_k^{(2m)}(t)\ \ \partial_y^{2k}\delta(y:0).
\end{aligned}
$$

任意の実数値関数 $\varphi \in \mathcal{C}_b^\infty(\mathbf{R}_+)$ にたいし, $\{\langle \mathbb{B}^{(n)}(t), \varphi\rangle, t \geq 0\}$ は実数値拡散過程となるが, $\{\mathbb{B}^{(n)}(t)\}$ を " $p^{(n)}\,dy$ に対応する Brown 運動" と呼ぶことを正当化する.

定理 6. $x_0 \geq 0$ とする. $\mathbb{B}^{(n)}(0) = \delta(y : x_0)$ から出発する $\{\mathbb{B}^{(n)}(t)\}$ にたいし, 次の等式が成立する:

$$\mathbf{E}^{(x_0,0,\cdots,0)}\big[\langle \mathbb{B}^{(n)}(t), \varphi\rangle\big] = \int dy\; p^{(n)}(t, x_0, y)\; \varphi(y), \quad t > 0,\; x_0 \in \mathbf{R}_+.$$

ここで $\mathbf{E}^{(x_0,0,\cdots,0)}[\,\cdot\,]$ は, $\mathbf{X}^{(n)}(0) = (x_0, 0, \cdots, 0)$ から出発したことを示す. $\diamondsuit$

IV. 定理 2 の証明で, 解の存在は直接の計算で示される. ここでは解の一意性が, 我々の $\{\mathbb{B}^{(n)}(t)\}$ を使うと簡単に得られることを説明し, 同時に高階境界値問題に特有な条件 (1d) の意味を明らかにする.

命題 7. $\psi(t,x)$ は $(t,x) \in [0,\infty) \times \mathbf{R}_+$ の滑らかな関数で (2) の有界条件を満たしている. $\langle \mathbb{B}^{(n)}(t), \psi(t,*)\rangle$ に Ito の公式を適用すると次の結果が得られる.

$$\begin{aligned}
&\langle \mathbb{B}^{(2m-1)}(t), \psi(t,*)\rangle - \langle \mathbb{B}^{(2m-1)}(0), \psi(0,*)\rangle = \int_0^t ds\; \langle \mathbb{B}^{(2m-1)}(s), \big(\partial_s\psi + \frac{1}{2}\partial_x^2\psi\big)(s,*)\rangle \\
&\qquad + \int_0^t dB(s)\; \partial_x\psi(s, B^{(1)}(s)) + \frac{1}{2}\int_0^t ds\, X_{m-1}^{(2m-1)}(s)\; \partial_x^{2m-1}\psi(s,0), \\
&\langle \mathbb{B}^{(2m)}(t), \psi(t,*)\rangle - \langle \mathbb{B}^{(2m)}(0), \psi(0,*)\rangle = \int_0^t ds\; \langle \mathbb{B}^{(2m)}(s), \big(\partial_s\psi + \frac{1}{2}\partial_x^2\psi\big)(s,*)\rangle \\
&\qquad + \int_0^{t\wedge\tau_0} dB(s)\; \partial_x\psi(s, B(s)) - \frac{1}{2}\int_0^t ds\; \frac{1}{2} X_{m-1}^{(2m)}(s)\; \partial_x^{2m}\psi(s,0). \quad \diamondsuit
\end{aligned}$$

いま $\varphi \in \mathcal{C}_b^\infty(\mathbf{R}_+)$ を初期関数とした $[2m-1$ 階境界値-初期値問題 $]$ の解を $u(t,x)$ とする. $T > 0$ を任意に固定し, $\psi(t,x) = u(T-t, x)$ にたいし 命題 7 を適用すると

$$\langle \mathbb{B}^{(2m-1)}(t), u(T-t,*)\rangle - \langle \mathbb{B}^{(2m-1)}(0), u(T,*)\rangle, \quad 0 \leq t < T \tag{16}$$

は有限な martingale である. (16) の両辺の平均をとる,

$$\begin{aligned}
u(T,x) &= \mathbf{E}^{(x,0,\cdots,0)}\big[\langle \mathbb{B}^{(2m-1)}(0), u(T,*)\rangle\big] = \mathbf{E}^{(x,0,\cdots,0)}\big[\langle \mathbb{B}^{(2m-1)}(t), u(T-t,*)\rangle\big] \\
&= \mathbf{E}_x[u(T-t, B^{(1)}(t))] + \sum_{k=1}^{m-1} \mathbf{E}^{(x,0,\cdots,0)}\big[X_k^{(2m-1)}(t)\big]\; \partial_x^{2k-1} u(T-t, 0)
\end{aligned} \tag{17}$$

ここで $t \to T$ とすると, (1c) より $\mathbf{E}_x[u(T-t, B^{(1)}(t))] \to \mathbf{E}_x[\varphi(B^{(1)}(t))]$ となるが, とくに (1d) から $\partial_x^{2k-1} u(T-t,0) \to \partial_x^{2k-1}\varphi(0)$, $k = 1, 2, \cdots, m-1$, である. 結局,

$$\begin{aligned}
\lim_{t\to T}\; (17) &= \mathbf{E}_x[\varphi(B^{(1)}(T))] + \sum_{k=1}^{m-1} \mathbf{E}^{(x,0,\cdots,0)}\big[X_k^{(2m-1)}(T)\big]\; \partial_x^{2k-1}\varphi(0) \\
&= \int dy\; p^{(2m-1)}(T, x, y)\; \varphi(y).
\end{aligned}$$

となり, 解の一意性が証明できる. なお $n = 2m$ の場合も同様な議論が成立する.

定常過程の標準表現について

笠原 雪夫 （東京大・情報理工学系研究科）

複素 Hilbert 空間 $H = L^2(\mathbf{R}, d\Delta(\xi))$ を考える。ただし Δ は非減少な奇関数で $\int_{-\infty}^{\infty}(\xi^2+1)^{-1}d\Delta(\xi) < \infty$ を満たす。また H の内積とノルムはそれぞれ $(f,g) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)\overline{g(\xi)}d\Delta(\xi)$、$\|f\| = (f,f)^{1/2}$ とする。

$$X(t) = X(t,\xi) = \int_0^t e^{-iu\xi}du \left(= \frac{e^{-it\xi}-1}{-i\xi}\right)$$

とおいて、$X = (X(t) : t \in \mathbf{R})$ を H の中の $X(0)=0$ なる定常増分過程と見なす。$\Delta(\infty-) < \infty$ のときは、上の $X(t)$ の代わりに $X(t) = X(t,\xi) = e^{-it\xi}$ とおいて、$X = (X(t) : t \in \mathbf{R})$ を H の中の定常過程と見なす。どちらの場合でも

$$H_I = \text{c.l.s.}\{\xi^{-1}(e^{-it\xi}-1) : t \in I\} \qquad (I \subset \mathbf{R})$$

と書く。この設定は $E[\mathbf{X}(t)\mathbf{X}(s)] = (X(t), X(s))$ $(t, s \in \mathbf{R})$ を満たす平均 0 、平均連続な実定常 (増分) Gauss 過程 $\mathbf{X} = (\mathbf{X}(t) : t \in \mathbf{R})$ を念頭に置いている。

さて、Hida(1960) による Gauss 過程の標準表現の理論から、$(\mathbf{X}(t) : t \geq 0)$ の新生過程の存在が分かる。ここでは、その新生過程の H における類似物を Krein(1954) による定常 (増分) 過程の予測理論を使って構成する。定義に必要な記号を用意しよう。Δ に対して、Krein の対応で定まる string を lmk と書く；m は $0 \leq x \leq l(\leq \infty)$ 上の右連続非減少関数で $m(0-) = 0$、$0 < m(x) < \infty$ $(0 < x < l)$、$0 \leq k \leq \infty$ は定数。A、B は次で定まる関数：

$$A(x,\xi) = 1 - \xi^2 \int_0^x dy \int_{0-}^y A(z,\xi)dm(z), \quad B(x,\xi) = \xi \int_{0-}^x A(y,\xi)dm(y)$$

$(-\frac{d}{dm}\frac{d}{dx}A = \xi^2 A)$。$dm(x) = m'(x)dx + dm^\bullet(x)$、$T(x) = \int_0^x \sqrt{m'(x)}dx$ として

$$\begin{aligned} S_0 = &\{x \in [0, l+k] \,|\, T(y) = T(x) \text{ for some } y \neq x\} \\ &\cup \{x \in [0,l] \,|\, m(x) - m(x-) > 0\} \cup \{0\} \cup \{l\} \end{aligned}$$

とおく。更に次を満たす可測集合 S_1、S_2 をとる：$S_1 \cup S_2 = [0,l]$、$S_0 \subset S_1 \cup [l, l+k]$、

$$\int_{U\cap S_1} m'(x)dx = \int_{U\cap S_2} dm^\bullet(x)dx = 0 \qquad (U : \text{ measurable set}).$$

このとき (必要があれば m' を取り直して) $m'(x) = 0$ $(x \in S_1)$, > 0 $(x \in S_2)$ で、$S = [0, l+k] \setminus S_0$ とおけば $m'(x) > 0$ $(x \in S)$。最後に、$t \geq 0$ に対して

$$x(t) = \text{the smallest root } x \in [0,l] \text{ of } t = 2\int_0^x \sqrt{m'(y)}dy.$$

さて、$(W(t):t\geq 0)$ を次で定義する：

$$W(t)=W(t,\xi)=\int_{[0,x(t)]\cap S}e^{-i\xi T(x)}\{A(x,\xi)-i\,m'(x)^{-1/2}B(x,\xi)\}dm(x).$$

これは、H の中の直交増分過程と見なせる (独立増分を持つ Gauss 過程と思う)：

$$(W(t),W(s))=\pi\int_{[0,x(t)\wedge x(s)]\cap S}dm(x).$$

$G_0=\cap_{\varepsilon>0}H_{[0,\varepsilon]}$、$G_t=\cap_{\varepsilon>0}H_{[0,t+\varepsilon]}\ominus H_{[0,t]}$ $(t>0)$ のとき $\Lambda=\{t\geq 0\,|G_t\neq\{0\}\}$ は高々可算集合。$t_k\in\Lambda$ に対して $N_k(\leq\infty)$ 次元部分空間 G_{t_k} の正規直交基底 $W_{kl}:l=1,\ldots,N_k$ をとる (W_{kl} たちを互いに独立な標準 Gauss 分布に従う確率変数と思う)。そして $W_{kl}(t)=1_{(t_k,\infty)}(t)W_{kl}$ とおく。このとき

Theorem. 上で定めた $(W(t),W_{kl}(t):t\geq 0,t_k\in\Lambda,l=1,\ldots,N_k)$ は次の意味で $(X(t):t\geq 0)$ の新生過程である：

$$H_{[0,t]}=\text{c.l.s.}\{W(u),W_{kl}(u);0\leq u\leq t,t_k\in\Lambda,l=1,\ldots,N_k\}.$$

特に、$(X(t):t\geq 0)$ の標準表現における連続重複度は 0 または 1 である。

Corollary. $dm(x)=m'(x)dx$、$m(x)>0$ $(x>0)$ のとき、且つそのときに限り次を満たす $(W(t):t\geq 0)$ が存在する：$(W(t),W(s))=t\wedge s$、

$$H_{[0,t]}=H_{\{0\}}\oplus\text{c.l.s.}\{W(u):0\leq u\leq t\}.$$

以下、Corollary の場合を考える。(H の中の Brown 運動) $W(t)$ は次で定まる：

$$W(t)=W(t,\xi)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{x(t)}e^{-i\xi T(x)}E(x,\xi)m'(x)^{1/2}dx.$$

ただし、$E(x,\xi)=m'(x)^{1/4}A(x,\xi)-i\,m'(x)^{-1/4}B(x,\xi)$ (de Branges の整関数)。このとき、$t=2\int_0^x\sqrt{m'(y)}dy$ より、この $W(t)$ を次の様に書くこともできる：

$$W(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^t e^{-iu\xi}F(u,\xi)du,\quad F(t,\xi)=e^{i\xi T(x)}E(x,\xi)$$

(関数 F は Szegö の直交多項式の類似)。また、$m'(x)^{1/4}=E(x,0)=F(t,0)$ から

$$m(x)=m(0)+\frac{1}{2}\int_0^t F(u,0)^2du,\quad x=\frac{1}{2}\int_0^t\frac{1}{F(u,0)^2}du.$$

$m(0)=\pi/\int_{-\infty}^{\infty}d\Delta(\xi)\in[0,\infty)$ なので、Δ から (m を経由せずに) 直接 $F(t,0)$ を知るとき、これら 2 式の意味で $m(x)$ が得られる。講演では、その例として、鏡映正値的定常過程の $F(t,0)$ の AR(∞)、MA(∞) 係数を用いた表現を紹介する予定。

The Malliavin calculus for stochastic flows of interacted particles

小松　孝　（大阪市大・理）

$\mu(du)$ は $(\boldsymbol{R}^d, \mathcal{B}(\boldsymbol{R}^d))$ 上の $\int |u|^p \, \mu(du) < \infty$ $({}^\forall p > 1)$ をみたす確率測度とし, Hilbert 空間 $\mathcal{H} := (L^2(\boldsymbol{R}^d, \mathcal{B}(\boldsymbol{R}^d), \mu))^N \ni \boldsymbol{x} = (x^u)$ を考える. $\boldsymbol{R}^N$- 値関数 $a_0(x,y), a_\theta(x)$ は $x, \ y \in \boldsymbol{R}^N$ について滑らかで, $\partial_x a_0(x,y)$, $\partial_y a_0(x,y)$ および $\partial_x a_\theta(x)$, $\partial_x^2 a_\theta(x) a_\theta(x)$ の任意階の導関数は全て有界とする. $\nu(d\theta)$ は離散空間 Θ 上の有限測度で, $\Omega = C([0,T] \to \boldsymbol{R}^\Theta) \ni \omega = (\beta_t^\theta(\omega))$, $\mathcal{F}_t = \sigma(\beta_s^\theta \ ; \ s \le t, \theta \in \Theta)$ とし, P は $(\Omega, \mathcal{F}_T)$ 上の Wiener 測度とする. $\boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{x}(t, \boldsymbol{x}_0) = (x^u(t))$ を $\boldsymbol{R}^N$ 上の相互作用を持つ SDE の系

$$dx^u(t) \ = \ \left[\int a_0(x^u(t), x^v(t)) \ \mu(dv)\right] \ dt + \int \nu(d\theta) \ a_\theta(x^u(t)) \circ d\beta_t^\theta \qquad (u \in \boldsymbol{R}^d)$$

の初期条件 $\boldsymbol{x}(0) = \boldsymbol{x}_0 \in \mathcal{H}$ に対する解とする. $(1 + |u|^2)|\partial_u^\nu x_0^u|$ が有界であると仮定し,

$$\mathcal{E}^q(r) = \{ \ \boldsymbol{x} \in \mathcal{H} \mid \|\boldsymbol{x}\|_{\mathcal{E}^q} := \sup_{|\nu| \le q} \sup_u \ |\partial_u^\nu x^u| < \infty \ \}$$

とおく. このとき $E_P[\ \sup_{t \le T} (\|\boldsymbol{x}(t)\|_{\mathcal{E}^q})^p \ ] < \infty$ $({}^\forall p, \ q \ge 1)$ が成り立つ.

$D = (D_v) = (\partial_{x^v})$ を $\mathcal{H}$ 上の Fréchet 微分作用素とし, 次のベクトル場を考える.

$$\boldsymbol{A}_0(\boldsymbol{x}) = A_0^u(\boldsymbol{x}) D_u = \int \mu(dw) \ a_0(x^u, x^w) D_u, \quad \boldsymbol{A}_\theta(\boldsymbol{x}) = A_\theta^u(\boldsymbol{x}) D_u = a_\theta(x^u) D_u$$

$\mathcal{H} \otimes \mathcal{H}-$ 値の確率過程 $DA_\theta(\boldsymbol{x}) = (D_v A_\theta^u(\boldsymbol{x}))$ を用いて, $\mathcal{H} \otimes \mathcal{H}-$ 値の確率微分形式

$$dZ(t) \equiv dZ(t, \boldsymbol{x}_0) = DA_0(\boldsymbol{x}(t)) \ dt + \int \nu(d\theta) DA_\theta(\boldsymbol{x}(t))(\circ d\beta_t^\theta)$$

を定義し, 方程式 $dU(t) = -U(t) \circ dZ(t)$, $dV(t) = (\circ dZ(t))V(t)$, $U(0) = V(0) = I$ によって $\mathcal{H} \otimes \mathcal{H}-$ 値の確率過程 $U(t) = U(t, \boldsymbol{x}_0)$, $V(t) = V(t, \boldsymbol{x}_0)$ を定義する. SDE

$$(dX_t, dY_t) = \left(\int \nu(d\theta) \ a_\theta(X_t) \circ d\beta_t^\theta, \int \nu(d\theta) \ \partial_x a_\theta(X_t) \ Y_t \circ d\beta_t^\theta\right)$$

で定義される $\boldsymbol{R}^{N+N^2}$ 上の確率流 (X_t, Y_t) と $\mathcal{H}$ 上の常微分方程式を用いて, $(\boldsymbol{x}(t), U(t))$ を与えることにより, $U(t)V(t) = V(t)U(t) = I$ が示される. 更に, 時間反転の Brown 運動 $\hat{\beta}_t = (\beta_{T-t}^k - \beta_T^k)$ を用いた確率微分方程式

$$dy^u(t) \ = \ -A_0^u(\boldsymbol{y}(t)) \ dt + \int \nu(d\theta) A_\theta^u(\boldsymbol{y}(t)) \circ d\hat{\beta}_t^k \quad (u \in \boldsymbol{R}^d), \quad \boldsymbol{y}(0) = \boldsymbol{z} \in \mathcal{H}$$

の解を $\boldsymbol{y}(t) = \hat{\boldsymbol{x}}(t, \boldsymbol{z})$ と表し, この時間反転に呼応する確率微分形式 $d\hat{Z}(t, \boldsymbol{z})$ を用いて, 上と同様に $\mathcal{H} \otimes \mathcal{H}-$ 値の確率過程 $\hat{U}(t, \boldsymbol{z})$, $\hat{V}(t, \boldsymbol{z})$ を定義するとき, 次のことが成り立つ.

補題　任意の $\boldsymbol{x}_0 \in \mathcal{H}$ に対して, a.a. ω (P) で次の関係式が成立する.

$$^\forall t \le T,\quad \hat{\boldsymbol{x}}(t, \boldsymbol{x}(T, \boldsymbol{x}_0)) = \boldsymbol{x}(T-t, \boldsymbol{x}_0),\quad U(T, \boldsymbol{x}_0)\hat{U}(t, \boldsymbol{x}(T, \boldsymbol{x}_0)) = U(T-t, \boldsymbol{x}_0).$$

射影 $\pi : \mathcal{H} \longrightarrow \boldsymbol{R}^M$ の微分を $\partial\pi$ で表す. M 次元確率変数 $\pi(\boldsymbol{x}(T))$ の分布の滑らかさについて考察する. 上の補題や [1] の " Key Lemma" を用いて, [2] の手順に沿って $\mathcal{H}$ 上の stochastic flow $\boldsymbol{z} \to \boldsymbol{x}(t, \boldsymbol{z})$ に対する Malliavin 解析を行い,「偏 Hörmander 条件」のもとでの「部分積分公式」が示される.

$\mathcal{H}$ 上のベクトル場 $\boldsymbol{\Phi} = \phi^u(\boldsymbol{x}) \cdot D_u$ に対して, $\phi(\boldsymbol{z})$ を $\langle \boldsymbol{\Phi} \rangle(\boldsymbol{z})$ で表すことにする. また, $\theta^0 \in \Theta \setminus \{0\}$ と $\theta^1, \theta^2, \cdots \in \Theta \cup \{0\}$ について次のように定義する.

$$\boldsymbol{A}_{\theta^0\theta^1\cdots\theta^{j-1}\theta^j} = [\boldsymbol{A}_{\theta^j}, [\boldsymbol{A}_{\theta^{j-1}}, [\ \cdots, [\boldsymbol{A}_{\theta^1}, \boldsymbol{A}_{\theta^0}]\ \cdots]]]$$

$$\hat{\nu}(d\theta^0 d\theta^1 \cdots d\theta^j) = \nu(d\theta^0)\ \{I(0 \in d\theta^1) + \nu(d\theta^1)\} \cdots \{I(0 \in d\theta^j) + \nu(d\theta^j)\}$$

定理　「偏 Hörmander 条件」:　$^\exists L \ge 0,\ ^\exists \gamma > 0,\ ^\exists C > 0,\ ^\forall \lambda > 0,$

$$\inf_{|\zeta|=1}\ \inf_{\boldsymbol{z} \in \mathcal{E}^1(\lambda)} \sum_{j=0}^{L} \int (\zeta \cdot (\partial\pi)\langle \boldsymbol{A}_{\theta^0\cdots\theta^j} \rangle(\boldsymbol{z}))^2\ \hat{\nu}(d\theta^0 \cdots d\theta^j)\ \ge\ C\ \lambda^{-\gamma}$$

が満たされるならば, 確率変数 $\pi(\boldsymbol{x}(T))$ の分布は滑らかな密度関数を持つ.

上の定理を応用して, 確率流 (random map) による滑らかな測度の伝播についての定理が得られる (cf. [3]). 状態空間 $\mathcal{S} = L^2(\boldsymbol{R}^d, \mathcal{B}(\boldsymbol{R}^d), \tilde{\mu})^d$ 上の, 滑らかな係数の, ある確率微分方程式で記述される確率流 $\boldsymbol{R}^d \ni u \longrightarrow \eta_t(u) \in \boldsymbol{R}^d$ に対して, 性質

$$\wp\ :\ \ \tilde{\mu}(du)/du \in C_0^\infty(\boldsymbol{R}^d) \quad \Longrightarrow \quad \tilde{\mu}({\eta_T}^{-1}(du))/du \in C^\infty(\boldsymbol{R}^d)$$

について考える. $\zeta_t(u) = \partial_u\ \eta_t(u)$ と置き, λ_d を d 次元 Lebesgue 測度とするとき, 性質 $\wp$ がみたされるための十分条件は, $\zeta_T(\cdot)$ の分布の密度関数の存在性:

$$(\lambda_d \otimes P)({\zeta_T}^{-1}(d\zeta))\ \ll\ \lambda_{d^2}(d\zeta)$$

に帰着させられる. この条件を具体化するために, $du \ll \mu(du)$ を仮定し, $N = d + d^2$, $M = d^2$, $J \in \boldsymbol{R}^M \otimes \boldsymbol{R}^N$, $r \in \boldsymbol{R}^d$ とし, 射影 $\pi^r : \mathcal{H} \ni \boldsymbol{x} = (x^u) \longrightarrow Jx^r \in \boldsymbol{R}^M$ と確率過程 $\boldsymbol{x}(t) = (x^u(t)) = (\eta_t(u), \zeta_t(u))$ に対して上の定理を適用する.

References

[1] T. Komatsu, A. Takeuchi : *On the smoothness of pdf of solutions to SDE of jump type*, International J. Differential Eq. Appl. **2** (2001), 141-197.

[2] T. Komatsu : *On the Malliavin calculus for SDE's on Hilbert spaces*, Acta Applicandae Mathematicae **78** (2003), 223-232.

[3] A. Yu. Pilipenko : *Stationary measure-valued processes generated by a flow of interacted particles*, Probability Theory and Mathematical Statistics, (Proceedings of Ukrainian Math. Congress - 2001), Kyiv, 2002, 59-72.

Wiener 空間上の確率微分方程式の解の分布の絶対連続性について

部家直樹　(東京大学数理科学研究科)

(B, H, μ) を抽象 Wiener 空間とする．すなわち，B を可分 Banach 空間，H を B に連続かつ稠密に埋め込まれた可分 Hilbert 空間，μ を B 上の Gauss 測度で

$$\int_B e^{\sqrt{-1}\langle x,\phi\rangle}\mu(dx) = \exp\Big\{ -\frac{1}{2}|\phi|_H^2 \Big\}, \; \phi \in B^*$$

を満たすものとする．また，$\mathcal{B}(B)$ を B の位相的 Borel 集合体とする．

次の確率微分方程式を考える．

$$\begin{aligned} dX_t &= dW_t + A(X_t)dW_t + b(X_t)dt, \; 0 \le t \le 1 \\ X_0 &= 0 \end{aligned} \tag{1}$$

ここで，$x_0 \in B$，$A : B \to H \otimes H$，$b : B \to H$ は Borel 可測関数，μ_t $(t \ge 0)$ を写像 $x \mapsto \sqrt{t}x$ による μ の像測度とし，$P_t(x, A) := \mu_t(A - x)$，　$x \in B$，$A \in \mathcal{B}(B)$ とおく．W_t はこの推移確率の定める Markov 過程である．

P を $\{P_t\}_{t\ge 0}$ の定める測度とし，$\mathbf{W} := \{w \in C([0,1] \to B); w_0 = 0\}$，$\|w\|_{\mathbf{W}} = \sup_{0\le t\le 1}|w_t|_B$ および，$\mathbf{H} := \Big\{\mathbf{h} \in \mathbf{W}; \mathbf{h}(t) = \int_0^t \dot{\mathbf{h}}(s)ds, \dot{\mathbf{h}} \in L^2([0,1], dt; H)\Big\}$，$\|\mathbf{h}\|_{\mathbf{H}} = \Big(\int_0^1 |\dot{\mathbf{h}}(t)|_H^2 dt\Big)^{1/2}$ と定めると，$(\mathbf{W}, \mathbf{H}, P)$ は再び抽象 Wiener 空間になるが，(1) の解 X_t をこの上の B-値 Wiener 汎関数とみて，X_1 の分布の μ に対する絶対連続性を考察する．その際，次の二つの仮定をおく．

(A.1) A, b はともに無限回 H-Fréchet 微分可能で，各階の H-Fréchet 導関数は連続かつ有界である．

(A.2) 各 $t > 0$ に対して $tI_H + \sigma(t) > 0$, a.s. であって，すべての $p \in (1, \infty)$ に対して

$$E\Big[|(tI_H + \sigma(t))^{-1}|_{op}^p\Big] < \infty.$$

(A.1) において，K を Hilbert 空間とし，関数 $F : B \to K$ が点 $x \in B$ で H-Fréchet 微分可能であるとは，H-S 作用素 $F'(x) : H \to K$ が存在して

$$\lim_{|h|_H \to 0} \frac{|F(x+h) - F(x) - F'(x)h|_K}{|h|_H} = 0$$

を満たすことをいう．

(A.2) において，$\sigma(t)$ は Malliavin covariance で，その i, j 成分が

$$\Big(DX_t^i, DX_t^j\Big)_{\mathbf{H}} = t\delta_{ij} + \sigma_{ij}(t)$$

により定まる $H\otimes H$-値確率変数である．D は $\mathbf{H}-$ 微分を表す．

仮定**(A.1)** のもとで，確率微分方程式 (1) は一意解をもち，解 X_t が $\mathbf{H}$-微分可能であることを示すことができる．さらに，仮定**(A.2)** のもとで，次の部分積分の公式を導くことができる．

K を可分な Hilbert 空間とする．L を Ornstein-Uhlenbeck 半群の生成作用素とし，$W^{s,p}(K):=(I-L)^{-s/2}L^p(\mathbf{W},dP;K)$，$\|F\|_{s,p}:=\|(I-L)^{s/2}F\|_{L^p}$，$W^\infty(K):=\bigcap_{p\in(1,\infty)}\bigcap_{s\in\mathbf{R}}W^{s,p}(K)$ と定める．

命題 (部分積分の公式). G を $H\otimes K$-値過程で，各 $t\in[0,1]$ に対して $G_t\in W^\infty(H\otimes K)$ であり，ある $\tau>0$ と任意の $p\in(1,\infty)$ に対して $\sup_{\tau\le t\le 1}\|G_t\|_{k+1,p}<\infty$ を満たすものとする．このとき，K-値過程 ρ で，各 $t\in[0,1]$ に対して $\rho_t\in W^\infty(H\otimes K)$ であり，任意の $p>1$ に対して $\sup_{\tau\le t\le 1}\|\rho_t\|_{k,p}<\infty$ を満たすものが存在して，

$$E[\langle\nabla u(X_t),G_t\rangle_{H\otimes K}]=E[\langle u(X_t),\rho_t\rangle_K]$$

が任意の $u\in\mathcal{F}C_b^\infty(K)$ に対して成り立つ．

ここで，$\mathcal{F}C_b^\infty(K)$ は，B 上の K-値関数 f で，有限個からなる H の正規直交系 $e_1,\dots,e_n\in B^*$ と K の正規直交系 $k_1,\dots,k_m$，および $\tilde{f}_l\in C_b^\infty(\mathbf{R}^n)$ によって $f(x)=\sum_{l=1}^m\tilde{f}_l({}_B\langle x,e_1\rangle_{B^*},\dots,{}_B\langle x,e_n\rangle_{B^*})\,k_l$，$x\in B$ と表されるもの全体を表す．

上の部分積分の公式を用いて，次が得られる．これより，X_1 の μ に対する絶対連続性が示される．

定理． 各 $p\in(1,\infty)$ に対して，定数 $C=C_p>0$ が存在して，

$$\Big|E[f(X_1)]\Big|\le\varepsilon e^{C/\varepsilon^2}\Big\{\int_B|f(x)|^p\mu(dx)\Big\}^{1/p}+\varepsilon$$

がすべての $\varepsilon\in(0,1]$ および $\|f\|_\infty\le 1$ を満たす任意の $f\in\mathcal{F}C_b^\infty(\mathbf{R})$ に対して成り立つ．

参考文献

[1] 舟木直久，確率微分方程式 (岩波講座現代数学の基礎)，岩波書店，1997.

[2] Kusuoka, S. and Stroock, D.W., Precise asymptotics of certain Wiener Functional, *J.Funct.Anal.*, **99**(1991), 1-74.

[3] 重川一郎，確率解析 (岩波講座現代数学の展開)，岩波書店，1998.

[4] Watanabe, S., *Lectures on stochastic differential equation and Malliavin calculus*, Tata Institute of Fundamental Research, Springer-Verlag, 1984.

Coexistence results for a spatial stochastic epidemic model

今野 紀雄 (横浜国立大学工学研究院)
Rinaldo Schinazi (University of Colorado)
種村 秀紀 (千葉大学理学部)

この講演では3状態無限粒子系の共存について議論をする. 粒子系の配置空間は

$$\mathcal{X} = \{0,1,2\}^{\mathbf{Z^d}} = \{\eta : \mathbf{Z}^d \to \{0,1,2\}\}$$

で表し, 0 を空き地, 1 を樹木, 2 を火事とみなすと森林のモデル, また 0 を無人, 1 を健康な人, 2 を病気の人とみなすと伝染病のモデルとして扱うことができる. ここで扱うモデルは *spatial stochastic epidemic model* と呼ばれているものであり, 配置 $\eta \in \mathcal{X}$ のとき 各 $x \in \mathbf{Z}^d$ でつぎのような時間発展するものである:

$$\begin{aligned}
&0 \to 1 \text{ at rate } \lambda_1 n_1(x,\eta) \quad \text{(健康な人が生まれる)}\\
&1 \to 2 \text{ at rate } \lambda_2 n_2(x,\eta) \quad \text{(健康な人が病気になる)}\\
&2 \to 1 \text{ at rate } r \quad \text{(病気の人が治る)}\\
&1 \to 0 \text{ at rate } \delta_1 \quad \text{(健康な人が死ぬ)}\\
&2 \to 0 \text{ at rate } \delta_2 \quad \text{(病気の人が死ぬ)}
\end{aligned}$$

ここで $\lambda_1, \lambda_2, r, \delta_1, \delta_2 \geq 0$,

$$n_i(x,\eta) = \sum_{y:x\sim y} 1(\eta(y) = i), \quad i = 1,2$$

であり, $x \sim y$ は x と y は隣り, つまり $\sum_{j=1}^{d} |x^j - y^j| = 1$ を表している.

$r = 0$ の場合 (一度病気に罹ったら一生治らない) はとくに *Basic spatial epidemic model* と呼ばれている.

2 (病気の人) が存在しない配置から始めたとき, *spatial stochastic epidemic model* はコンタクトプロセスに他ならない. したがって d 次元コンタクトプロセスの閾値を $\lambda_c(d)$ とおくと, $\lambda_1 \leq (\delta_1 \wedge \delta_2)\lambda_c(d)$ であれば *spatial stochastic epidemic model* は死滅する, つまり 1 (健康な人) と 2 (病気の人) が有限個存在する配置から始めたとき有限の時間の後 1 も 2 もいなくなる, ことが比較定理から分かる. また $\delta_1 = \delta_2 = 0$ の場合に 0 (無人) が存在しない配置から始めたとき, *spatial stochastic epidemic model* はやはりコンタクトプロセスになる.

講演では共存性についての次の定理について説明する.

定理 1　$r>0$, $\lambda_1>0$ とする．もし $\lambda_2/r>\lambda_c(1)$ であれば $c>0$ が存在し，任意の $\delta_1,\delta_2\in[0,c)$ にたいしてつぎのことが成り立つ．
(a) 少なくとも 1 つの 1 *(健康な人)* と 2 *(病気の人)* がいる配置から始めたとき，任意の時刻で 1 も 2 も生き残る *(共存する)* 確率は正である．
(b) *spatial stochastic epidemic model* の定常分布 μ で $\mu(\mathcal{X}_{CE})=1$ を満たすものが存在する．ここで

$$\mathcal{X}_{CE}=\{\eta\in\mathcal{X}:\eta(x)=1,\eta(y)=2\ \textit{for some}\ x,y\in\mathbf{Z}^d\}.$$

定理 2　$r>0$, $\lambda_2>0$ とする．もし $\delta_2>\lambda_2/\lambda_c(d)-r$ であればつぎのことが成り立つ．
(a) 2 *(病気の人)* が有限個存在する配置から始めたとき，2 は有限の時間の後にいなくなる．
(b) *spatial stochastic epidemic model* の任意の定常分布 μ は $\mu(\mathcal{X}_{CE})=0$ を満たす．

Basic spatial epidemic model ($r=0$ の場合) では 1 次元の場合には共存が常に起こらないことが証明されており ([1, 3]), $r>0$ での場合に共存が起こるという定理 1 の結果と大きく異なる．多次元の場合には *Basic spatial epidemic model* において共存がおこるかどうかは厳密には証明されていない．

参考文献

[1] E. Andjel and R.B. Schinazi, A complete convergence theorem for an epidemic model, *Journal of Applied Probability* **33** (1996) 741-748.

[2] N. Konno, R. Schinazi and H. Tanemura, Coexistence results for a spatial stochastic epidemic model to appear in *Markov Process. Related Fields* .

[3] D. Mollison, Spatial contact models for ecological and epidemic spread, *J.R. Statistical Soc. B***39** (1977) 283-326.

Random sequential packing of rods

Yukinao ISOKAWA,
Faculty of Education, Kagoshima University, *

We study two 'simple' random sequential rod packing problems, and ask the following questions:

- What is the packing density of randomly packed rods? Does it differ from that of regular packing of rods?
- Are the axes of randomly packed rods statistically isotropic? Or do they have tendency to be concentrated on a paricular direction?

1 3 axes rod packing

Let us consider a rectangular parallelepiped of side length a, b, c. Penetrating it, we pack rectangula rods with infinite height at random and sequentially until no more rod can be packed. We impose two assumptions. First we assume that

(A1) axes of rods are parallel to the x-axis or y-axis or z-axis.

We call these three types of rods by x-rods or y-rods or z-r ods respectively, and denote the numbers of x-rods, y-rods and z-rods by N_x, N_y and N_z respectively.
Now, for any x-rod, we consider its intersection with a face of the above solid which is contained in the yz-plane. Then the intersection is the square $[y, y+1] \times [z, z+1]$. In this case we say that the x-rod has coordinates (y, z). Thus any x-rod can be uniquely specified by coordinates (y, z). Similarly any y-rod can be uniquely specified by coordinates (z, x), and z-rod by coordinates (x, y). Then our second assumption is as follows:

(A2) all coordinates of rods are integers

To state our results, consider a system $(*)$ of ordinary differential equations under the initial conditions

$$\xi_1(0) = \eta_1(0) = \zeta_1(0) = \xi_2(0) = \eta_2(0) = \zeta_2(0) = 0 .$$

*isokawa@edu.kagshima-u.ac.jp, http://w3-math.edu.kagshima-u.ac.jp/ fractaro

$$
(*)\begin{cases}
\dfrac{d\xi_1}{dt} &= \lambda(1-\xi_1-\xi_2)(1-\eta_1) \\
\dfrac{d\eta_1}{dt} &= \mu(1-\eta_1-\eta_2)(1-\zeta_1) \\
\dfrac{d\zeta_1}{dt} &= (1-\zeta_1-\zeta_2)(1-\xi_1) \\
\dfrac{d\xi_2}{dt} &= \mu(1-\xi_1-\xi_2)(1-\zeta_2) \\
\dfrac{d\eta_2}{dt} &= (1-\eta_1-\eta_2)(1-\xi_2) \\
\dfrac{d\zeta_2}{dt} &= \lambda(1-\zeta_1-\zeta_2)(1-\eta_2)
\end{cases}
$$

Then, using the solution of the above system, we obtain the following result.

Theorem 1 *If a, b, c tend to ∞ while preserving $b/a = \lambda, c/a = \mu$, then $E(N_x)/a^2$ goes to $\lambda\,\mu\,\eta_1(\infty)\zeta_2(\infty)$.*

Corollary 1 *As $a = b = c \to \infty$, all $E(N_x), E(N_y), E(N_z)$ are asymptotically equal to $a^2/4$ and thus the packing density is asymptotically equal to $3/4$.*

2 4 axes rod packing

Consider a regular tetrahedron. Penetrating it, we pack hexagonal rods at random and sequentially until no more rod can be packed. As in the case of 3 axes rod packing, we suppose two assumptions. First,

(A1) axes of rods are parallel to any of the normal vectors of four faces of the tetrahedron.

We call these four types of rods by A-rods or B-rods or C-rods or D-rods respectively.

Consider packing of A-rods. Since these sections are assumed to be a hexagon of the same size, we have the densest packing if these rods are packed according to the honeycomb network. Then, however, it becomes impossible to pack any B-rods or C-rods or D-rods. By such reason we assume

(A2) possible places of hexagonal sections of rods form a kind of Archimedian network

Then, a large experment shows that for infinitely large size system,

- *the packing density is* $1/2$, which is equal to half of that of the regular 4-axes rod packing.
- *the configuration of packed rods is statistically isotropic*, that is, the same number of rods are packed for each direction of four axes.

井戸型ポテンシャルを持つ確率偏微分方程式

乙部厳己

平成15年12月12日

ある領域において0で、それ以外では無限大という値を持つような自己ポテンシャルをもつ放物型の確率偏微分方程式を考える。この種の問題は、通常の熱方程式の問題としては熱制御としてよく研究されている [1, 2]。つまりある熱伝播はある熱方程式に従って起こるが、媒質中にはある条件を満たすように熱を制御する装置が仕掛けられているとする。ここではその制御は、温度がある閾値に達したときに働くものとし、さらにそれは完全制御であるとする。つまり、ある設定した温度未満になってしまうことが決して起こらない高性能装置が備えられているとする。そのような装置を含む熱伝導の様子を調べることが問題であり、いつ閾値に達するかは先天的には未知なので、これはある種の自由境界問題である。

一方確率偏微分方程式は微視的と巨視的の中間層で生じる現象を記述していると考えられる。そこでは微視的世界における雑音の影響と、巨視的世界における平滑化の影響とがともに生じ両者が均衡している。このような確率偏微分方程式で熱制御を伴うものはNualartとPardouxによって研究されている [3, 4] がそこでは片側の熱制御のみを行った。つまりある温度以上になるような条件付けのもとでの考察であった。その制限を取り除き、ある範囲内に制御を加えた場合の方程式についてある程度の状況が判明したので報告したい。

1 問題設定

次のような放物型の確率偏微分方程式を考える。

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - f(x,t;u(x,t)) + \eta - \xi + \dot{W}, \quad x \in (0,1),\ t > 0, \\ u(0,t) = u(1,t) = 0, \quad t \geq 0, \\ u(x,0) = u_0(x), \quad x \in [0,1], \\ h_1(x,t) \leq u(x,t) \leq h_2(x,t), \quad (x,t) \in [0,1] \times [0,\infty), \\ \displaystyle\int_0^\infty \int_0^1 (u(x,t) - h_1(x,t))\eta(dx,dt) = \int_0^\infty \int_0^1 (h_2(x,t) - u(x,t))\xi(dx,dt) = 0, \end{cases} \tag{1}$$

但し $h_1(x,0) \leq u_0(x) \leq h_2(x,0)$ とし、$\dot{W}$ は時空間白色雑音とする。すなわち、$W(t)$ を $\mathscr{S}'$-値確率過程で再生核ヒルベルト空間として $L^2(0,1)$ をもつWiener過程（$\langle \varphi, W(t)\rangle / \|\varphi\|_{L^2}$ が任意の試験関数 φ についてBrown運動になる）とするとき、少なくとも形式的には $\dot{W} := dW(t)/dt$ である。

方程式に現れる η と ξ は $(0,1)\times(0,\infty)$ 上の正測度であって、その台はそれぞれ $u(x,t) = h_1(x,t)$ および $u(x,t) = h_2(x,t)$ となる集合に含まれる。これらが井戸型ポテンシャル（の微分）に対応することは講演中に述べる。

また熱制御が実行される点である $h_i(x,t)$ はある程度のなめらかさを持ち（$h_i \in H^1(0,T;H^1) \cap H^2(0,T;L^2)$)、$h_1(x,t) < h_2(x,t)$ かつ境界では定数で、さらに

$$\frac{\partial}{\partial t}(h_2 - h_1) \geq 0, \quad \frac{\partial^2}{\partial t^2}(h_2 - h_1) \geq 0, \quad \forall (x,t) \tag{2}$$

を満たすとする。また f は

1. $f(\cdot,\cdot;0) \in \bigcap_{T>0} L^2((0,1)\times(0,T))$ であり、$f(x,t;z)$ は (x,z) について両連続。
2. $f(\cdot,\cdot;z) - f(\cdot,\cdot;0)$ は局所有界。
3. $z \mapsto f(x,t;z)$ はすべての $(x,t) \in [0,1]\times[0,\infty)$ において Lipschitz 連続かつ単調増大。

を仮定する。単調増大条件は本質的ではないが、このとき、
定理　解 (u,η,ξ) は一意に存在する。

2 平衡状態

この熱制御下において長時間が経過したとき解 $u(x,t)$ の $C(0,1)$ における分布がどのようになるかがここでの興味である。簡単のため $h_1(x,t) = 0, h_2(x,t) = 1$ とする。

結論からいえば、解 $u(x,t)$ は閾値である 0 や 1 を嫌ってそれらの値から離れたところに分布する。すなわち次のようになる。ただし、f については適切に（平衡分布が熱制御なしでも存在するような）条件を課す。特に t には依存しないとし、$\nabla_z F(x;z) := f(x;z)$ とおく。
定理　$C(0,1)$-値拡散過程 $u(t)$ の $C(0,1)$ における平衡分布 μ は

$$\mu(d\varphi) = \frac{1}{Z}\exp\left\{-2\int_0^1 F(x;\varphi(x))\,dx\right\}\beta_{[0,1]}(d\varphi)$$

で与えられる。但し $\beta_{[0,1]}$ は 0 と 1 に吸収壁をもつ Brown 橋の分布であり、Z は規格化定数である。また F が $F(z)$ とかけていて、一様に凸ならばこれは一意な極限分布である。

参考文献

[1] A. Benssoussan and J.-L. Lions, *Applications des inéquations variationnelles en contrôle stochastique*, Dunod, 1978.

[2] G. Duvaut and J.-L. Lions, *Inequalities in mechanics and physics*, Grundlehren der mathematischen Wissenschaften 219, Springer–Verlag, 1976.

[3] D. Nualart and E. Pardoux, *White noise driven quasilinear SPDEs with reflection*, Probab. Theory Relat. Fields **93** (1992), 77–89.

[4] Y. Otobe, *Stochastic reaction diffusion equations on an infinite interval with reflection*, Stochastics Stochastics Rep. **74** (2002), 489–516.

On Path Integral for the Radial Dirac Equation

Takashi Ichinose
Department of Mathematics, Faculty of Science, Kanazawa University

Abstract. For the radial Dirac equation, a countably additive path space measure on the space of continuous paths living in the real half-line is constructed to give a path integral representation to its Green function.

Introduction. Consider the radial Dirac equation

$$\frac{\partial}{\partial t}\psi(r,t) = -i[\tau_k + V(r)]\psi(r,t), \tag{1}$$

in radial space-time $\mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}$, for $\mathbf{C}^2$-valued functions $\psi(r,t) = {}^t(\psi_1(r,t), \psi_2(r,t))$, with a real-valued spherically symmetric potential $V = V(r)$, $r \in \mathbf{R}_+ := (0,\infty)$. Here τ_k is the free radial Dirac operator with mass m defined by

$$\tau_k = -i\sigma_2\frac{\partial}{\partial r} - \sigma_1\frac{k}{r} + m\sigma_3, \tag{2}$$

with the Pauli matrices $\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$, $\sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. The operator τ_k arises from the spin-angular momentum decomposition of the free Dirac operator in three space dimensions. The nonzero integer k represents an eigenvalue of the "spin-orbit operator".

For the potential $V(r)$, we assume that it is a real-valued function in $\mathbf{R}_+$ such that $V(r) = V_1(r)+V_2(r)$, where $V_1(r) = e/r$ with a real constant e satisfying $|e| \le (k^2-\frac{1}{4})^{1/2}$ and $V_2(r)$ is in $L^2_{loc}(\mathbf{R}_+)$ and bounded near $r = 0$.

Note that this class of potentials $V(r)$ contains the Coulomb potential. Under this assumption, it can be shown that the radial Dirac operator $\tau_k + V$ in (1) is essentially selfadjoint on $C_0^\infty(\mathbf{R}_+;\mathbf{C}^2)$ in the Hilbert space $L^2(\mathbf{R}_+;\mathbf{C}^2)$ of the $\mathbf{C}^2$-valued square-integrable functions in $\mathbf{R}_+$ with respect to the Lebesgue measure dr. Its unique selfadjoint extension is also denoted by the same $\tau_k + V$. So this operator has a real spectrum.

τ_k has a singularity at $r = 0$ as in (2). This is indeed harmless if we consider it as an operator in the L^2 space, but is a problem to construct a path space measure, for we need to consider it as an operator in the L^∞ space. In this context, in [IJ], we have made an explicit construction of the free propagator, namely, the integral kernel $\mathcal{K}_t(r,\rho)$ of $e^{-it\tau_k}$ for $k = 1$, and shown that, though it turns out to be a distribution *of order zero* in the variables $(r,\rho) \in \mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}_+ = {\mathbf{R}_+}^2$, there exists no countably additive path space measure to give a path integral representation to the solution of the Cauchy problem for the radial Dirac equation (1).

Notations: $\cdot\, M_2(\mathbf{C}) \equiv \mathbf{C}^2 \otimes (\mathbf{C}^2)' := \{\text{complex}\, 2\times 2\text{-matrix}\}$,
$\cdot\, C_{00}^\infty([0,\infty)^2; M_2(\mathbf{C})) := \{M(r,\rho) \in C_0^\infty([0,\infty)^2; M_2(\mathbf{C}));$
$\partial r^m \partial\rho^n M(0,\rho) = \partial r^m \partial \rho^n M(r,0) = 0 \,\text{for all}\, m,n \ge 0\}$,
$\cdot\, C_{00}^\infty([0,\infty)^2; M_2(\mathbf{C}))' :=$ the dual space of $C_{00}^\infty([0,\infty)^2; M_2(\mathbf{C}))$.

As $C_0^\infty(\mathbf{R}_+{}^2; M_2(\mathbf{C}))$ is a subspace of $C_{00}^\infty([0,\infty)^2; M_2(\mathbf{C}))$, so $C_{00}^\infty([0,\infty)^2; M_2(\mathbf{C}))'$ is a subspace of the space $\mathcal{D}'(\mathbf{R}_+{}^2; M_2(\mathbf{C}))$ of the $M_2(\mathbf{C})$-valued distributions in $\mathbf{R}_+{}^2$.

The aim of this talk is to construct a countably additive path space measure to represent by path integral, though not the propagator, the resolvent kernel $[(\tau_k + V \mp i\varepsilon)^{-1}](r,\rho)$ for $\varepsilon > 0$ and the Green function for the radial Dirac operator $\tau_k + V(r)$ in (1). The interval $0 \le s \le t$ or $0 \ge s \ge t$ according as $t > 0$ or $t < 0$ is denoted by $|0,t|$.

Theorem. (i) *For every $\varepsilon > 0$, there exists a 2×2-matrix distribution-valued, precisely speaking, $C_{00}^\infty([0,\infty)^2; M_2(\mathbf{C}))'$-valued, countably additive path space measure $\mu_{t,0}$ on the Banach space $C(|0,t| \to [0,\infty))$ of the continuous paths $R : |0,t| \to [0,\infty)$ such that the resolvent kernel $[(\tau_k + V \mp i\varepsilon)^{-1}](r,\rho)$ for $\tau_k + V$ in (1) admits a path integral representation: for every pair $(f,g) \in C_{00}^\infty([0,\infty); \mathbf{C}^2) \times C_{00}^\infty([0,\infty); \mathbf{C}^2)$,*

$$\begin{aligned}(f, (\tau_k + V \mp i\varepsilon)^{-1} g) &= \int_0^\infty \int_0^\infty {}^t\overline{f(r)}[(\tau_k + V \mp i\varepsilon)^{-1}](r,\rho) g(\rho)\, dr d\rho \\ &= i \int_0^{\pm\infty} dt \int_{C(|0,t| \to [0,\infty))} \langle {}^t\overline{f(R(t))}, d\mu_{t,0}(R)\, g(R(0))\rangle \\ &\qquad \times R(t)^{1/2} R(0)^{1/2} e^{-\int_0^t \left(iV(R(s))R(s) \pm \varepsilon R(s)\right) ds}.\end{aligned} \tag{3}$$

In particular, the resolvent kernel $[(\tau_k + V \mp i\varepsilon)^{-1}](r,\rho)$ is a distribution of order zero in $\mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}_+$.

(ii) *The measure $\mu_{t,0}$ is concentrated on the set of the continuous paths $R : |0,t| \to [0,\infty)$ for which there exists a finite partition: $0 = t_0 \lesseqgtr t_1 \lesseqgtr \cdots \lesseqgtr t_{n+1} = t$ of the interval $|0,t|$ such that for $t_{h-1} \lesseqgtr s \lesseqgtr t_h$, $1 \le h \le n+1$,*

$$R(s) = R(0) e^{\pm[\sum_{p=1}^{h-1}(-1)^{p-1}(t_p - t_{p-1}) + (-1)^{h-1}(s - t_{h-1})]}. \tag{4}$$

Therefore each of these paths $R(\cdot)$ is, for some finite n, an n-vertex piecewise smooth curve in radial space-time, starting from $R(0)$ at time 0 and reaching $R(t)$ at time t, and exponentially growing or decreasing in each partioned short time interval.

(iii) *Suppose that 0 is not an eigenvalue of the radial Dirac operator $\tau_k + V$. If the Green function $G_\pm(r,\rho)$ for $\tau_k + V$ in (1) exists, then it is a distribution of order zero in $(r,\rho) \in \mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}_+$, and given as follows : for every pair $(f,g) \in C_{00}^\infty([0,\infty); \mathbf{C}^2) \times C_{00}^\infty([0,\infty); \mathbf{C}^2)$,*

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \int_0^\infty {}^t\overline{f(r)} G_\pm(r,\rho) g(\rho)\, dr d\rho &= i \lim_{\varepsilon \to +0} \int_0^{\pm\infty} dt \int_{C(|0,t| \to [0,\infty))} \\ \times \langle {}^t\overline{f(R(t))}, d\mu_{t,0}(R)\, g(R(0))\rangle & R(t)^{1/2} R(0)^{1/2} e^{-\int_0^t \left(iV(R(s))R(s) \pm \varepsilon R(s)\right) ds}.\end{aligned} \tag{5}$$

The main idea is to combine our method of constructiong a path space measure for the 1-dimensional Dirac equation in the paper [IT] and its a little refined review [I] with a simple procedure of dealing with the singularity, which has been employed by some physicists in connection with a method of space-time transformations in the path integration techniques.

References

[I] T. Ichinose, *Path integral for the Dirac equation*, Sugaku Expositions **6** (1993), no. 1, 13–31, American Mathematical Society.

[IJ] T. Ichinose and B. Jefferies, *The propagator of the radial Dirac equation*, J. Math. Phys. **43** (2002), no. 8, 3963–3983.

[IT] T. Ichinose and H. Tamura, *Path integral approach to relativistic quantum mechanics — Two-dimensional Dirac equation —*, Progr. Theoret. Phys. Suppl. No. **92** (1987), 144–175.

Support Theorem の拡張

中山季之 (東京大学数理科学研究科)

可分ヒルベルト空間 H 上の確率微分方程式

$$\begin{aligned} &dX(t) = AX(t)dt + b(X(t))dt + \sigma(X(t))dB(t), \\ &X(0) = x_0 \end{aligned} \tag{1}$$

の mild solution (次ページの式 (2)) に対する Support Theorem の構成を行う. ここで $A\colon D(A) \to H$ は H 上のある (C_0)-半群 $(S(t))_{t\geq 0}$ の生成作用素であり, $(B(t))_{t\in[0,T]}$ は可分ヒルベルト空間 U 上のウィナー過程である. 解が $D(A)$ に留まるようにできない可能性があり, 一般には強解を持たないのが特徴的である. この種の方程式の応用例としては数理ファイナンスにおけるフォワード・レート・モデルがある. Support Theorem とは, SDE の解のパスの分布のサポートを, 確率的変動を伴わない微分方程式の解のパスを使って表現しようというものである. 有限次元の SDE に対する Support Theorem の証明は, Stroock and Varadhan [5] によって初めてなされ, その後別の考え方を使って Aida, Kusuoka and Stroock [2], Millet and Sanz-Solé [4] によってなされた. 可分ヒルベルト空間上の SDE に対する Support Theorem の拡張として, 生成作用素 A が無い場合には Aida [1] の結果がある. 今回は生成作用素 A があるために方程式 (1) は一般には強解をもたないため Aida [1] と類似の証明が使えず, 後者に近い考え方が必要になる.

定理を正確に述べるため, 方程式 (1) を定式化すると以下のようになる. 完備確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ には通常の条件をみたすフィルトレーション $(\mathcal{F}(t))_{t\in[0,T]}$ が与えられているとする. ここで $T > 0$ はある定数である. 可分ヒルベルト空間 U (内積を $<\cdot,\cdot>_U$ と書く) 上に有界線形狭義正定値作用素 Q が与えられているとし, $<u,v>_{U_0} = <Q^{-1/2}u, Q^{-1/2}v>_U$ によって内積を与えられた可分ヒルベルト空間 $U_0 = Q^{1/2}(U)$ を考える. $(B(t))_{t\in[0,T]}$ は $(\mathcal{F}(t))_{t\in[0,T]}$ に関する U 上の Q-ウィナー過程 (Da Prato and Zabczyk [3] の意味) とする. Q が核型作用素の場合にこのウィナー過程は U 内に値を取るが, そうでない場合は柱状 (cylindrical) ウィナー過程と呼ばれるものである. $\sigma\colon H \to L_{(2)}(U_0; H)$ はリプシッツ連続かつ有界な写像であるとする. ここで $L_{(2)}(U_0; H)$ は U_0 から H への Hilbert-Schmidt 型作用素の全体を表す. U_0 のある完全正規直交系 $\{g_j\ ;\ j = 1, 2, \ldots\}$ をとって写像 $\sigma_j\colon H \to H$, $j = 1, 2, \ldots$ を $\sigma_j(x) = \sigma(x)g_j$, $x \in H$ により定義したとき, σ_j, $j = 1, 2, \ldots$ は 2 階 Fréche 微分可能であるとし, それぞれの微分係数 $D\sigma_j$, $D^2\sigma_j$ は有界すなわち $\sup\{\|D\sigma_j(x)h\|\,;\, h \in H, \|h\| \leq 1, x \in H\} < \infty$ かつ $\sup\{\|D^2\sigma_j(x)(h_1, h_2)\|\,;\, h_1, h_2 \in H, \|h_1\| \leq 1, \|h_2\| \leq 1, x \in H\} < \infty$ であるとする. 但し $\|\cdot\|$ は H のノルムを表す. 次に正の整数 n に対して 写像 $\rho_n\colon H \to H$ を $\rho_n(x) = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n} D\sigma_j(x)\sigma_j(x)$, $x \in H$ によって定義したとき, ある写像 $\rho\colon H \to H$ がとれて各点収束 $\|\rho_n(x) - \rho(x)\| \to 0$ しており, n によらない定数 C が存在して $\|\rho_n(x) - \rho_n(y)\| \leq C\|x - y\|$ が全ての $x, y \in H$ と $n \geq 1$

に対して成り立っているものとする. そして $b\colon H \to H$ はリプシッツ連続かつ有界な写像であり, $x_0 \in H$ はある定ベクトルとする.

以上の設定の下で方程式 (1) は唯一の mild solution $(X(t))_{t\in[0,T]}$ をもつことが知られている (Da Prato and Zabczyk [3]). ここで $(X(t))_{t\in[0,T]}$ が mild solution であるとは, $(\mathcal{F}(t))_{t\in[0,T]}$-可予測な H に値をとる連続確率過程であって

$$X(t) = S(t)x_0 + \int_0^t S(t-s)b(X(s))ds + \int_0^t S(t-s)\sigma(X(s))dB(s),\ t \in [0,T],\ \text{a.s.} \quad (2)$$

をみたすことを意味する.

次に区分的に 1 階連続微分可能な写像 $h\colon [0,T] \to U_0$ で $h(0) = 0$ をみたすようなものの全体を C_p^1 で表し, 写像 $h \in C_p^1$ に対して次の微分方程式

$$\begin{aligned}\dot{\xi}(t) &= A\xi(t) + (b-\rho)(\xi(t)) + \sigma(\xi(t))\dot{h}(t),\\ \xi(0) &= x_0.\end{aligned}$$

の唯一の mild solution を $\xi(\,\cdot\,;h)$ と表す. そして集合

$$\mathcal{L}_p = \left\{\xi(\,\cdot\,;h)\ ;\ h \in C_p^1\right\} \subset C([0,T];H)$$

を考える.

以上の設定下で次の定理が成り立つ.

定理　$\operatorname{supp} X(\cdot) = \bar{\mathcal{L}}_p$

但し, $\operatorname{supp} X(\cdot)$ は $C([0,T];H)$ における分布 $P \circ X^{-1}$ の support を表し, $\bar{\mathcal{L}}_p$ は $\mathcal{L}_p$ の $C([0,T];H)$ における閉包を表す.

参考文献

[1] Aida, S., *Support Theorem for Diffusion Processes on Hilbert Spaces*, RIMS, Kyoto Univ. 26(1990), 947-965.

[2] Aida, S., Kusuoka, S. and Stroock, D., *On the Support of Wiener Functionals*, RIMS, Kyoto Univ. 736.

[3] Da Prato, G. and Zabczyk, J., *Stochastic Equations in Infinite Dimensions*, Cambridge University Press, 1992.

[4] Millet, A. and Sanz-Solé, M., *A simple proof of the support theorem for diffusion processes.* , Séminaire de Probabilités, XXVIII, Lecture Notes in Math., 1583, Springer, Berlin.

[5] Stroock, D. W. and Varadhan, S. R. S., *ON THE SUPPORT OF DIFFUSION PROCESSES WITH APPLICATIONS TO THE STORONG MAXIMUM PRINCIPLE*, Proc. of Sixth Berkeley Symp. Math. Statist. Prob., III., 333-359, Univ. California Press, Berkeley, 1972.

連続な経路をもつ１次元マルコフ過程について

池田　信行　　　小倉　幸雄 (佐賀大理工学部)

はじめに

$\mathbb{R}$ またはその中の区間を状態空間とし連続な経路を持つ強 Markov 過程の研究は 1950 年代に W. Feller, Itô, McKean により完成されたが, その後類似な構造をもつ確率過程として, 1 次元一般化拡散過程 (gap diffusion), 双一般化拡散過程が導入された. 特に後者の中には, マルコフではあるが強マルコフでない確率過程が含まれている. そこで, このような確率過程のクラスを特徴づけられなかという問題が生ずる. 本講演では, 1 次元で連続な経路を持つという最も簡単な場合に限定してこの問題を考える.

定義と結果

$X = (\Omega, x(t), P_x)$ を次の仮定をみたす $Q = [0, 1]$ 上の Markov process とする.

[仮定]

(A1) (i) X は conservative で 0 と 1 は trap である. (ii) $x(t)$ は確率 1 で連続である. (iii) 次の意味で non-singular である：

$$P_x(\sigma_0 < \sigma_1)P_x(\sigma_1 < \sigma_0) > 0, \quad E_x[\zeta] < \infty, \qquad x \in Q.$$

ただし, σ_a は a への first hitting time で $\zeta = \sigma_0 \wedge \sigma_1$.

(A2) Q で稠密な 0 と 1 を含む集合 Q_C があって, 任意の $f \in C(Q)$ と $\lambda \geq 0$ に対して, $R_\lambda f(x) = E_x[\int_0^\zeta e^{-\lambda t} f(x(t))dt]$ で定められる resolvent $R_\lambda f$ が Q_C 上で連続である.

(A3) $s(x) := P_x(\sigma_1 < \sigma_0)$, $e(x) := E_x[\zeta]$ とおくとき, e は有限個の点を除いて s に関して上に凸である. 即ち, 有限集合 $F \subset Q$ が存在して, 全ての $0 \leq y_1 < x < y_2 \leq 1$, $y_1, x, y_2 \notin F$ に対して次式が成り立つ：

$$e(x) \geq \frac{s(y_2) - s(x)}{s(y_2) - s(y_1)} e(y_1) + \frac{s(x) - s(y_1)}{s(y_2) - s(y_1)} e(y_2). \tag{2.1}$$

注意 (1) (A1)-(A2) を仮定すると $0 \leq y_1 < x < y_2 \leq 1$, $y_1, y_2 \in Q_C$ に対しては (2.1) が成り立つ. 従って, $Q \setminus Q_C$ が有限個ならば (A3) は自動的に成り立つ.

(2) 仮定 (A3) は少し緩められる. 即ち, 後に定義する $\widehat{m}$ が有界変動ならば, 除外点 F は可算個でも構わない.

Lemma 1. 任意の $a_1, a_2 \in Q_C$, $0 \leq a_1 < x < a_2 \leq 1$, $f \in B(Q)$ に対して

$$R_\lambda f(x) = R_\lambda^0 f(x) + E_x[e^{-\lambda \sigma_I} R_\lambda f(x(\sigma_I))], \qquad \lambda \geq 0$$

が成り立つ. ただし, $R_\lambda^0 f(x) = E_x[\int_0^{\sigma_I} e^{-\lambda t} f(x(t))dt]$, $\sigma_I = \sigma_{a_1} \wedge \sigma_{a_2}$, $I = (a_1, a_2)$ である.

Lemma 2. (1) s は単調増加. 従って, 各点で右極限と左極限をもつ.

(2) s は $x \in Q_C$ で連続である.

$C_0(Q) :=$ 0 と 1 で零となる Q 上の連続関数全体,

$D(Q) :=$ 右極限と左極限を 持ち, 0 と 1 で零となる Q 上の有界関数で, s が右連続 (左連続) の点で右連続 (左連続) となるもの全体,

$D_0(Q) := \{f \in D(Q) : \lim_{t \downarrow 0} T_t f = f,\ \text{strongly}\}$

とする.

Lemma 3. (1) $R_\lambda(D(Q)) \subset D(Q)$, (2) $R_\lambda(D_0(Q)) \subset D_0(Q)$, (3) $C_0(Q) \subset D_0(Q) \subset D(Q)$ が成り立つ.

次に, $f \in D(Q)$ に対して

$$f \circ s^{\#}(\xi) := \begin{cases} f(x) = f \circ s^{-1}(\xi), & \xi = s(x) \in s(Q), \\ f(x+) = f \circ s^{-1}(\xi+), & \xi = s(x+), \\ f(x-) = f \circ s^{-1}(\xi-), & \xi = s(x-), \end{cases}$$

$$r(\xi,\eta) = r(\eta,\xi) := \frac{(\xi - s(0))(s(1)-\eta)}{s(1)-s(0)}, \qquad \xi \le \eta,$$

$$\widehat{m}(\xi) := -D^{+}e \circ s^{\#}(\xi)$$

とする. このとき

Lemma 4.
$$e(x) = \int_{s(0)}^{s(1)} r(s(x),\eta)d\widehat{m}(\eta), \quad x \in Q,$$

$$R_0 f(x) = E_x[\int_0^{\zeta} f(x(t))dt] = \int_{\widehat{Q}} r(s(x),\eta) f \circ s^{-1}(\eta) d\widehat{m}(\eta)$$

が成り立つ. 従って, $R_0(B(Q)) \subset D(Q)$ となる.

Theorem (1) $X = (x(t), \zeta, P_x)$ を条件 (A1)–(A3) を満たす $Q = [0,1]$ 上の Markov process とする. このとき $s(0) = 0$, $s(1) = 1$ を満たす $Q = [0,1]$ 上の狭義単調増加の関数 s と

$$\int_{\widetilde{Q}} r(\xi,\eta) d\widehat{m}(\eta) < \infty, \qquad \xi \in \widetilde{Q}, \tag{2.2}$$

$$d\widehat{m}(\{s(x-), s(x), s(x+)\} \setminus \{s(x)\}) = 0, \tag{2.3}$$

を満たし $\widetilde{Q} = \overline{s(Q)}$ を台とする測度 $d\widehat{m}$ が存在して, $(I, d\widehat{m})$ を scale と speed measure とし, $s(0)$ と $s(1)$ を trap とする generalized diffusion $\widetilde{X} = (\widetilde{\Omega}, \widetilde{\mathcal{F}}, \widetilde{\mathcal{F}}_t, \xi(t), \widetilde{P}_\xi)$ が $(\Omega, \mathcal{N}, \mathcal{N}_t, x(t), P_x) \overset{(\text{law})}{\sim} (\widetilde{\Omega}, \mathcal{N}, \mathcal{N}_t, s^{-1}(\xi(t)), \widetilde{P}_{s(x)})$ をみたす.

(2) 逆に, $Q = [0,1]$ 上の狭義単調増加の関数 s と (2.2)–(2.3) を満たす $\widetilde{Q} = \overline{s(Q)}$ を台にもつ測度 $d\widehat{m}$ が与えられたとする. このとき, $(I, d\widehat{m})$ を scale と speed measure とし, $s(0)$ と $s(1)$ を trap とする $\widetilde{Q}$ 上の genralized diffusion process を $\widetilde{X} = (\widetilde{\Omega}, \widetilde{\mathcal{F}}, \widetilde{\mathcal{F}}_t, \xi(t), \widetilde{P}_\xi)$ とすると, $X = (\widetilde{\Omega}, \mathcal{N}, \mathcal{N}_t, s^{-1}(\xi(t)), \widetilde{P}_{s(x)})$ によって定義される確率過程 X は条件 (A1)–(A3) を満たす Q 上の Markov 過程となる.

Corollary X の"Dirichlet form"$(\mathcal{E}, D(\mathcal{E}))$ は以下のように定められる.

(D1) 基礎のヒルベルト空間は $L^2(Q, dm)$ である.

(D2) $D(\mathcal{E})$ は $L^2(Q, dm)$ の元 u で次の 3 条件をみたすもの全体である. (i) u は Q で ds に関して絶対連続で $D_0(Q)$ に入る. (ii) u の ds に関する微分 $D_s u$ が $L^2(Q, ds_{\text{abs}})$ に入る. (iii) (2.4) の $\mathcal{E}$ に対して $\mathcal{E}(u,u) < \infty$.

(D3) $\mathcal{E}$ は次で与えられる.

$$\mathcal{E}(u,u) = \int_Q |D_s u|^2 ds_{\text{abs}} + \sum_{x:s(x+)>s(x)} \frac{|u(x+) - u(x)|^2}{s(x+) - s(x)} + \sum_{x:s(x)>s(x-)} \frac{|u(x) - u(x-)|^2}{s(x) - s(x-)}. \tag{2.4}$$

1次元ダイヤ・チェーン上の once reinforced random walkの再帰性について

竹島 正樹 (大阪大学理学研究科)

1 定義と予想

まず一般の無限連結グラフ $G=(V,E)$(但し,V は頂点の集合,E は辺の集合とする.) 上で距離を表す記号を準備する. 2点 u,v 間に辺 e で結ばれている時に $e=\{u,v\}$ と書き, u は v の近くの点と表現する. さらに,v の近くの点の集合を $N(v)$ と書き,v の近傍と呼ぶ. また,$o\in V$ が与えられた時, 点 o からの距離を以下のように定義する.

$|u|:=\inf\{m\geq 1|v_0=o,v_1\in N(v_0),v_2\in N(v_1),...,v_m\in N(v_{m-1}),v_m=u\}$

次に G 上の Once Reinforced Random Walk $\overrightarrow{X}:=\{X_n\}$ を定義する.

定義 $\beta>0$ と $\overrightarrow{X}$ の出発点 $\{X_0=o\}$ を与えておき, さらに次の条件 (1) を仮定する.

$$w(0,e)=1 \text{ for all } e\in E \tag{1}$$

$\overrightarrow{X}$ がパラメーター β の $G=(V,E)$ 上 Once Reinforced Random Walk (以下 ORRW と略記する.) とは, 以下の 2 条件 (2)(3) を $\overrightarrow{X}$ が, 任意の $n\geq 0, v\in V, e=\{u,v\}\in E$ で満たす事をさす.

$$w(n+1,e) = \begin{cases} w(n,e) & \text{for } \{X_n,X_{n+1}\}\neq e \\ \beta & \text{for } \{X_n,X_{n+1}\}=e \end{cases} \tag{2}$$

$$P(X_{n+1}=u|X_0=o,...,X_n=v) = \frac{w(n,\{u,v\})}{\sum_{t\in N(v)} w(n,\{t,v\})} \ a.s. \tag{3}$$

この ORRW の再帰性については, 私は次の予想をもっている.

予想

G 上の Simple Random Walk が recurrent ならば ORRW も recurrent,
G 上の Simple Random Walk が transient ならば ORRW も transient.

先行結果として,[DKL] が n 本 tree の時に, [V] が recurrent tree のうち $\beta\geq 1$ の時と, m 本ハシゴの時のうち $1-m^{-1}<\beta<1+(m-2)^{-1}$ の条件下 で, 上の予想が正しいことを証明している.(但し,$n(\geq 2)$,m:自然数.)

そこで,私は次のグラフ上でのORRWの再帰性を考えた. グラフ D は以下の図のものとする. (これを本講演では 1-dimensional chain of diamonds と呼ぶことにする.)

$$\mathrm{D}: \diamond\cdots$$

2 結果

Theorem 2.1 $\beta \in (0,\infty)$ とする.$\overrightarrow{X}$ は,パラメーター β の D 上のORRWとする. この時

$$P(\overrightarrow{X}\text{が recurrent}) = 1.$$

証明は, $0 < \beta < 1$ の場合と $\beta \geq 1$ の場合に分けて行った.
○ $0 < \beta < 1$ の場合は,$\tau_k := \inf\{m \geq 1 |\ |X_m| = k\}$ とした時に, $P(\tau_{2l+1} < \tau_0 | \tau_{2l} < \tau_0)$ の確率を上から評価することにより証明できる.
実際 (D 上では) $P(\tau_{2l+1} < \tau_0 | \tau_{2l} < \tau_0) \leq \dfrac{2l}{2l+\beta}$ の評価を与えることに,私は成功した.
この評価を利用して,

$$P(\tau_0 = \infty) \ \leq \ \prod_{l=1}^{\infty} P(\tau_{2l+1} < \tau_0 | \tau_{2l} < \tau_0) \leq \prod_{l=1}^{\infty} \left(1 + \frac{\beta}{2l}\right)^{-1} = 0$$

が示せた.
○ $\beta \geq 1$ の場合は, [V] の Lemma 11 を用いて証明することができる.
また, 次の式を示すことにより, 証明することも可能である.(但し,l は自然数.)

$$P(\text{ある } m > \tau_{2l} \text{に対して} |X_m| = 2l-1 | \tau_{2l} < \infty) = 1$$

他のグラフについては, 講演の最後で触れる予定である.

参考文献

[DKL] R. Durrett, H. Kesten, V. Limic: *Once edge-reinforced random walk on a tree*, Prob. Th. Rel. Fields. **122**, (2002) 567-592.

[V] M. Vervoort: *Reinforced Random Walks*, pre-print

Limit theorems for a diffusion process with a one-sided Brownian potential

河津清（山口大学教育学部）
鈴木由紀（慶應大学医学部）

本講演では, 片側 Brown ポテンシャルをもつ拡散過程の長時間後の漸近挙動について報告する。

$\mathbb{W}$ を $\mathbb{R}$ 上の連続関数で, $w(x)=0, x\geq 0$, を満たすもの全体とし, P を $\mathbb{W}$ 上の Wiener 測度, つまり, $\mathbb{W}$ 上の確率測度で $\{w(-x), x\geq 0, P\}$ が時間パラメーター x の Brown 運動になるものとする。$\Omega=\mathbb{C}([0,\infty);\mathbb{R})$ とし, $\omega\in\Omega$ に対して $X(t)=X(t,\omega)=\omega(t)$ とおく。ここで, $\omega(t)$ は ω の時刻 t での値である。$w\in\mathbb{W}$ と $x_0\in\mathbb{R}$ に対して $P_w^{x_0}$ を Ω 上の確率測度で, $\{X(t), t\geq 0, P_w^{x_0}\}$ が生成作用素

$$\mathcal{L}_w=\frac{1}{2}e^{w(x)}\frac{d}{dx}\left(e^{-w(x)}\frac{d}{dx}\right)$$

を持つ x_0 から出発する拡散過程となるものとする。$\mathbb{W}\times\Omega$ 上の確率測度 $\mathcal{P}^{x_0}$ を

$$\mathcal{P}^{x_0}(dwd\omega)=P(dw)P_w^{x_0}(d\omega)$$

により定義する。$\{X(t), t\geq 0, \mathcal{P}^{x_0}\}$ は, 確率空間 $(\mathbb{W}\times\Omega, \mathcal{P}^{x_0})$ 上で定義された拡散過程とみなされ, これを片側 Brown ポテンシャルをもつ拡散過程と呼ぶ。

$\omega\in\Omega, \lambda>0$ に対し,

$$X_\lambda(t)=\lambda^{-1/2}X(\lambda t),\quad t\geq 0,$$
$$a_\lambda(t)=\int_0^t \mathbf{1}_{(0,\infty)}(X_\lambda(s))ds,\quad t\geq 0,$$

とおき,

$$a_\lambda^{-1}(t)=\inf\{s>0: a_\lambda(s)>t\},\quad t\geq 0,$$

により $a_\lambda(t)$ の右連続な逆関数を定義する。さらに,

$$G_\lambda(t)=X_\lambda(a_\lambda^{-1}(t)),\quad t\geq 0,$$

とおくと, $\{G_\lambda(t), t\geq 0, P_w^0\}$ は, 0 から出発する $[0,\infty)$ 上の反射壁 Brown 運動となる。

$w\in\mathbb{W}, a\in\mathbb{R}$ に対し,

$$\sigma(a)=\sigma(a,w)=\sup\{x<0: w(x)=a\},$$

とおき, $\mathbb{W}$ の部分集合

$$A=\{w\in\mathbb{W}:\sigma(1/2)>\sigma(-1/2)\},\quad B=\{w\in\mathbb{W}:\sigma(1/2)<\sigma(-1/2)\},$$

を導入する。また, $w \in \mathbb{W}, \lambda > 0$ に対し, $w_\lambda \in \mathbb{W}$ を

$$w_\lambda(x) = \lambda^{-1} w(\lambda^2 x), \quad x \in \mathbb{R},$$

により定義する。すると,

$$\{w_\lambda, P\} \stackrel{\mathrm{d}}{=} \{w, P\}$$

である。さらに, $\mathbb{W}$ の部分集合

$$A_\lambda = \{w \in \mathbb{W} : w_\lambda \in A\}, \quad B_\lambda = \{w \in \mathbb{W} : w_\lambda \in B\},$$

を導入する。$P(A_\lambda) = P(B_\lambda) = 1/2$ である。

定理 1 任意の $T > 0$ と $\varepsilon > 0$ に対して,

$$\lim_{\lambda \to \infty} P\left\{ P_w^0 \left\{ \sup_{0 \le t \le T} |X_\lambda(t) - G_\lambda(t)| < \varepsilon \right\} > 1 - \varepsilon \,\middle|\, A_{\log \lambda} \right\} = 1.$$

$w \in \mathbb{W}$ に対し,

$$\zeta = \zeta(w) = \sup\left\{ x < 0 : w(x) - \min_{x \le y \le 0} w(y) = 1 \right\},$$

$$M = M(w) = \begin{cases} \sigma(1/2), & w \in A \text{ のとき}, \\ \zeta(w), & w \in B \text{ のとき}, \end{cases}$$

$$V = V(w) = \min_{x \ge M} w(x),$$

とおく。さらに, $b = b(w) \in (M, 0)$ を $w(b) = V$ により定義する。

定理 2 任意の $\varepsilon > 0$ に対して,

$$\lim_{\lambda \to \infty} P\left\{ P_w^0 \left\{ \left| (\log \lambda)^{-2} X(\lambda) - b(w_{\log \lambda}) \right| < \varepsilon \right\} > 1 - \varepsilon \mid B_{\log \lambda} \right\} = 1.$$

定理 1（定理 2）を示すためには, 以下の定理 3（定理 4）を示せばよい。

定理 3 $\mu = \mu(\lambda) = \lambda^{1/4} \log \lambda$ とすると, 任意の $T > 0, \varepsilon > 0$ に対して,

$$\lim_{\lambda \to \infty} P\left\{ P_{\mu w_\mu}^0 \left\{ \sup_{0 \le t \le T} |X(t) - G(t)| < \varepsilon \right\} > 1 - \varepsilon \,\middle|\, A_{\log \lambda} \right\} = 1.$$

ここで, $G(t) = X(a^{-1}(t))$, $a^{-1}(t) = \inf\{s > 0 : a(s) > t\}$,
$a(t) = \int_0^t \mathbf{1}_{(0,\infty)}(X(s))ds$.

定理 4 $w \in B$ とすると, ある $\delta > 0$ があって, $1 - \delta < r_1 < r_2 < 1 + \delta$ を満たす任意の r_1, r_2 と $\varepsilon > 0$ に対して,

$$\lim_{\lambda \to \infty} \inf_{r \in [r_1, r_2]} P_{\lambda w}^0 \{ |X(e^{\lambda r}) - b(w)| < \varepsilon \} = 1.$$

参考文献

[KST] Kawazu, K., Suzuki, Y. and Tanaka, H. (2001). A diffusion process with a one-sided Brownian potential. *Tokyo J. Math.* **24**, 211–229.

1次元拡散過程の一般化 arc-sine law

渡辺信三（立命館大理工）

1次元 Brown 運動 $B(t)$, $(B(0)=0)$, の片側滞在時間 $\Gamma_+(t)=\int_0^t 1_{[0,\infty)}(B(s))ds$ について、よく知られた arc-sine law

$$P(\frac{1}{t}\Gamma_+(t)\leq x)=\frac{2}{\pi}\sin^{-1}\sqrt{x}=\int_0^x\frac{1}{\pi}\frac{1}{\sqrt{y(1-y)}}dy,\quad 0<x<1$$

の一般の1次元拡散過程への一般化について論じる。これについては、最近笠原勇二、矢野裕子の両氏がその分布関数について、extreme values $x=0, x=1$ での漸近公式を得たが、ここでは密度関数の表現とそれを用いた漸近公式について論じたい。

$m\in\mathcal{M}$ を M. G. Krein の意味の string, 即ち、

$$\mathcal{M}=\{m:x\in[0,\infty)\mapsto m(x)\in[0,\infty], \text{increasing and right-continuous}, m(0)<\infty\}$$

とする。$l=\sup\{x|m(x)<\infty\}$, $m(0-)=0$ と置いて、m は $[0,l)$ 上の Radon 測度 $dm(x)$ と同一視出来る。$m\in\mathcal{M}$ に対し、対応する解析的諸量や確率論的諸概念を与える：(cf. [KW])。

- $x\mapsto m(x)$ の右連続逆関数を $x\mapsto m^{-1}(x)$ とすると $m_*:=m^{-1}\in\mathcal{M}$ である。m_* を m の dual string という。
- $m\leftrightarrow(d\sigma,c)$ を Krein の対応：即ち、$h(\lambda)=c+\int_{[0,\infty)}\frac{d\sigma(\xi)}{\xi+\lambda}$, $\lambda>0$, を string m の spectral function とする。ここで、$\int_{[0,\infty)}\frac{d\sigma(\xi)}{\xi+1}<\infty$, $c\geq 0$. dual string m_* の spectral function は $h_*(\lambda)=\{\lambda h(\lambda)\}^{-1}$ である。
- $\psi(\lambda)=\{h(\lambda)\}^{-1}$ と置くと、$e^{-\psi(\lambda)}$ は半直線 $[0,\infty)$ 上の無限分解可能分布（一般に defective) の Laplace 変換となり、

$$\psi(\lambda)=c_0+c_1\lambda+\int_0^\infty(1-e^{-\lambda u})n(u)du$$

  と表現される。ここで $c_0=\sigma_*(\{0\})$, $c_1=c_*$, $n(u)=\int_{(0,\infty)}e^{-\xi u}\xi d\sigma_*(\xi)$.
- $\theta(\lambda)=\int_0^\infty(1-\cos\lambda u)\ n(u)du$, $\omega(\lambda)=\int_0^\infty\sin\lambda u\ n(u)du$, と置く。

string m に関する次の仮定を考える：

(H.1)　$m(0) = 0$　かつ、　$\sup\{x | m(x) = 0\} = 0.$

m が (H.1) を満たすことと、 dual string m_* が (H.1) を満たすことは同値であり、それは $c = 0$ かつ $\int_{(0,\infty)} d\sigma(\xi) = \infty$ となること（あるいは、$c_* = 0$ かつ $\int_{(0,\infty)} d\sigma_*(\xi) = \infty$ となること）と同値である。仮定 (H.1) のもとで積分

$$p(t,x) = \frac{e^{-c_0 t}}{\pi} \int_0^\infty e^{-t\theta(\lambda)} \cos(x\lambda - t\omega(\lambda)) d\lambda, \quad t > 0$$

は、$t > 0, x > 0$ で収束し、$(t,x) \in (0,\infty) \times (0,\infty)$ の正の連続関数になる。積分

$$q(t,x) = \int_0^x p(t,y) \left(\int_{x-y}^\infty n(u) du + c_0 \right) dy$$

も $(t,x) \in (0,\infty) \times (0,\infty)$ の正の連続関数を定義する。さらに次の仮定を考える：

(H.2)　任意の $t > 0$ で、$\int_0^\infty e^{-t\theta(\lambda)}(1 + \omega(\lambda)) d\lambda < \infty.$

二つの $m_+, m_- \in \mathcal{M}$, 但し $m_-(0) = 0$, を与えると、Feller generator $\frac{d}{dm}\frac{d}{dx}$ に対応する E_m 上の（一般化）拡散過程 $\mathbf{X} = (X_t, P_x)$ が定まる：ここで、

$$m(x) = \begin{cases} m_+(x), & x \geq 0 \\ -m_-(-x+0), & x < 0, \end{cases}$$

E_m は、$(-l_-, l_+)$ 上の Radon 測度 $dm(x)$ の support （なお、必要な境界条件は strings m_+, m_- に含まれている、cf. [KW])。この $\mathbf{X}$ に対し、$\Gamma_+(t) = \int_0^t 1_{[0,\infty)}(X_s) ds$ と置き、P_0 に関する $\frac{1}{t}\Gamma_+(t)$ の法則を考える。以下で m_+, m_- に対応する諸量は、それぞれ、$+, -$ をつけて表す。

定理 1. *strings m_+, m_- は共に仮定 (H.1), (H.2) を満たすとする。このとき、各 $t > 0$ に対し、$\frac{1}{t}\Gamma_+(t)$ の分布は絶対連続で、連続な密度 $f_t^+(x)$, $0 < x < 1$, をもち、それは次のように表される：*

$$f_t^+(x) = t \int_0^\infty p_-(s, t(1-x)) q_+(s, tx) ds + t \int_0^\infty q_-(s, t(1-x)) p_+(s, tx) ds.$$

定理 2. 定理 1 と同じ仮定のもとで、

$$f_t^+(x) \sim tC_-(t) g_+(x) \quad \text{as} \quad x \to 0.$$

ここで、$C_-(t) = \int_{[0,\infty)} e^{-t\xi} d(\sigma_*)_-(\xi) = (c_0)_- + \int_t^\infty n_-(u) du$, $g_+(x) = \int_0^\infty p_+(t,x) dt = \int_{[0,\infty)} e^{-x\xi} d\sigma_+(\xi)$.　$\int_{(0,\infty)} d\sigma_+(\xi) = \infty$ であるから、$x \searrow 0$ のとき　$g_+(x) \nearrow \infty$ となる。

参考文献

[KW]　S. Kotani and S. Watanabe, Krein's spectral theory of strings and generalized diffusion processes, *in Functional Analysis in Markov Processes, ed. by M. Fukushima*, **LNM 923**, Springer(1982), 235-259

p 次（$p>1$）のべき項を有する 半線形 Kolmogorov 方程式の解の漸近挙動

藤田 安啓 （富山大・理）

1. はじめに

この講演では次の半線形 Kolmogorov 方程式を考える：

(1)
$$\begin{cases} \eta_t = \dfrac{1}{2}\Delta\eta + F\cdot D\eta + |D\eta|^p & \text{in } (0,\infty)\times \mathbb{R}^d \\ \eta(0,\cdot) = \psi(\cdot) & \text{in } \mathbb{R}^d. \end{cases}$$

ここで，$p>1$ は与えられた定数，また ψ, F は $\mathbb{R}^d$ 上の与えられた関数で，次を満たすとする：

(2)
$$\begin{cases} F\in C^3(\mathbb{R}^d;\mathbb{R}^d), DF\in C_b^2(\mathbb{R}^d;\mathbb{R}^{d^2}) \\ {}^\exists\alpha>0 \ \text{ s.t. } \ DF(x)y\cdot y \le -\alpha|y|^2 \\ \qquad (x,y\in\mathbb{R}^d), \\ 0<{}^\exists\theta<1 \ \text{ s.t. } \ \psi\in C_b^{2+\theta}(\mathbb{R}^d). \end{cases}$$

このとき，次の作用素

$$L = \frac{1}{2}\Delta + F\cdot D \tag{3}$$

は $\mathbb{R}^d$ 上の非有界な係数を持つ楕円型作用素である。特に，$F(x)=-\alpha x$ のとき，L は Ornstein-Uhlenbeck 作用素である。この講演の目的は，次の 3 点である：

(i) (1) の大域的古典解の存在・一意性を示すこと，

(ii) その解の漸近挙動に現われる定数の性質を調べること，

(iii) $p\to\infty$ のときの漸近公式 (14) を導くこと，およびその応用.

2. 方程式 (1) について

方程式 (1) は，1 つの Hamilton-Jacobi-Bellman 方程式と見なせる。$F=0$ のときは，[1] において，大域的古典解の存在・一意性が示され，また解の $L^1(\mathbb{R}^d,dx)$-norm における漸近挙動が調べられている。また，F が dissipative かつ $p=2$ のときは，[3] において，解の漸近挙動が調べられている。$p=2$ のケースで，0 次の項 $\beta\eta$（β は定数）が加わった場合については [5] を参照されたい。

3. 主結果

> **Theorem 1.** (2) を仮定する．このとき，方程式 (1) は次を満たす一意的な解を持つ：
>
> (4) $\eta\in C^{1,2}([0,\infty)\times\mathbb{R}^d)$ かつ
>
> (5)
> $$\sup_{0\le t\le T}\|\eta(t,\cdot)\|_{C_b^{2+\theta}(\mathbb{R}^d)} < \infty \quad (T>0).$$

次に，この大域的古典解 η の漸近挙動を調べる．Theorem 1 で保証された (1) の 大域的古典解 η の p への依存を強調するため，η_p と書く．このとき，次の結果を得る．

> **Theorem 2.** (2) を仮定する．このとき，次をみたす定数 K_p が存在する：
>
> (6) $$\lim_{t\to\infty}\eta_p(t,x) = K_p, \qquad x\in\mathbb{R}^d.$$
>
> さらに，K_p は p の関数として $(1,\infty)$ 上で連続である．

Theorem 2 の定数 K_p の構成のプロセスでは，(3) の作用素 L に対応する $\mathbb{R}^d$ 上の不変確率測度 $d\nu$ の存在と一意性が鍵となる。

定数 K_p の性質を調べるために，次の"平均"を考える：

$$M_r = \left[\int_{\mathbb{R}^d} e^{r\psi} \, d\nu \right]^{1/r}, \qquad r > 0,$$

$$M_0 = \exp\left(\overline{\psi}\right),$$

$$M_\infty = \exp\left(\sup_{x \in \mathbb{R}^d} \psi(x) \right).$$

ここで，

(7) $$\overline{\psi} = \int_{\mathbb{R}^d} \psi \, d\nu.$$

また，

(8) $$\|D\psi\|_0 = \sup_{x \in \mathbb{R}^d} |D\psi(x)|$$

とおく。

Theorem 3. (2) を仮定する．また，ψ は恒等的に定数ではないとする．このとき，

(9) $\log(M_0) < K_p < \log(M_{2\|D\psi\|_0^{p-2}})$, $p > 2$,

(10) $K_2 = \log(M_2)$,

(11) $\log(M_{2\|D\psi\|_0^{p-2}}) < K_p \le \log(M_\infty)$, $1 < p < 2$.

Theorem 4. (2) を仮定する．また，$\|D\psi\|_0 \le 1$ とする．このとき，

(12) K_p は $(1, \infty)$ 上で非増加,

(13) $\lim_{p\to\infty} K_p = \log(M_0) = \overline{\psi}$.

Theorem 5. (2) を仮定する．また，$\|D\psi\|_0 \le 1$ とする．このとき，

(14) $$\lim_{p\to\infty} \int_0^\infty dt \int_{\mathbb{R}^d} |D\eta_p(t,\cdot)|^2 \, d\nu = \int_{\mathbb{R}^d} (\psi - \overline{\psi})^2 \, d\nu.$$

Theorem 5 の応用として，(13) の K_p の $\overline{\psi}$ への漸近の仕方を詳しく見ることができる。Theorem 2 の定数 K_p の ψ への依存を強調するため，$K_p(\psi)$ と書く。

Theorem 6. (2) を仮定する．また，$0 < \|D\psi\|_0 \le 1$ とする．このとき，各 $0 < \delta < 2$ に対して，

(15) $$\alpha(2-\delta)\,\|D\psi\|_0^{\delta-2} \int_{\mathbb{R}^d} (\psi - \overline{\psi})^2 \, d\nu$$
$$\le \liminf_{p\to\infty} \left(K_p(\psi) - \overline{\psi} \right)^{\delta/p}$$
$$\le \limsup_{p\to\infty} \left(K_p(\psi) - \overline{\psi} \right)^{\delta/p} \le \|D\psi\|_0^\delta.$$

ここで，α は (2) の定数である．

References

[1] L. Amour and M. Ben-Artzi, *Global existence and decay for viscous Hamilton-Jacobi equations*, Nonlinear Analysis Theory Methods & Appl. 31 (1998), pp. 621–628.

[2] S. Cerrai, Second Order PDE's in Finite and Infinite Dimension. A Probabilistic Approach, Lecture Notes in Mathematics, 1762. Springer-Verlag, Berlin, 2001.

[3] G. DaPrato, *Asymptotic behaviour of stochastic quasi dissipative systems*, A tribute to J. L. Lions, ESAIM Control Optim. Calc. Var. 8 (2002), 587–602.

[4] G. Da Prato and B. Goldys, *Elliptic operators on $\mathbb{R}^d$ with unbounded coefficients*, J. Differential Equations, 172 (2001), pp. 333–358.

[5] Y. Fujita, *Pointwise estimates of solutions to some semilinear parabolic equations with unbounded coefficients on $\mathbb{R}^d$*, in preparation.

[6] N. .V. Krylov, M. Röckner, and J. Zabczyk, *Stochastic PDE's and Kolmogorov equations in infinite dimensions*, Lecture Notes in Mathematics, 1715; edited by G. Da Prato. Springer-Verlag, Berlin, 1999.

部分情報下の最適投資問題に対するリスク鋭感的確率制御アプローチ

畑　宏明（阪大・基礎工）、飯田　泰成（大同生命）

時刻 t での安全資産価格 $s^0(t)$、危険資産価格 $s^1(t)$、ファクター過程 $m(t)$ はそれぞれ次の方程式をみたすものとする。

$$ds^0(t) = rs^0(t)dt,\ s^0(0) = s^0 > 0,$$

$$ds^1(t) = s^1(t)\{(\bar{r} + m(t))\,dt + \sigma d\eta_t\},\ s^1(0) = s^1 > 0,$$

$$dm(t) = am(t)dt + bd\eta_t,\ m(0) = x \in \mathbf{R},$$

ただし、 η_t は 2 次元標準ブラウン運動で $\sigma^*, b^* \in \mathbf{R}^2$ $a, r, \bar{r} \in \mathbf{R}$ である。$u_0(t), u(t)$ をそれぞれ安全資産、危険資産への投資戦略であるとする。ここで $(u_0(t), u(t))_{0\le t\le T}$ が投資戦略であるとは $u_0(t) + u(t) = 1$ をみたす $\mathcal{S}_t-$ 発展的可測確率過程であることをいう。ただし、$\mathcal{S}_t = \sigma(s^1(u); 0 \le u \le t)$ とする。すべての投資戦略の集合を $\mathcal{U}(T)$ で表し、$\mathcal{U} = \{u; u \in \mathcal{U}(T) \text{ for all } T \ge 0\}$ とする。
$u \in \mathcal{U}(T)$ を与えたとき、時刻 t での資産価値過程 $w_t = w_t(u)$ は次の方程式を満たす。

$$\frac{dw_t}{w_t} = u^0(t)\frac{ds^0(t)}{s^0(t)} + u(t)\frac{ds^1(t)}{s^1(t)} = rdt + u(t)(\bar{r} + m_t - r)dt + u(t)\sigma d\eta_t,\quad w(0) = w_0$$

本講演では、$c \in \mathbf{R}$ を与えたとき、

$$\limsup_{T\to\infty} \frac{1}{T} \log P\left(\frac{\log w_T(u)}{T} \ge c\right) \tag{0.1}$$

を $u \in \mathcal{A}$ で最大にする問題を扱う。$\mathcal{A}$ は許容な投資戦略全体の集合である。(精密な定義は講演で述べる。)

本講演で扱う問題は Pham が [2],[3] で扱った問題の発展である。彼は上記の $\mathcal{A}$ を $\sigma(s^1(u), m(u); 0 \le u \le t)-$ 可測な確率過程のある集合であるとしている。つまり、投資家が危険資産とファクター過程の過去のすべての情報を用いて投資戦略 u を選択できる場合を扱っている。これに対して、本講演では投資家が危険資産の過去の情報のみを用いて u を選択する場合（部分情報下の問題）を考えている。つまり、上にもあるように u_t を $\mathcal{S}_t-$ 可測として、可測性の条件を緩めたのである。

大偏差原理が成り立つ条件の下で、Fenchel-Legendre 変換より、rate function $I(c, u)$ と moment generating function $\Gamma(\lambda, u) = \limsup_{T\to\infty} \frac{1}{T}\log E\left[\exp\left(\lambda \log w_T(u)\right)\right] = \limsup_{T\to\infty} \frac{1}{T}\log E\left[(w_T(u))^\lambda\right]$ との関係は $I(c, u) = \sup_{\lambda>0}[\lambda c - \Gamma(\lambda, u)]$ で表される。大偏差確率 (0.1) を最大にする問題は $I(c, u)$ を最小にする問題であると期待できるので、$\inf_{u\in\mathcal{A}} I(c, u) = \inf_{u\in\mathcal{A}}\sup_{\lambda>0}[\lambda c - \Gamma(\lambda, u)]$ を考える。この等式で inf と sup の入れ替えが可能であると仮定すると、$\Gamma(\lambda) = \sup_{u\in\mathcal{A}} \Gamma(\lambda, u)$ とすると、$\inf_{u\in\mathcal{A}} I(c, u) = \sup_{\lambda>0}[\lambda c - \Gamma(\lambda)]$ となる。ゆえに双対問題

$$\Gamma(\lambda) = \sup_{u\in\mathcal{A}} \limsup_{T\to\infty} \frac{1}{T}\log E\left[(w_T(u))^\lambda\right] \quad \lambda > 0 \tag{0.2}$$

を考えることになる。$\lambda > 0$ を一つ固定すると、問題 (0.2) はエルゴート型リスク鋭感的確率制御問題である。この問題は $\lambda < 0$ のとき、Nagai and Peng[1] でより一般的な設定で扱われた

$$J(w_0, x; u) = \limsup_{T\to\infty} \frac{1}{\lambda T}\log E[(w_T(u))^\lambda] \tag{0.3}$$

を最大にする問題を 1 次元で $0 < \lambda < 1$ の場合に考察することになる。$\Gamma(\lambda) = \lambda \sup_{u\in\mathcal{A}} J(w_0, x; u)$ であることに注意する。この問題の値関数 $\sup_{u\in\mathcal{A}} J(w_0, x; u)$ と最適戦略 $\bar{u}$ が、次の代数リッカチ方程式（二次方程式）の解 $\bar{U}$ から求められることを示す。

$$\bar{K}_0\bar{U}^2 + 2\bar{K}_1\bar{U} + K_2 = 0 \tag{0.4}$$

ただし、$\bar{K}_0 = \frac{2\lambda}{1-\lambda}(\bar{R}+b\sigma^*)^2(\sigma\sigma^*)^{-1}$, $\bar{K}_1 = a + \frac{\lambda}{1-\lambda}(\bar{R}+b\sigma^*)(\sigma\sigma^*)^{-1}$, $K_2 = \frac{1}{2(1-\lambda)}(\sigma\sigma^*)^{-1}$, $\bar{R} = \lim_{t\to\infty} R_t$で、$R_t$は方程式 $\dot{R}_t + (R_t + b\sigma^*)^2(\sigma\sigma^*)^{-1} - bb^* - 2aR_t = 0$, $R_0 = 0$ の解である。ただし、(0.4) は λ が 1 に近いと必ずしも解を持たないことに注意する。本講演では (0.4) が $\bar{K}_1 + \bar{K}_0\bar{U} < 0$ となる一意解 $\bar{U}$ が存在するような λ の条件が $0 < \lambda < \bar{\lambda}$ であることを示す。ここで、

$$\bar{\lambda} = \left(\frac{a}{a - (\bar{R}+b\sigma^*)(\sigma\sigma^*)^{-1}}\right)^2 \tag{0.5}$$

である。従って、$0 < \lambda < \bar{\lambda}$ に対して (0.3) を最大にする問題の最適戦略 $\bar{u}$ がファクター過程 m_t の $\mathcal{S}_t$ の下での条件付期待値 $\hat{m}_t$ と $\bar{U}$、そして $\bar{U}$ から決まる $\bar{g}$ によって次のように構成される。

$$\bar{u}_t(\lambda) = \bar{u}_t(\hat{m}_t;\lambda) = \frac{1}{1-\lambda}(\sigma\sigma^*)^{-1}\{\bar{r} - r + 2\lambda(\bar{R}+b\sigma^*)\bar{g} + [1 + 2\lambda(\bar{R}+b\sigma^*)\bar{U}]\hat{m}_t\}$$

ここで、$y_t = \log s^1(t)$ とすると、$\hat{m}_t$, $\bar{g}$ は次を満たすものである。
$d\hat{m}_t = \{a\hat{m}_t - (R_t + b\sigma^*)(\sigma\sigma^*)^{-1}(\bar{r} - \frac{1}{2}\sigma\sigma^* + \hat{m}_t)\}dt + (R_t + b\sigma^*)(\sigma\sigma^*)^{-1}dy_t$, $\hat{m}_0 = x$

$$\bar{g} = \frac{K_2\{1 + 2\lambda(\bar{R}+b\sigma^*)\bar{U}\}(\bar{r}-r)}{\bar{K}_1 + \bar{K}_0\bar{U}}$$

さらに、最適値 $\sup_{u\in\mathcal{A}} J(w_0, x; u) = F(\lambda)$ は上の $\bar{U}, \bar{g}$ を用いて次のように得られる。

$$F(\lambda) = r + (\bar{R}+b\sigma^*)^2(\sigma\sigma^*)^{-1}\bar{U} + 2\lambda(\bar{R}+b\sigma^*)^2(\sigma\sigma^*)^{-1}\bar{g}^2 + \frac{1}{2(1-\lambda)}(\sigma\sigma^*)^{-1}\{\bar{r} - r + 2\lambda(\bar{R}+b\sigma^*)\bar{g}\}^2$$

よって、$\bar{\lambda}$ が (0.5) の形で存在し、$0 < \lambda < \bar{\lambda}$ に対して過程 $\bar{u}_t(\lambda) = \bar{u}_t(\hat{m}_t;\lambda)$ が双対問題 (0.2) の最適戦略で、また $\Gamma(\lambda) = \lambda F(\lambda)$ が成立して、これは $(0,\bar{\lambda})$ で連続微分可能で $\Gamma'(\bar{\lambda}-) = +\infty$ を満たすので、Pham[2],[3] の主結果（本講演で紹介する。）を用いることができ、本講演の主結果が得られる。

Theorem 0.1.

$$\sup_{u\in\mathcal{A}} \limsup_{T\to\infty} \frac{1}{T}\log P\left(\frac{\log w_T(u)}{T} \geq c\right) = -\sup_{\lambda\in(0,\bar{\lambda})}[\lambda c - \Gamma(\lambda)], \quad \forall c \in \mathbf{R}$$

が成り立ち、さらに $\Gamma'(0+) = r - \frac{1}{4a}(\sigma\sigma^*)^{-2}\left(\bar{R}+b\sigma^*\right)^2 + \frac{1}{2}(\sigma\sigma^*)^{-1}(\bar{r}-r)^2$ と求めることができ、$\lambda(d) \in (0,\bar{\lambda})$ を $\Gamma'(\lambda(d)) = d \in (\Gamma'(0+), \infty)$ となるものであるとすると、

$$u_t^{*,n} = \begin{cases} \bar{u}_t\left(\lambda\left(c + \frac{1}{n}\right)\right), & if \quad \Gamma'(0+) < c \\ \bar{u}_t\left(\lambda\left(\Gamma'(0+) + \frac{1}{n}\right)\right), & if \quad c \leq \Gamma'(0+) \end{cases}$$

で定義される制御の列 $\{\bar{u}^{*,n}(\lambda)\}_{n\in\mathbf{N}}$ は *nearly optimal* 、すなわち次が成り立つ。

$$\lim_{n\to\infty}\limsup_{T\to\infty}\frac{1}{T}\log P\left(\frac{\log w_T^{u_t^{*,n}}(u)}{T} \geq c\right) = \sup_{u\in\mathcal{A}}\limsup_{T\to\infty}\frac{1}{T}\log P\left(\frac{\log w_T(u)}{T} \geq c\right), \quad c \in \mathbf{R}$$

参考文献

[1] H. Nagai. and S. Peng.:"Risk-sensitive dynamic portfolio optimization with partial information on infinite time horizon", Annals of Applied Probability, vol.12, No.1 (2002) 173-195

[2] H. Pham.:A risk-sensitive control dual approach to a large deviations control problem, 2002, to appear in Systems and Control Letters.

[3] H. Pham.:"A large deviations approach to optimal long term investment", Finance and Stochastics,(2003) 169-195.

Diffusions in infinite dimension related to sine, Airy and Bessel kernels

名古屋大学大学院多元数理科学研究科　長田博文

Interacting Brownian motion (IBM) とは、与えられた自由 potential $\Psi:\mathbb{R}^d\to\mathbb{R}$ と干渉 potential $\Phi:\mathbb{R}^d\to\mathbb{R}\cup\{\infty\}$ (ただし,$\Phi(x)=\Phi(-x)$) に対して、形式的には次の SDE で定義される無限次元拡散過程である。

$$dX_t^i=dB_t^i-\{\frac{1}{2}\sum_{j\in\mathbb{Z},\,j\neq i}\Phi(X_t^i-X_t^j)\}dt-\frac{1}{2}\Psi(X_t^i)dt\qquad(i\in\mathbb{Z})\tag{1}$$

SDE(1) においては粒子を区別し、$(\mathbb{R}^d)^{\mathbb{Z}}$-値の拡散過程を考えているが、以下では区別せずに配置空間 (configuration) $\Theta=\{\theta=\sum_i\delta_{x_i}\,;\,\theta(\{|x|\le r\})<\infty$ for all $r\}$ に値を取る拡散過程

$$\mathbb{X}_t=\sum_{i\in\mathbb{Z}}\delta_{X_t^i}\tag{2}$$

を考える。これにより不変確率測度をもつ事が期待できる。この仕事の出発点は Lang による 1977 年の仕事にさかのぼる。そこで彼は干渉 potential が $C_0^3(\mathbb{R}^d)$ という仮定の下で、SDE を解くことにより定常マルコフ過程を構成した。そのとき不変測度は (Φ,Ψ)-Gibbs 測度になる。無論 potential が Ruelle の条件（**超安定性** と**長距離の可積分性**）を満たしていることは仮定する。

なお $(\Theta,\mathcal{B}(\Theta))$ 上の確率測度 μ が (Φ,Ψ)-Gibbs 測度とは、$r\in\mathbb{N}$ と外部条件 $\eta=\sum_j\delta_{y_j}\in\Theta$ に対して、μ の条件付き確率測度

$$\mu_{r,\eta}^k=\mu(\pi_r\in\cdot|\pi_r^*(\theta)=\pi_r^*(\eta),\theta(Q_r)=k),\tag{3}$$

が、いわゆる DLR 方程式:

$$\mu_{r,\eta}^k=\frac{1}{Z_{r,\eta}^k}\exp\{-\mathcal{H}_{r,\eta}\}\quad\text{for }\mu\text{-a.s. }\eta,\quad\text{ただし }Z_{r,\eta}^k=\int_{\Theta_r^k}\exp\{-\mathcal{H}_{r,\eta}\}dx\tag{4}$$

をみたすことである（正確には粒子の個数を指定したので canonical Gibbs 測度と呼ばれる)。ここで

$$Q_r=\{|x|\le r\},\quad\Theta_r^k=\{\theta\,;\,\theta(Q_r)=k\},\quad\pi_r(\theta)=\theta(\cdot\cap Q_r),\quad\pi_r^*(\theta)=\theta(\cdot\cap Q_r^c).$$

また $\theta=\sum_i\delta_{x_i}$ に対して $\mathcal{H}_{r,\eta}$ は (Φ,Ψ) から決まるハミルトニアン

$$\mathcal{H}_r(\theta)=\sum_{x_i\in Q_r}\Psi(x_i)+\sum_{x_i\neq x_j\in Q_r}\Phi(x_i-x_j),\quad\mathcal{H}_{r,\eta}(\theta)=\mathcal{H}_r(\theta)+\sum_{x_i\in Q_r,y_j\in Q_r^c}\Phi(x_i-y_j)\tag{5}$$

である。なお $\mu_{r,\eta}^k$ は本来 Θ_r^k の確率測度だが、自然に Q_r^k 上の置換不変な確率測度とも見なす。

Dirichlet 形式理論の枠組みでは (2) の拡散過程の構成は、双線形形式 $(\mathcal{E},\mathcal{D},L^2(\Theta,\mu))$、ただし

$$\mathcal{E}(f,g)=\int_\Theta\mathbb{D}[f,g]d\mu,\quad\mathbb{D}[f,g](\theta)=\sum_k\frac{\partial f}{\partial x_i}\cdot\frac{\partial g}{\partial x_i},\tag{6}$$

$$\mathcal{D}=\bigcup_{r=1}^\infty\mathcal{D}_r,\quad\mathcal{D}_r=\{f\in L^2(\Theta,\mu);f\text{ is }\pi_r\text{-measurable, smooth }\mathcal{E}(f,f)<\infty\}$$

の**可閉性**と**正則性**に帰着される。Θ 上の測度一般に対して次の結果が成り立つ。以下、$(\mathcal{E}^{\max},\mathcal{D}^{\max})$ で $(\mathcal{E},\mathcal{D})$ の（同じ $L^2(\Theta,\mu)$ 上の）最大可閉部分を表す。これは一意に存在することが知られている。仮定を述べる：

$$\sum_{k=1}^\infty k\,\mu(\Theta_r^k)<\infty,\qquad\sigma_r^k\in L^2(Q_r^k,dx)\quad\text{for all }k,r\in\mathbb{N}.\tag{A.1}$$

ここで σ_r^k は μ の Q_r 密度関数で $\mu\circ\pi_r^{-1}(\cdot\cap\Theta_r^k)$ (を Q_r^k の測度とみなしたとき）の Lebesgue 測度に対する密度を表す。この仮定はきわめて緩やかな仮定である。

Theorem 1 (正則性定理 [2]). (A.1) が成り立てば $(\mathcal{E}^{\max}, \mathcal{D}^{\max})$（を完備化したもの）は $L^2(\Theta, \mu)$ の正則 *Dirichlet* 形式になる。（したがって一般論 [1] より対応する拡散過程が存在する）。

このようにして構成された拡散過程は次の有限系の極限であることがわかる。

Theorem 2 (近似定理 [2]). $(\mathcal{E}^{\max}, \mathcal{D}^{\max})$ に対応する L^2*-semigroup* は、$(\mathcal{E}, \mathcal{D}_r)$ の最大可閉部分に対応する L^2*-semigroup* の強収束極限である。

いつ $(\mathcal{E}, \mathcal{D}, L^2(\Theta, \mu))$ が可閉か ということが次の問題である。まず以下の**局所化**が成立する。準備として

$$\mathcal{E}^k_{r,\eta}(f,g) = \int_{\Theta^k_r} \mathbb{D}_r[f,g](\theta)\mu^k_{r,\eta}(d\theta), \quad \mathbb{D}_r[f,g](\theta) = \sum_{x_i \in Q_r} \frac{\partial f}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial g}{\partial x_i}, \quad (\theta = \sum_i \delta_{x_i}) \tag{7}$$

とおく。必用なのは次の仮定である。

$$(\mathcal{E}^k_{r,\eta}, \mathcal{D}, L^2(\Theta^k_r, \mu^k_{r,\eta})) \text{ は } \mu\text{-a.s. } \eta \text{ とすべての } r, k \in \mathbb{N} \text{ に対して可閉である。} \tag{A.2}$$

上の Dirichlet 形式は本質的に有限次元の Dirichlet 形式であり問題は有限次元、有界領域のそれに帰着する :

Theorem 3 (可閉性局所化定理 [2]). (A.2) が成り立てば $(\mathcal{E}, \mathcal{D}, L^2(\Theta, \mu))$ は可閉である。

証明の鍵の一つは良い２次形式をもつ可閉形式の**積分**による可閉性の保存である。以上は μ の構造を仮定しない一般論だが、より細やかな構造を入れたときに (A.2) について調べる。重要な測度のクラスである Gibbs 測度の時は次が成立する。

Theorem 4 (可閉性定理（Gibbs 測度の場合）[2]). μ が (Φ, Ψ)*-Gibbs* 測度のとき、(Φ, Ψ) が上半連続ならば、(A.2) が成立する。（その結果、$(\mathcal{E}, \mathcal{D}, L^2(\Theta, \mu))$ は可閉となり、対応する拡散過程が存在する。）

なお、この結果は [3] では可測関数の場合に強められた。Ruelle クラスの potential の内、興味深いものはすべてこれでカバーされている。この結果の証明の鍵は DLR 方程式 (4) である。

最近 Gibbs 測度とは異なる配置空間上の興味深い測度の研究が盛んになってきた。Soshnikov および Shirai T., Takahashi Y. によって導入された Fermion 測度である。ρ_n を測度 μ の n-相関関数（correlation function）とする。つまり、$\rho_n : (\mathbb{R}^d)^n \to \mathbb{R}^+$ は置換不変かつすべての互いの交わりを持たない有界可測集合の列 $A_1, \ldots, A_m$ と自然数列 $k_1, \ldots, k_m$ $(k_1 + \cdots + k_m = n)$ に対して、

$$\int_{A_1^{k_1} \times \cdots \times A_m^{k_m}} \rho_n(x_1, \ldots, x_n) dx_1 \cdots dx_n = \int_\Theta \prod_{i=1}^m \frac{\theta(A_i)!}{(\theta(A_i) - k_i)!} d\mu \tag{8}$$

を満たす関数である。μ が核（kernel）K をもつ Fermion 測度とは,μ の相関関数が K で次のように与えられることである。

$$\rho_n(x_1, \ldots, x_n) = \det(K(x_i, x_j))_{i,j=1,\ldots,n} \tag{9}$$

与えられた核にたいする Fermion 測度はもし存在すれば一意である ([6])。存在についてはつぎの十分条件が知られている。

Theorem 5 (Soshnikov[6], Shirai T., Takahashi Y.[5]). K が連続、$K(x,y) = \overline{K(y,x)}$ かつ作用素として $0 \le K \le 1$ ならば、それに付随する *Fermion* 測度が存在する。

興味深い Fermion 測度したがってそれを生成する核の例は次のようなものがある。すべてランダム行列に関して行列のサイズを無限大にした時に現れるものである。これらは、それぞれの範疇で普遍性を持って出現する重要な例とおもわれている。無論ランダム行列に関係したものに限ってもこれ以外に様々な例がある。また本質的に２次元クーロン potential なので、２次元の例もある。(see [6])

Example 1 (sine kernel). Let $d = 1$. Let $0 < \bar{\rho} < 1$ and set

$$\mathsf{K}_{\sin}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{|k| \le \pi\bar{\rho}} e^{\sqrt{-1}kt} \, dk = \frac{\bar{\rho}\sin(\pi x)}{\pi x}.$$

So the $\mathsf{K}_{\sin}$ is a function of positive type. Let $\hat{\mu}^N$ denote the probability measure on $\mathbb{R}^N$ defined by

$$\hat{\mu}^N = \frac{1}{Z^N} e^{-\sum_{i,j=1}^N -2\log|x_i-x_j|} e^{-\lambda_N^2 \sum_{i=1}^N x_i^2}\, dx_1 \cdots dx_N,$$

where $\lambda_N = 2(\pi\bar{\rho})^3/3N^2$ and Z^N is the normalization. Set $\mu^N = \hat{\mu}^N \circ (\xi^N)^{-1}$, where $\xi^N : \mathbb{R}^N \to \Theta$ such that $\xi^N(x_1, \ldots, x_N) = \sum_{i=1}^N \delta_{x_i}$. Let ρ_n^N denote the n-correlation function of μ^N. Let ρ_n denote the n-correlation function of μ. Then it is known ([7, Proposition 1], [6]) that for all $n = 1, 2, \ldots$

$$\lim_{N\to\infty} \rho_n^N(x_1, \ldots, x_n) = \rho_n(x_1, \ldots, x_n) \quad \text{for all } (x_1, \ldots, x_n).$$

In this sense the measure μ is associated with the Hamiltonian $\mathcal{H}$ coming from the log potential $-2\log|x|$.

Example 2 (Airy kernel). Let $\mathcal{A}_i$ be the Airy function, $d = 1$ and

$$\mathsf{K}(x, y) = \frac{\mathcal{A}_i(x) \cdot \mathcal{A}_i'(y) - \mathcal{A}_i(y) \cdot \mathcal{A}_i'(x)}{x - y}$$

Example 3 (Bessel kernel). 状態空間は $\mathbb{R}$ でなくて半直線 $[0, \infty)$ とする。また J_α を the Bessel function of order α とする.

$$\mathsf{K}(x, y) = \frac{J_\alpha(\sqrt{x}) \cdot \sqrt{y} \cdot J_\alpha'(\sqrt{y}) - J_\alpha(\sqrt{y}) \cdot \sqrt{x} \cdot J_\alpha'(\sqrt{x})}{2(x - y)}.$$

これらの Fermion 測度はあえて Gibbs 測度と思った場合、その干渉 potential は対数関数になり、DLR 方程式を満たすことは全く期待できない。実際 (5) のハミルトニアン $\mathcal{H}_{r,\eta}(\theta) = \mathcal{H}_r(\theta) + \sum_{x_i \in Q_r, y_j \in Q_r^c} \Phi(x_i - y_j)$ は（無限領域では）意味を持たない。

Dirichlet 形式の可閉性（従って拡散過程の構成について）は Fermion 測度一般に対して次の結果が成り立つ。

Theorem 6 ([4]). K が連続ならば、有限粒子系をあらわす双線形形式 $(\mathcal{E}, \mathcal{D}_r)$ は可閉である。

Theorem 1 と Theorem 2 により弱い意味で拡散過程が常に存在するわけだが、この定理により、無限粒子系を近似する有限粒子系については満足のいく形で拡散過程（少なくともマルコフ semigroup）が存在することがわかった。しかし、論理的に極限の Dirichlet 形式に付随する拡散過程が退化する（それこそぴくりとも動かなくなる）可能性を排除していない。合理的な有限粒子系は構成されさらに無限粒子系はその極限であるわけだから、その極限が退化してしまえばそれはそれで仕方のないことだが、ちゃんと動いているという事を見極めることは重要である。

この問題を解決するために次の概念を導入する。

Definition 1. Θ 上の確率測度 μ は次の条件を満たす時 (Φ, Ψ)-quasi Gibbs 測度という：μ-a.s. η とすべての $r, k \in \mathbb{N}$ に対して、ある正定数 c_1, c_2 が存在し次を満たす。

$$c_1 \exp\{-\mathcal{H}_r\} d\Lambda_r^k \le \mu_{r,\eta}^k \le c_2 \exp\{-\mathcal{H}_r\} d\Lambda_r^k \tag{10}$$

ただし、Λ_r^k は Θ_r^k 上の Poisson ランダム測度である。

ポイントは $\mathcal{H}_{r,\eta}$ は意味を持たなくとも $\mathcal{H}_r$ は有界領域だけの和なので、意味を持つ可能性がある、という点と、DLR 方程式は無理でも条件付き確率自身は常に存在するわけで、「それがそれなりによい性質を持ちコントロールできるということが対数干渉 potential には期待できるはずだ」という点である。この定義から直ちに

Theorem 7. 上半連続な *potential* をもつ (Φ, Ψ)-*quasi Gibbs* 測度は (A.2) をみたす。(その結果、$(\mathcal{E}, \mathcal{D}, L^2(\Theta, \mu))$ は可閉となり、対応する拡散過程が存在する。)

この一般化の応用として

Theorem 8. *Bessel* 核、および *sine* 核に付随する *Fermion* 測度は *quasi Gibbs* 測度である。(その結果、$(\mathcal{E}, \mathcal{D}, L^2(\Theta, \mu))$ は可閉となり、対応する拡散過程が存在する。)

尚、今の時点で Airy 核に付随する Fermion 測度が quasi Gibbs 測度かどうかはまだわからない。
sine 核の場合無限粒子系は（形式的には）次の無限次元 SDE で与えられる。

$$dX_t^i = dB_t^i + \sum_{j\in\mathbb{Z},\ j\neq i}^{\infty} \frac{1}{X_t^i - X_t^j}\, dt \quad (i \in \mathbb{Z}), \tag{11}$$

これは Spohn([7]) より Dyson モデルと呼ばれている。SDE の形自身の美しさ、および不変確率測度になる Fermion 測度が平行移動不変なものであり、またランダム行列に関するものとして最も標準的な測度（いわゆる Bulk の極限に現れる）であることを考慮すると、この拡散過程は今後ますます重要になるのではないかと思う。

Remark 1. 実は Fermion 測度の場合は（仮に先ほどの例のようにランダム行列に付随した典型的な場合でも）、Dirichlet 形式として拡散過程のとらえ方は明快だが、SDE として如何に（形式的にせよ）表現するかは微妙な問題である。Airy 核の場合は全くわかっていない。（予想は持っているが）。また sine 核の場合でも、有限系の近似列の単純な極限になっているとは（一般には）限らない。線形な方程式にもかかわらず無限系に移行する時に SDEgap とよぶべき SDE の変化が生じる。そのような不安定さは Dirichlet 形式では生じていない。

参考文献

[1] Fukushima, M., Oshima, Y., Takeda, M., *Dirichlet forms and symmetric Markov processes*, Walter de Gruyter (1994).

[2] Osada, H., *Dirichlet form approach to infinitely dimensional Wiener processes with singular interactions*, Commun. Math. Physic. (1996), 117-131.

[3] Osada, H. *Interacting Brownian motions with measurable potentials.* Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci. **74** (1998), no. 1, 10–12.

[4] Osada, H. *Non-collision and collision properties of Dyson's model in infinite dimension and other stochastic dynamics whose equilibrium states are determinantal random point fields*, to appear in Advanced Study in Pure Mathematics **39** "Stochastic Analysis on Large Scale Interacting Systems"

[5] Shirai T., Takahashi Y., *Random point fields associated with certain Fredholm determinant I* (to appear in JFA).

[6] Soshnikov, A., *Determinantal random point fields*, Russian Math. Surveys **55**:5 923-975.

[7] Spohn, H., *Interacting Brownian particles: a study of Dyson's model,* In: Hydrodynamic Behavior and Interacting Particle Systems, ed. by G.C. Papanicolaou, IMA Volumes in Mathematics **9** , Springer-Verlag (1987) 151-179.

Ergodic Theory of Number Theoretic Transformations and Related Topics

本研究集会は，仲田 均 (慶應義塾大学)・盛田 健彦 (広島大学) が世話人となって，慶應義塾大学理工学部１４号館２０３番教室において，2003年12月17日(水)〜12月20日(土)の日程で開催された．フラクタル，タイリングといった最近の話題に関する連続講演と，数論的変換とエルゴード理論を中心とする講演が行われた．また，日本滞在中の多くの外国人研究者の参加を得て，国際的な研究・交流の場としても有意義な研究集会となったと思う．以下に，そのプログラムと，講演アブストラクトを付けておく．

プログラム

12月17日（水）

13:30–14:20 Openning Address : F. Schweiger (Salzburg)
Ergodic theory of multidimensional continued fractions

14:30 –15:20 M. Yuri (Sapporo) 由利 美智子
Large deviations for countable to one Markov systems

15:50 – 16:40 D. H. Kim (KIAS)
The waiting time for the irrational translation

16:50 –17:40 H. Nakada (Keio) 仲田 均
On ϕ-mixing property of β-transformations

12月18日（木）

9:30 – 10:20 K. Nakaishi (Tokyo) 中石 健太郎
Strong convergence of additive MCF algorithms

10:30 – 11:20 Sh. Ito (Kanazawa) 伊藤 俊次
Fractals and tilings in ergodic theory I
– on Doiphantine apploximations–

13:30 –14:20 T. Schmidt (Oregon)
Commensurable continued fractions

14:30 - -15:20 R. Natsui (Keio) 夏井 利恵
On the group extension of the non-archimedean continued fraction transformation

15:50 – 16:40 Short communications
B.K. Seo (KAIST)
Asymptotic behaviors of the first return time of translations on a torus
E. Deligero (Keio)
On the central limit theorem for non-archimedean diophantine approximations

16:50 – 17:40 M. Stadlbauer (Bielefeld)
On a measure preserving transformation acting on the limit set of a Kleinian group (joint work with Bernd O. Stratmann)

12月19日（金）

9:30 – 10:20 M. Mori (Nihon) 森 真
Discrepancy of sequences generated by dynamical system

10:30 – 11:20 Sh. Ito (Kanazawa) 伊藤 俊次
Fractals and tilings in ergodic theory II
– on Pisot substitutions –

13:30 – 14:20 C. Kraaikamp (Delft)
A new continued fraction algorithm with non-decreasing partial quotients
(joint work with Fritz Schweiger, Jun Wu, and Yusuf Hartono)

14:30 – 15:20 J. Hatomoto (Tokyo Metropolitan) 波止元 仁
Ergodic measures and entropies for SRB-attractor

15:50 – 16:40 R. Abe 阿部　隆次
On the geometry of Markoff numbers: an approach to the three dimensional case

16:50 – 17:40 G. H. Choe (KAIST)
Design of rigorous computer simulations of dynamical systems based on the Lyapunov exponent

12月20日（土）

9:30 – 10:20 H. Ei (Chuo) 江居 宏美
An atomic surface of an invertible substitution of rank d and its boundary

10:30 – 11:20 Sh. Ito (Kanazawa) 伊藤 俊次
Fractals and tilings in ergodic theory III
– on beta expansions –

11:30 – 12:20 Closing Address : M. S. Keane (Amsterdam, Keio, Wesleyan)
The binomial transformation

On ϕ-mixing property of β-transformations

Hitoshi Nakada
Dept. of Math. Keio University

This is a small remark on β-transformations, $\beta > 1$:

$$T_\beta x = \beta \cdot x - [\beta \cdot x]$$

for $x \in [0,1]$. We put

$$b_n(x) = [T_\beta^{n-1} x]$$

It is well-known that there exists a unique absolutely invariant probability measrure μ. With this measure μ we regard $\{b_n\}$ as a stationary stochastic process.

In general suppose that $\{X_n\}$ be a stationary stochastic process. We denote by $\mathbf{F}_k^l$ and $\mathbf{F}_k^\infty$ the smallest σ-algebras for which $\{X_j : k \leq j \leq l\}$ and $\{X_j : j \geq k\}$ are measurable, respectively. Then we put

$$\phi(n) = \sup_{j \geq 1} \sup_{\substack{A \in \mathbf{F}_1^j,\, B \in \mathbf{F}_{j+n}^\infty \\ P(A) \neq 0}} |P(B|A) - P(B)|,$$

$$\tilde{\phi}(n) = \sup_{j \geq 1} \sup_{\substack{A \in \mathbf{F}_1^j,\, B \in \mathbf{F}_{j+n}^\infty \\ P(B) \neq 0}} |P(A|B) - P(A)|$$

Then $\{X_n\}$ is said to be ϕ- or reverse ϕ-mixing when $\phi(n) \to 0$ or $\tilde{\phi}(n) \to 0$ holds, respectively.

M. Gordin claimed that T_β is reverse ϕ-mixing for any $\beta > 1$, without proof. Recently, H. Nakada and R. Natsui showed that T_β is not ϕ-mixing for alll most every $\beta > 1$. Here we also claim that the revers ϕ-mixing property also holds for a piecewise linear transformation which is in the class $\mathcal{L}$ defined by K. Wilkinson.

On the group extension of the non-archimedean continued fraction transformation

by
Rie Natsui
Department of Mathematics, Keio University
Hiyoshi, Kohoku-ku, Yokohama 223-8522
Japan

Let $\mathbb{F}_q$ be a finite field with q elements. We consider the ring of polynomials with $\mathbb{F}_q$-coefficients $\mathbb{F}_q[X]$, its fraction field $\mathbb{F}_q(X)$, and the field of formal Laurent power series with $\mathbb{F}_q$-coefficients $\mathbb{F}_q((X^{-1}))$. Here we only consider

$$\mathbb{L} = \{ f \in \mathbb{F}_q[X] : \deg f < 0\}.$$

For $f \in \mathbb{L}$, there exists a sequence $\{A_i \in \mathbb{F}_q[X],\ i \geq 0\}$ such that

$$f = A_0 + \frac{1\,|}{|A_1} + \frac{1\,|}{|A_2} + \cdots .$$

Since $\mathbb{L}$ is a compact abelian group with the addition and the metric $d(f,g) = q^{\deg\,(f-g)}$, there exists a unique normalized Haar measure m. As usual, we define for $n \geq 2$

$$\begin{cases} P_n = A_n \cdot P_{n-1} + P_{n-2} \\ Q_n = A_n \cdot Q_{n-1} + Q_{n-2} \end{cases} \quad \text{with} \quad \begin{cases} P_0 = 0, & P_1 = 1 \\ Q_0 = 1, & Q_1 = A_1. \end{cases}$$

We fix $R \in \mathbb{F}_q[X]$ with positive degree. We consider $U, V \in \mathbb{F}_q[X]$ such that U, V and R have no non-trivial common factor and denote by $C(R)$ the number of all such pairs (U, V) with $0 \leq \deg U,\ \deg V < \deg R$. Then we have the following :

Theorem.
For m-almost every $f \in \mathbb{L}$,

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sharp \left\{ 1 \leq n \leq N : \begin{pmatrix} P_n \\ Q_n \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} U \\ V \end{pmatrix} \ mod\ R \right\} = \frac{1}{C(R)}$$

holds.

To prove this theorem, we construct a group extension of the continued fraction transformation T on $\mathbb{L}$: T is defined by

$$T(f) = \begin{cases} \frac{1}{f} - \left[\frac{1}{f}\right] & \text{if } f(\neq 0) \in \mathbb{L} \\ 0 & \text{if } f = 0, \end{cases}$$

where $[\cdot]$ denotes the polynomial part of a formal Laurent power series. For a finite group G, the group extension T_G on $\mathbb{L} \times G$ is defined by

$$T_G(f,\, g) = (Tf,\ g \cdot \phi(f))$$

with a map $\phi : \mathbb{L} \to G$. In particular, we put

$$SL_{\pm}(2,\, \mathbb{F}_q[X]) = \left\{ \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} : A,\, B,\, C,\, D \in \mathbb{F}_q[X],\, AD - BC = \pm 1 \right\}$$

and

$$G(R) = \left\{ \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in SL(2,\, \mathbb{F}_q[X]) : \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mod R \right\}.$$

We take the factor group $G(R) \backslash SL_{\pm}(2,\, \mathbb{F}_q[X])$ as G and

$$\phi(f) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & A_1(f) \end{pmatrix} \mod R.$$

Then we prove the ergodicity of T_G and the assertion of the theorem follows from the individual ergodic theorem immediately.

Ergodic measures on SRB attractors

Jin Hatomoto *

Let f be a C^2-diffeomorphism of a closed Riemannian manifold M. In the stochastic context, we may consider any f-invariant set as the summation of ergodic basins. On the other hand, the fractal dimension of each (hyperbolic) ergodic measure μ is determined in relation between the entropy and the Lyapunov exponents ([2], [4]). Here the *fractal dimension* of μ is defined by $d_\mu(x) = \lim_{\rho\to 0} \frac{\log \mu(B(x,\rho))}{\log \rho}$ if the limit exists and is independent of μ-a.e.x , where $B(x,\rho)$ is the ball centered at x of radius ρ with respect to the Riemannian distance in M (see [1], [7] for more details). Thus the fractal structure of the f-invariant set is compound of multi-structures of the fractal dimensions of ergodic measures.

In our approach we focus on SRB-attractors (see the definition of SRB attractors (or ergodic attractors) in [1], [6]) and classify the set of ergodic measures on the SRB attractors into "measures which concentrate periodic orbits", "measures with 0 entropy", "measures with positive entropy" and "physical measures", and then investigate several properties of those classes.

It must be emphasized that we introduce the strong nonuniformly shadowing lemma, which is a new refined version of nonuniformly shadowing lemma obtained by Katok([3]) and Pollicott([5]).

Applying this lemma, we are able to give another proof of the approximation theorem which guarantees the metric entropy of any hyperbolic ergodic measure can be approximated by the topological entropy of some topological horseshoe (Katok, Hasselblatt [3] Theorem S.5.9). These results lead us to the following contents:

Firstly, we establish several connections between measures satisfying SRB-condition and other measures which are so-called phisical measures.

Secondly, for any hyperbolic ergodic measures satisfying SRB condition we show that its support is an SRB attractor and has similar dynamical properties to the support of a hyperbolic attractor.

Finally, we are able to get the topological properties on some classes of the set of ergodic measures on SRB attractors.

References

[1] N.Aoki, *The Real Analysis of Dynamical Systems I, II, III, IV*, 2002 preprints. in japanese.

[2] L.Barreira, Y.Pesin and J.Schmeling, *Dimension and product structure of hyperbolic measures*, Ann of Math. **149** (1999), 755-783.

[3] A.Katok and B.Hasselblatt, *Introduction to the Modern Theory of Dynamical Systems*, Cambrige Univ. Press. 1955.

*Department of Mathematics, Tokyo Metropolitan University

[4] F.Ledrappier and L-S.Young, *The metric entropy of diffeomorphisms PartI: Characterization of measures satisfying Pesin's entropy formula*, Ann of Math. **122** (1985), 509-539, *PartII: Relations between entropy, exponents and dimension*, Ann of Math. **122** (1985), 540-574.

[5] M.Pollicott, *Lectures on ergodic theory and Pesin theory on compact manifolds*, LMS.

[6] C.Pugh and M.Shub, *Ergodic Attractors*, Trans.A.M.S. **312** (1989), 1-54.

[7] L-S.Young, *Dimension entropy and Lyapunov exponents*, Ergod. Th. and Dynam. Sys. **2** (1982), 109-124.

On the geometry of Markoff numbers: an approach to the three dimensional case

阿部 隆次 (ABE Ryuji)

１８７９年にマルコフは実数の連分数展開に関連する離散スペクトルを発見した。幾何学的にはこのスペクトルはモジュラー面の６重の被覆からなる対称性の高い一点穴あきトーラス上のカスプ領域に近づかない閉測地線と対応する。さらに、H. Cohn による一点穴あきトーラスから閉トーラスへの等角写像により、それらの測地線は複素平面上の直線に対応することが知られている。この事実はマルコフ数の幾何学と呼ばれる。本研究ではピカール群 $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{Z}[i])$ に関する複素数の連分数展開と双曲３次元多様体内の測地線の間にマルコフ数の幾何学の類似が成立するかを調べた。これは I. Aitchison (メルボルン大学) 氏との共同研究である。

ピカール群はモジュラー群 $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{Z})$ の一般化と考えることができ、モジュラー群に関する双曲正三角形を単位とする上半平面のファレイ平面充填に対応して双曲正八面体を単位とする上半空間の空間充填が得られる。その空間充填の下、一点穴あきトーラスに対応する双曲３次元多様体がボロミアンリングの補空間であることを示した。ボロミアンリングの補空間は

$$P_\infty = \begin{pmatrix} 1 & 1-i \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad P_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1-i & 1 \end{pmatrix}, \quad P_1 = \begin{pmatrix} i & 1-i \\ -1+i & 2-i \end{pmatrix}$$

を生成元とするピカール群の位数 24 の torsion-free 正規部分群の基本領域として実現される。

次の方程式系を導入する。

$$x_1 + x_2 = 2y_1y_2, \quad 2x_1x_2 = y_1^2 + y_2^2. \tag{1}$$

(1) の解の四つ組 $(x_1, x_2; y_1, y_2)$ からなる木を考えることができ、x_i, $i = 1, 2$ がとる値の集合を

$$\mathrm{Number}(\Lambda) = \{\lambda\} = \{1, 5, 29, 65, 169, 349, 901, 985, 4549, 11521, \cdots\}$$

とおく。A. Schmidt は [S] において複素数の diophantine 近似に関する以下の離散スペクトルの存在を証明した。

$$\left\{ \sqrt{4 - \frac{1}{\lambda^2}} \;\middle|\; \lambda \in \mathrm{Number}(\Lambda) \right\} \cup \left\{ \sqrt{\frac{3}{5}\sqrt{41}} \right\}.$$

Schmidt の例における群の生成元のいくつかはピカール群には含まれないことを注意しておく。

行列 Λ_1, M_1, α を次のように定義する。

$$\Lambda_1 = P_\infty P_0^{-1}(P_\infty^{-1} P_1 P_\infty) = P_1 P_\infty (P_1^{-1} P_0^{-1} P_1), \quad M_1 = P_1 P_\infty^{-1} P_1 P_\infty, \quad \alpha = P_1 P_\infty^{-1} P_0^{-1}.$$

このとき次の主張が得られる。

Theorem 1 方程式系 (1) の解の四つ組 $(x_1, x_2; y_1, y_2)$ からなる木の最右列第 *2* 座標からなる *Schmidt* のスペクトルの部分列 $(1, 5, 29, 169, 985, \cdots)$ に対応する行列は $\Lambda_1(M_1)^k$, $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ と表すことができて, その軸は *Borromean rings* 内閉軌道となる。

Theorem 2 方程式系 (1) の解の四つ組からなる木の最左列第 *2*座標からなる *Schmidt* のスペクトルの部分列 $(5, 65, 901, 12545, 174725, \cdots)$ に対応する行列は $\Lambda_1^{k+1}\alpha^k M_1,\ k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ と表すことができて, その軸は *Borromean rings* 内閉軌道となる。

その他 $(x_1, x_2; y_1, y_2)$ に対応する行列の四つ組を求めるアルゴリズムの提唱を行なった。
現在までにピカール群に関するマルコフ数の幾何学の発見には誰も成功しておらず、双曲 3 次元多様体を用いたマルコフ数の幾何学の研究もなされていないことからこれらの結果は重要である。

References

[S] A. L. Schmidt, *Diophantine approximation of complex numbers*, Acta. Math., 134 (1975), 1-85.

An atomic surface of an invertible substitution of rank d and its boundary

江居　宏美 (中央大学)

Alphabet $\mathcal{A} = \{1,2,3\}$ 上の Rank 3 の Substitution σ_R

$$\sigma_R : \begin{cases} 1 \to 12 \\ 2 \to 13 \\ 3 \to 1 \end{cases}$$

に対し, Alphabet $\mathcal{A}$ のかわりに $\boldsymbol{R}^3$ 上の 3 つの単位正方形タイル $\{1,2,3\}$ (実際にはある平面への射影により, 下図のように平行四辺形のタイルとなる) を用いた 2 次の Dual extension $E_1^*(\sigma_R)$, $\boldsymbol{R}^3$ 上の 3 つの単位線分タイル $\{1,2,3\}$ を用いた 1 次の Dual extension $E_2^*(\sigma_R)$ は Duality の性質から決められる (論文 [7], 図 1 参照). ここで図 2 のように, 平行四辺形タイルを $E_1^*(\sigma_R)$ で写した領域の Boundary は $E_2^*(\sigma_R)$ で与えられている.

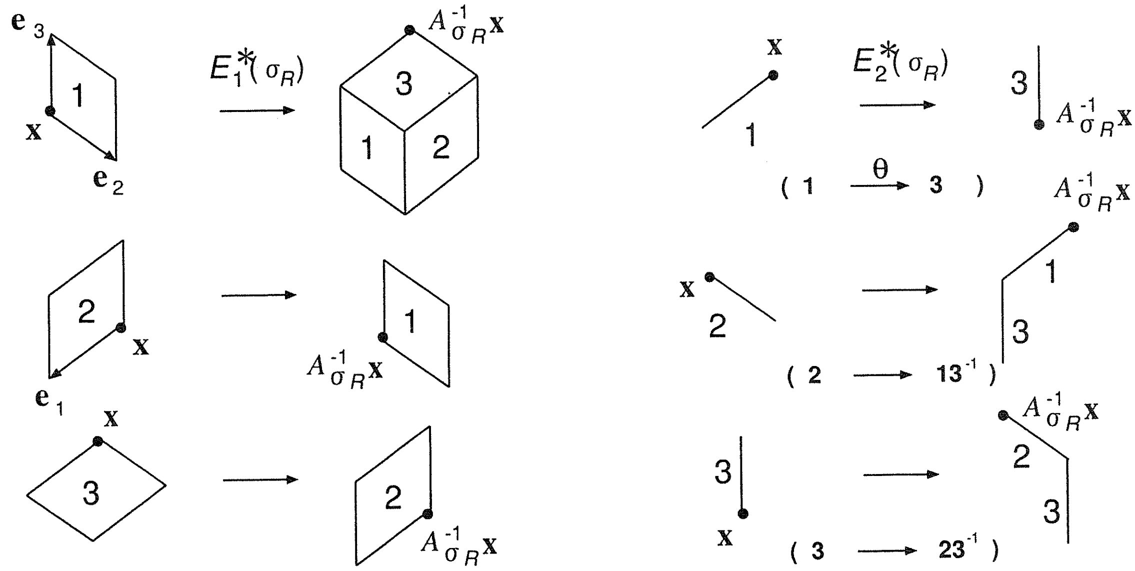


図 1: Dual extension $E_2^*(\sigma_R)$, $E_1^*(\sigma_R)$

ここでは $\mathbf{x} \in \boldsymbol{Z}^3$, $\mathbf{e}_1 = (1,0,0)$, $\mathbf{e}_2 = (0,1,0)$, $\mathbf{e}_3 = (0,0,1)$, Substitution σ の行列 A_σ は $a_{i,j} = \{$ 文字列 $\sigma(j)$ の中で文字 i が現れる回数 $\}$ で定義され,

$$A_{\sigma_R} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

となる.

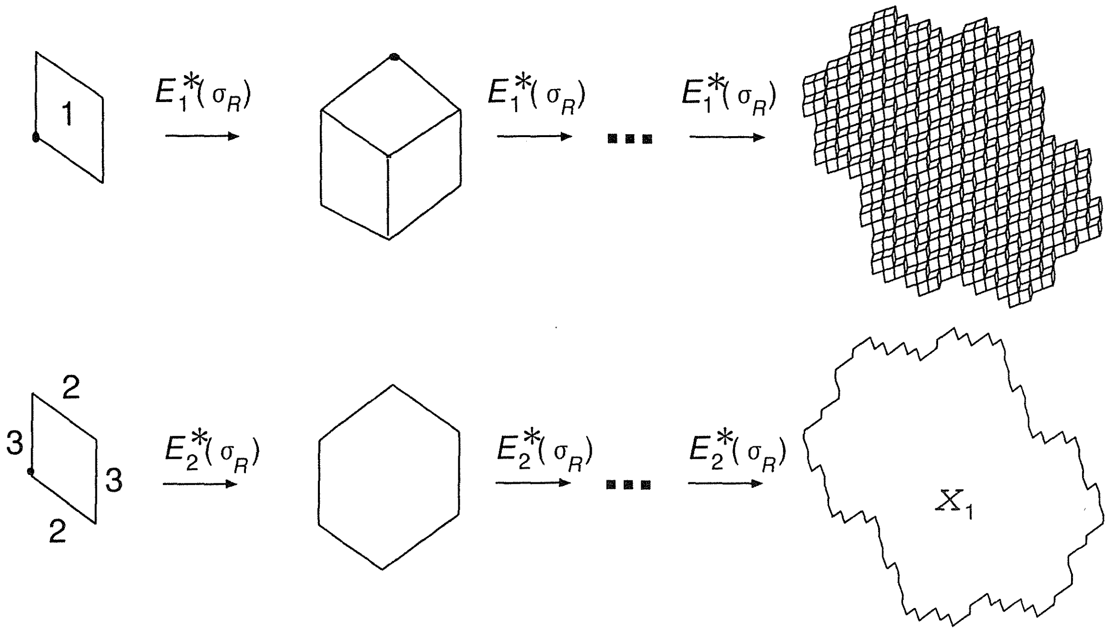


図 2: $E_1^*(\sigma_R)$ による Atomic surface X_1

3 つの平行四辺形タイル 1, 2, 3 から $E_1^*(\sigma_R)$ と（ある適切な）縮小を繰り返すことにより，平行四辺形タイル i がそれぞれ X_i $(i = 1, 2, 3)$ という Fractal boundary をもつ領域に収束する．これらを Atomic surface と呼ぶ．Atomic surface は，一般的に以下の 3 つの条件をみたす，任意 Rank の Substitution σ について同様に構成できる．(論文 [1])

1. Pisot: 行列 A_σ の最大固有値 λ が Pisot 数．つまり，λ は $\lambda > 1$ となる代数的整数で，その他共役根は $|\lambda'| < 1$.
2. Unit: $|\mathrm{Det}(A_\sigma)| = 1$.
3. Irreducible: 固有方程式 $\Phi(x)$ が既約.

Rank 3 の Substitution σ に関する Atomic surface の Boundary は通常 Fractal な構造をもち，Atomic surface の Topological な特徴を捉える上でも Boundary の構造，つまり 1 次の Dual extension $E_2^*(\sigma)$ の解析が重要となってくる．ところで Substitution σ_R については，1 次の Dual extension $E_2^*(\sigma_R)$ に随伴した Endomorphism $\theta(1) = 3$, $\theta(2) = 13^{-1}$, $\theta(3) = 23^{-1}$ は，σ_R の逆写像 $\sigma_R^{-1}(1) = 3$, $\sigma_R^{-1}(2) = 3^{-1}1$, $\sigma_R^{-1}(3) = 3^{-1}2$ の鏡像になることは知られていた．論文 [2] では主定理として，以上の性質，つまり可逆な Substitution に対する Atomic surface の Boundary は，その逆写像によって与えられるという結果を得る．

参考文献

[1] Pierre ARNOUX and Shunji ITO: *Pisot substitutions and Rauzy fractals*, Bull. Belg. Math. Soc. **8** (2001), 181-207.

[2] Hiromi EI: *Some properties of invertible substitutions of rank d, and higher dimensional substitutions*, Osaka J. Math. **40** (2003), 543-562.

[3] Hiromi EI and Shunji ITO: *Decomposition theorem on invertible substitutions*, Osaka J. Math. **35** (1998), 821-834.

[4] Hiromi EI and Shunji ITO: *Tiling from some β-cubic Pisot numbers*, preprint.

[5] Marshall Hall, Jr.: The Theory of Groups, The Macmillan Company, 1959.

[6] Shunji ITO and Minako KIMURA: *On Rauzy fractal*, Japan J. of Industrial and Applied Mathematics **8** (1991), 461-486.

[7] Yuki SANO, Pierre ARNOUX and Shunji ITO: *Higher dimensional extensions of substitutions and their dual maps*, Journal D'analyse Mathématique **83** (2001), 183-206.

[8] Bo Tan, Zhi-Xiong Wen and Yi-Ping Zhang: *Decomposition theorem for invertible substitutions on three-letter alphabet*, Comptes Rendus Mathematique **336** No.2 (2003), 111-116.

[9] Zhi-Xiong Wen and Zhi-Ying Wen: *Local isomorphisms of invertible substitutions*, C.R.Acad.Sci.Paris, t.318, Série I (1994), 299-304.

[10] Zhi-Xiong Wen and Yi-Ping Zhang: *Some remarks on invertible substitutions on three letter alphabet*, Chin.Sci.Bulletin **44** No.19 (1999), 1755-1760.

Workshop「数論とエルゴード理論」

—— カオス暗号入門 ——

本研究集会は，伊藤俊次（金沢大，盛田健彦（広島大）を世話人として，金沢大学サテライトプラザにおいて，2004年8月2日(月)〜5日(木)の日程で開催された．カオス暗号をテーマ に，それと関連して離散力学系の「離散化」を視野に入れ，研究者の討論，情報交換の場としての意味はもとより，大学院生の勉強会としても有用となるものを目指して企画された．以下に，そのプログラムと，講演アブストラクトを付けておく．

プログラム

8月2日(月)

14:00 - 15:00　15:20 - 16:20　林 彬 (金沢工大)
　暗号入門

8月3日(火)

10:00 - 11:00　11:20 - 12:20　増田 直紀 (理化研)
　カオス暗号入門（1）

14:00 - 15:00　常田 明夫 (熊本大)
　カオス写像と最大周期系列の基礎

15:20 - 16:20　吉岡 大三郎 (熊本大)
　最大周期系列の生成法と通信への応用

16:40 - 17:40　藤田 岳彦（一橋大）
　Levy 変換の離散化について

8月4日(水)

10:00 - 11:00　11:20 - 12:20　増田 直紀 (理化研)
　カオス暗号入門（2）

14:00 - 15:00　井上 友喜 (愛媛大)
　セルオートマトンの暗号への応用

15:20 - 16:20　田西 秀紀 (金沢大)
　カオスストリーム暗号の大熊氏による暗号解読に関する考察

8月5日(木)

10:00 - 11:00　11:20 - 12:20　藤崎 礼志（金沢大）
　グラフからみた離散化された変換に基づく最長周期列について

14:00 - 15:00　奥富　秀俊 (東芝情報システム)
　カオス暗号の実装について

カオス暗号入門

増田 直紀 (理化学研究所)

カオス力学系は、初期値鋭敏依存性、位相的推移性、周期解の稠密性などによって特徴づけられる。情報理論的観点からは、カオス系は軌道にそって情報が損失していく系である。これらの性質を利用して十年ほど前から現在まで、様々なカオス暗号方式が提案されてきた。本講演ではカオス暗号の歴史を紹介するとともに、状態離散化カオス暗号とそれにまつわる状態離散化カオス写像の理論的アプローチについて紹介する。

多くのカオス暗号は 1990 年に提出された「カオス同期」のアイディアに準拠している。カオス同期とは 2 つの同一または非常に近いかオス力学系が、自分の力学系に関する部分的な情報を送って同期状態を作りだすことである。この提案に基いて、1990 年代前半に様々なカオス暗号系が構築されたが、簡単に解読されてしまうことがすぐにわかった。それは、カオス同期を可能にするためにはパラメータの値を少しずらすことに対しての安定性や、カオス力学系の軌道が時間の関数として遅く変化することが必要なのだが、これがまさに解読のための情報を与えるからである。また、計算時間や要するメモリー空間といった観点からの効率と安全性のトレードオフが考慮されなかったり、既存の暗号理論との関係が十分に論じられてこなかったことも問題だった。

カオスを用いた秘密鍵ブロック暗号系は 1989 年以来提案されてきた。平文のブロックから暗号文のブロックへの 1:1 写像の構成にカオス写像が用いられた。ところが、大半のものはカオス同期と同様に、トレードオフに関する考察の欠如、既存の暗号理論の意味での安全性解析との関係が述べられていないことが問題であった。そして、 1:1 性を保証するために拡大方向のみでなく縮小方向も持つようなカオスが用いられ、この縮小方向がために容易に解読されてしまった。

これらの状況の中で、増田・合原は 1999 年に状態離散化カオス暗号を提案した。様式は秘密鍵ブロック暗号である。暗号系の基本要素として、変形テント写像 f_a を基本写像として用いる。f_a はテント写像の山の位置 a を $\frac{1}{2}$ からずらしたものである。山の位置は秘密鍵として用いられる。f_a のリアプノフ指数は、$\lambda = -a \log a - (1-a)\log(1-a)$ である。

直観的には、平文 $x \in [0,1]$ に対して、$f_a^n(x)$ (n は十分大きな整数) を暗号文としたいが、f_a は二対一なので復号化が一意的に定義できない。そこで、平文空間、暗号文空間、鍵空間、変換を離散化し、明示的に一対一写像を導く。簡単のために、変形テント写像の定義域と値域 $[0,1]$ を $[0,M]$ に引き伸ばして考える。このように拡大スケーリングされた変形テント写像を F_A と

書く。ここで、整数 M は、平文空間 P'、暗号文空間 C'、鍵空間 K' の位数であり、

$$P' = C' = K' = \{1, 2, \ldots M\} \tag{1}$$

である。

次に、離散化変形テント写像が備えるべき条件を考える。まず、x 軸上の黒丸が平文空間 P' 上の点である。$X \in P'$ の行き先を、$F_A(X)$ としてしまうと二つの不都合が生じる。一つは、左から来た点と右から来た点の行き先が一致してしまう可能性のあること、もう一つは一般に $F_A(X) \notin P'$ であることである。そこで、離散化変形テント写像 $\tilde{F_A} : P' \to P', A \in K'$ を以下のように定義する。

$$\tilde{F_A}(X) \equiv |\{X' \in P' | F_A(X') < F_A(X))\}| + 1.$$

ここで、$|\cdot|$ は集合の位数である。$\tilde{F_A}(X)$ は X に 全ての $F_A(X')$ $(X' \in P')$ の中での $F_A(X)$ の昇順を対応させたものである。図 ?? では、X の行き先は、左と右の黒線で囲まれた領域内の黒丸の個数である。もし $F_A(X_1) = F_A(X_2), X_1 < A < X_2$ ならば $\tilde{F_A}(X_1) + 1 = \tilde{F_A}(X_2)$ とする。$\tilde{F_A}$ は P' 上一対一である。

状態離散化カオス暗号は暗号化器

$$e_A : P' \to C', \quad e_A(X) = \tilde{F_A}^n(X)$$

と、復号化器

$$d_A : C' \to P', \quad d_A(X) = \tilde{F_A}^{-n}(X)$$

で定義される。なお、数式では離散化変形テント写像と逆写像は各々、

$$\tilde{F_A}(X) = \begin{cases} \left\lceil \frac{M}{A} X \right\rceil, & (1 \le X \le A), \\ \left\lfloor \frac{M}{M-A}(M - X) \right\rfloor + 1, & (A < X \le M) \end{cases}$$

$$\tilde{F_A}^{-1}(Y) = \begin{cases} X_1, & (m(Y) = Y, \quad \frac{X_1}{A} > \frac{M-X_2}{M-A}), \\ X_2, & (m(Y) = Y, \quad \frac{X_1}{A} \le \frac{M-X_2}{M-A}), \\ X_1, & (m(Y) = Y + 1) \end{cases}$$

と表される。ただし、

$$m(Y) \quad \equiv \quad \left\lfloor \frac{AY}{M} \right\rfloor - \left\lceil \frac{(A-M)Y}{M} \right\rceil + 1$$

である。ここで、$\lfloor\rfloor, \lceil\rceil$ は、それぞれ切り捨て、切り上げを意味する。

この暗号系は、変型テント写像のパラメータに関する鋭敏依存性から、鍵に関する鋭敏依存性が保証される。さらに、歪テント写像の相関関数の指数的減衰と混合性が、それぞれ、平文と暗号文の相関の指数的減衰と、平文のあるビットと暗号文のあるビットの独立性に対応する。

次に、2:1 の変型テント写像から 1:1 の状態離散化写像を導出するために、元の連続状態写像の値域を少しずらす必要があった。状態数 M が無限の極限では元の写像と変型写像は L^p $(1 \leq p \leq \infty)$ ノルムの意味では一致するが、微分を考慮したゾボレフノルムの意味では収束しない。すると、微分を含むペロン・フロベニウス演算子の不動点として求められる不変測度の収束性も保証されないことが予想される。変型写像が元の写像の性質をどれくらい反映できているかを知ることは、カオス暗号のためのみならず、ディジタル計算機でカオス軌道をどれだけ精確に計算できるのか、という観点からも重要な問いである。そこで、周期軌道の長さや数の M に関するスケーリング則、不変測度の収束性、リアプノフ指数の変化、などの観点から、状態離散化カオス写像の性質を解析した。その結果、1:1 変型テント写像 (を連続に補完したもの) は弱収束の意味で元の変型テント写像に収束すること、スケーリング則はランダム・パーミュレーションのそれに十分近いこと、などカオス暗号系の観点からは好ましい性質が導き出された。

参考文献：

- Naoki Masuda and Kazuyuki Aihara, Dynamical characteristics of discretized chaotic permutations. International Journal of Bifurcation and Chaos, 12(10), 2087–2103, 2002.

- Naoki Masuda and Kazuyuki Aihara, Cryptosystems with discretized chaotic maps. IEEE Transactions on Circuits and Systems Part I, 49(1), 28–40, 2002.

- 合原 一幸, カオス学入門 (第 15 章), 放送大学教育振興会, 2001.

- 増田 直紀, 合原 一幸, 状態離散化カオス写像を用いた暗号システム. 臨時別冊・数理科学『現代暗号とマジックプロトコル』, サイエンス社, 65–75, September 2000.

- 増田 直紀, 合原 一幸, 離散化カオス写像を用いた暗号システム. Computer Today, サイエンス社, 14–20, May 2000.

- 増田 直紀, 合原 一幸, 有限状態パイコネ変換を用いたカオス暗号. 電子通信情報学会論文誌, J82-A(7), 1038–1046, 1999.

[講演題目]　カオス暗号の実装について
～Tritium^{R}暗号のご紹介と事業化の取り組み～

[所　属]　東芝情報システム株式会社　技術企画部

[氏　名]　奥富　秀俊

[概　要]　以　下

東芝情報システムは，2000年度，2001年度「ＩＰＡ未踏ソフトウェア創造事業」での資金を得て，カオスを利用したストリーム暗号の基本設計に関する研究開発を実施し(申請者／開発者:奥富)，2003年度から，当該方式を改良した「Tritium^{R}」暗号について，事業化を目標とした活動を実施している．本発表では，Tritiumにおけるカオスの利用等の数理面，実装面，検証状況の説明のみならず，暗号技術の実用化の際に直面する課題や，ユーザ・アンケート結果を踏まえた営業的視点での話題についても触れる．（構成は以下）

1．Tritium^{R}の説明
2．実装と性能
3．検証状況と課題
4．ユーザから見たセキュリティの要求
5．暗号の事業化活動と課題

尚，ご参考までにTritiumの実装性能を以下表に示す．
（Tritium はユビキタス社会に欠かせない小型軽量端末への搭載を目標に，限られた計算機資源下でも運用可能であることを基本コンセプトとしている．）

表．Tritiumの実装性能

■H／W(電子回路)実装 (0.18μプロセス, 1.5V, 50MHz 駆動)	
回路規模	6Kゲート
処理速度	200Mbps
■S／W(携帯電話スペク)実装 (ARM920T 50MHz)	
実行時モジュール容量	5Kバイト以下(非圧縮サイズ)
処理速度	7～12Mbps(バッファ量に依存)
■S／W(PCスペク)実装 (Pentium4 2.0GHz)	
処理速度	794Mbps

セルオートマトンの暗号への応用

井上　友喜　　　　愛媛大学工学部

セルオートマトンの暗号への応用について，学生たちと検討したことを報告する．なお，以下に述べるものは方式としては秘密鍵の暗号である．

空間が格子状になっており，それぞれの格子点に離散的な状態をとるセルが配置されているとする．時刻 t は非負の整数をとり，位置 i は整数をとり，セルの状態は 0 または 1 の値（2状態）をとる1次元セルオートマトンを考える．

時刻 $t+1$ のときの位置 i のセルの状態が，時刻 t のときの位置 $i-1$，i，$i+1$ のセルの状態により決定される1次元2状態3近傍セルオートマトンを用いた暗号の試みをまず述べる．

一般にセルオートマトンはその時空間パターンに基づいて，4つのクラス（クラス1から4）に分類されている．力学系の概念に対応させると，クラス1が安定な不動点への収束，クラス2が安定周期軌道への収束，クラス3がカオスに対応する．クラス4は特殊な状況で，1次元2状態3近傍セルオートマトンにおいては見られない．そこで，カオスに対応するクラス3に属するものをうまく利用できないかを考えた．

Wolframのルール番号でルール90の1次元2状態3近傍セルオートマトンはクラス3に属し，ほとんどカオス的様相を呈するが，セルの個数が 2^n であれば，時刻 2^{n-1} のときにセルの状態はすべて 0 になる．セルの状態がすべて 0 になるまでの振る舞いはカオス的であるので途中のデータのいくつかから暗号文をつくり，どの時刻のどこのデータかということを鍵とするような暗号を考えた．

なお，暗号系はシステムそのものは公開されているのが原則らしく，その意味では上記のような暗号は価値あるものとは言えないようである．

次に，1次元2状態5近傍セルオートマトンを用いた暗号についても試みたので概略を簡単に述べる．これは，1次元2状態5近傍総和型ルール21を用いるもので n 回反復後データと途中のデータのいくつかを用いて暗号文を作り，反復回数と途中のどこのデータを用いたかを鍵とするものである．詳細については省略する．

確率論サマースクール

2004年度の確率論サマースクールは九州大学で開催された．出席者は71名．講演者およびタイトルは

小倉 幸雄・富崎 松代　一次元拡散過程
会田 茂樹・高信 敏　Rough path analysis

なお，予稿等詳細は Web Site
http://www.math.kyoto-u.ac.jp/probability/sympo/PSS04.html を参照．以下はそのプログラムである．

場所: 九州大学工学部本館9番教室（箱崎キャンパス）
日時: 2004年8月18日(水)–21日(土)

8月18日(水)

9:50 – 10:50　富崎 松代 (奈良女子大学)
(D-1) 導入，広義拡散作用素
11:00 – 12:00　高信 敏 (金沢大学大学院自然科学研究科)
(R-1) 動機，概観，Young 積分，積分 $\int_s^t f(x_u)dx_u$ の連続性定理 (I)

13:40 – 15:10　富崎 松代 (奈良女子大学)
(D-2) α 調和関数と境界の分類，Green 関数と Green 作用素，例
15:30 – 17:00　高信 敏 (金沢大学大学院自然科学研究科)
(R-2) Young 積分，積分の連続性定理 (II)

8月19日(木)

9:50 – 10:50　富崎 松代 (奈良女子大学)
(D-3) 基本解，Markov 半群

11:00 – 12:00　高信 敏 (金沢大学大学院自然科学研究科)
(R-3) rough path の導入 (R-1, R-2 を振り返って抽象的に定義する)
Almost rough path などの概念
13:40 – 17:00　Young Forum

8月20(金)

9:50 – 10:50　小倉 幸雄 (佐賀大学)
(D-4) Markov 過程概観，一次元拡散過程
11:00 – 12:00　会田 茂樹 (大阪大学大学院基礎工学研究科)
(R-4) Brown 運動の path を rough path の空間に埋め込む方法
13:40 – 15:10　小倉 幸雄 (佐賀大学)
(D-5) 広義拡散過程，一次元 Brown 運動の時刻変更による構成
15:30 – 17:00　会田 茂樹 (大阪大学大学院基礎工学研究科)
(R-5) Rough path analysis の応用

8月21日(土)

9:20 – 10:20　小倉 幸雄 (佐賀大学)
(D-6) 連続性定理，斜積過程への応用
10:30 – 11:30　高信 敏 (金沢大学大学院自然科学研究科)
(R-6) ODE (SDE) の解の連続性定理

(D=一次元拡散過程，R=Rough Path Analysis)

International conference on

Jump-type Markov processes and stochastic analysis

日程：　8 月 30 日 (月) − 9 月 1 日 (水)
場所：　大阪大学基礎工学部シグマホール
世話人：　会田茂樹 (大阪大学), 福島正俊 (関西大学), 熊谷隆 (京都大学), 桑江一洋 (横浜市立大学), 竹田雅好 (東北大学), 上村稔大 (兵庫県立大学)

プログラム：

30 th/AUG.

10:00 - 10:40 Masayoshi Takeda (Tohoku University)
Gaugeability with Applications to Symmetric α-Stable Processes

11:00 - 12:00 Tusheng Zhang (University of Manchester)
Stochastic differential equations with non-Lipshitz coefficients

13:20 - 14:00 Kumi Yasuda (Kyushu University)
Semi-self-similar Levy processes on the p-adics

14:10 - 14:50 Yasushi Ishikawa (Ehime University)
Supprot theorem of jump type process and related topics

15:10 - 16:10 René L. Schiling (University of Sussex)
Bochner's subordination, Dirichlet fomrs and a functional calculus

16:20 - 16:50 Kaneharu Tsuchida (Tohoku University)
Criticality of Schrodinger type operators and differentiability of spectral functions

16:50 - 17:20 Yuuichi Shiozawa (Tohoku University)
Principal eigenvalues for time changed processes of one-dimensional α-stable processes

31 st/AUG.

10:00 - 10:40 Takashi Kumagai (Kyoto University)
Heat Kernel estimates for jump-type processes on d-sets

11:00 - 12:00 Renming Song (University of Illinois at Urbana-Champaign)
Potential Theory of Geometric Stable Processes

13:20 - 14:00 Kazuhiro Kuwae (Yokohama City University)
Perturbation of symmetric Markov processes (joint work with Z.-Q.Chen, P.J. Fitzsimmons and T.-S. Zhang)

14:10 - 14:50 Hiroshi Kaneko (Tokyo University of Sciences)
(r, p)-capacities associated with Dirichlet spaces on a local field

15:10 - 16:10 Krzysztof Bogdan (Polish Academy of Sciences and Wrolaw University of Technology)
Integrability of exit times (joint work with Rodrig Banuelos)

16:20 - 17:00 Toshihiro Uemura (University of Hyogo)
Feller properties of some classes of jump-type symmetric Markov processes

1 st./SEP.

10:00 - 10:40 Masatoshi Fukushima (Kansai University)
Poisson point processes attached to symmetric Markov processes (joint work with Hiroshi Tanaka)

11:00 - 12:00 Krzysztof Burdzy (University of Washington)
Skew-Brownian flow: Ray-Knight-type theorem and lenses (joint work with M. Barlow, H. Kaspi, A. Mandelbaum and Z. Chen)

Semi-self-similar Lévy processes on the p-adics

Kumi Yasuda (Kyushu University)

Abstract: The field of p-adic numbers is totally disconnected and any stochastic process thereon is of purely jump type. We will discuss on properties of (non-symmetric) semi-self -similar Lévy processes on the p-adics and limit theorems for them.

Criticality of Schrodinger type operators and differentiability of spectral functions

Kaneharu Tsuchida (Tohoku University)

Abstract: Let μ be a signed Radon measure in the Kato class and $\mathcal{H}^{\mu}$ a Schrodinger type operators, $\mathcal{H}^{\mu} = (-\Delta)^{\alpha/2} - \mu$. When $\mathcal{H}^{\mu}$ is critical, we give a new method for construction an $\mathcal{H}^{\mu}$-harmonic function. Using an h-transform defined by the harmonic function, we show the differentiability of spectral functions for symmetric α-stable processes.

Principal eigenvalues for time changed processes of one-dimensional α-stable processes

Yuuichi Shiozawa (Tohoku University)

Abstract: In this talk, we calculate principal eigenvalues for time changed processes of absorbing α-stable processes in one dimension. As its application, we give a necessary ans sufficient condition for some measures being gaugeable

Potential theory of geometric stable processes

Renming Song (University of Illinois at Urbana-Champaign)

Abstract: In this talk we will first introduce the concepts of geometric infinitely divisible processes and geometric stable processes. Then we will present the asymptotic behaviors of the potential density and the Levy density of geometric subordinators. And then we talk about results about the asymptotic behaviors of the Green function and jumping function of the symmetric geometric stable processes. Our strategy for dealing with symmetric geometric stable processes is to realize them as subordinate Brownian motions via geometric stable subordinators and apply the asymptotic behaviors of geometric stable subordinators. The asymptotic behaviors near zero of Green functions

and jumping functions of symmetric geometric stable processes exhibit features that are very different from the ones for stable processes. The Green function behaves near zero as $1/(|x|^d \log^2 |x|)$, while the jumping function behaves like $1/|x|^d$. We also present the asymptotic behaviors of the Green function and jumping function of subordinate Brownian motions with iterated geometric stable subordinators. As applications of the asymptotic behaviors, we establish estimates on the capacity of small balls for these processes, as well as mean exit time estimates from small balls and a Harnack inequality for these processes.

Perturbation of symmetric Markov processes (joint work with Z.-Q.Chen, P.J. Fitzsimmons and T.-S. Zhang)

Kazuhiro Kuwae (Yokohama City University)

Abstract: We provide a path-space integral representation of the semigroup associated with the quadratic form obtained by lower order perturbation of a symmetric Dirichlet form including jump and killing terms. The representation is a combination of Feynman-Kac and Girsanov formula, and extends the all previous known results in the framework of symmetric Markov processes. We also provide a Feynman-Kac formula for Nakao's divergence-like CAF.

(r,p)-capacities associated with Dirichlet spaces on a local field

Hiroshi Kaneko (Tokyo University of Sciences)

Abstract: On a local field, one can find stochastic process whose infinitesimal generator is described as some r-th order derivative. Even non-linear potential theoretic features could be discussed based on Dirichlet space theory.

Feller properties of some classes of jump-type symmetric Markov processes

Toshihiro Uemura (University of Hyogo)

Abstract: We show the Feller property for a jump-type symmetric Markov process. In order to show them, we first give the generator of the corresponding Dirichlet form of the process in a precise form and estimate the exit times from balls of the process. Following the ideas of Bass-Levin (see also Bass-Kassman, Song-Vondrachek...) , we

show the Holder continuities of the harmonic funcitions. Then using this reguralities, we are able to show the Feller property.

Poisson point processes attached to symmetric Markov processes (joint work with Hiroshi Tanaka)

Masatoshi Fukushima (Kansai University)

Abstract: For a symmetric Markov process accessible to a specific one point of the state space, we give its decomposition and construction in terms of the absorbed process and Poisson point process of excursions at the point, completing Ito's programme under symmetry.

Gaugeability with Applications to Symmetric α-Stable Processes

Takeda Masayoshi, Tohoku University, Mathematical Institute

The purpose is to give two applications of gaugeability to symmetric α-stable processes.
$\mathbb{M} = (\Omega, \mathbb{P}_x, X_t)$: a symmetric α-stable process on $\mathbb{R}^d$ $(0 < \alpha < 2)$.
$(\mathcal{E}^{(\alpha)}, \mathcal{D}(\mathcal{E}^{(\alpha)}))$: the Dirichlet form of $\mathbb{M}^\alpha$.
Cap(A): the capacity of a set A defined by $(\mathcal{E}^{(\alpha)}, \mathcal{D}(\mathcal{E}^{(\alpha)}))$.
For an open set $D \subset \mathbb{R}^d$, $\mathbb{M}^D = (\mathbb{P}_x, X_t^D)$: the absorbing process on D

Assume that $\mathbb{M}^D$ is transient, that is, $\mathrm{Cap}(\mathbb{R}^d \setminus D) > 0$ if $\alpha \geq d$

$G_D(x, y)$: the Green function of $\mathbb{M}^D$.

Definition 1.
A positive Radon measure μ on $\mathbb{R}^d$ is said to be in the class $\mathcal{S}_\infty^D$, if for any $\epsilon > 0$ there exists a compact set $K \subset D$ and $\delta > 0$ such that

$$\sup_{(x,z)\in D\times D\setminus d} \int_{K^c} \frac{G_D(x,y)G_D(y,z)}{G_D(x,z)} \mu(dy) \leq \epsilon$$

and for all measurable sets $B \subset K$ with $\mu(B) < \delta$,

$$\sup_{(x,z)\in D\times D\setminus d} \int_{B} \frac{G_D(x,y)G_D(y,z)}{G_D(x,z)} \mu(dy) \leq \epsilon$$

$\mu \in \mathcal{S}_\infty^D \Longleftrightarrow$ PCAF A_t^μ. (**Revus Correspondence**)

For a measure μ in $\mathcal{S}_\infty^D$, define

$$\lambda(\mu; D) = \inf\left\{\mathcal{E}^{(\alpha)}(u,u) : \ u \in C_0^\infty(D), \ \int_D u^2(x)\mu(dx) = 1\right\}.$$

$p_t^{\mu,D}(x,y)$: the integral kernel of the Feynman-Kac semigroup,

$$p_t^{\mu,D} f(x) := \mathbb{E}_x[\exp(A_t^\mu) f(X_t); t < \tau_D] = \int_D p_t^{\mu,D}(x,y) f(y) dy$$

$G^{\mu,D}(x,y)$: the Green function, $G^{\mu,D}(x,y) = \int_0^\infty p_t^{\mu,D}(x,y)dt$.

Theorem 1.(Z.Zhao, T, Z.Q.Chen)
Let $\mu \in \mathcal{S}_\infty^D$. Then the following conditions are equivalent:

(i) (**gaugeability**) $\sup_{x\in D} \mathbb{E}_x[e^{A^\mu_{\tau_D}}] < \infty$
$\left(\Longleftrightarrow \exists x_0 \in D \text{ s.t. } \mathbb{E}_{x_0}[e^{A^\mu_{\tau_D}}] < \infty\right)$;

(ii) (**subcriticality**) $G^{\mu,D}(x,y) < \infty$ for $x, y \in D$, $x \neq y$;

(iii) $\lambda(\mu; D) > 1$.

Applications

(i) The first is relevant with the **ultracontractivity** of Schrödinger semigroups p_t^μ:

$$p_t^\mu f(x) = \mathbb{E}_x[\exp(A_t^\mu) f(X_t)].$$

$\|p_t^\mu\|_{1,\infty}$:the operator norm of p_t^μ from $L^1(\mathbb{R}^d)$ to $L^\infty(\mathbb{R}^d)$.

Theorem 2.
Let $\mu \in \mathcal{S}_\infty$ with $\int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}^d} |x-y|^{\alpha-d} d\mu(x) d\mu(y) < \infty$. Then

$$\lambda(\mu; \mathbb{R}^d) > 1 \Longleftrightarrow \|p_t^\mu\|_{1,\infty} \leq \frac{c}{t^{d/\alpha}}, \quad t > 0.$$

(ii) $\mathbb{B}^\alpha = (\bar{X}_t, \bar{\mathbb{P}}_x)$: the branching α-symmetric stable process with the branching rate k, a smooth measure of $\mathbb{M}^{(\alpha)}$,

$$\bar{\mathbb{P}}_x[T > t | \sigma(X)] = \exp(-A_t^k),$$

where T is the first splitting time.
$\{p_n(x)\}_{n\geq 2}$: the branching mechanism
$Q(x) = \sum_{n\geq 2} n p_n(x)$, $\mu(dx) = (Q(x) - 1)k(dx)$.

Assume that $\sup_{x\in\mathbb{R}^d} Q(x) < \infty$.

Theorem 3.
Let K be a closed set with $\mathrm{Cap}(K) > 0$. If $\mu \in \mathcal{S}_\infty^{\mathbb{R}^d\setminus K}$, then

$$\lambda(\mu; \mathbb{R}^d \setminus K) > 1 \Longleftrightarrow \bar{\mathbb{E}}_x[N_K] < \infty.$$

Here N_K is the number of branches of $\mathbb{B}^\alpha$ ever hitting K.

References

[C] Z.Q. Chen, Gaugeability and conditional gaugeability, Trans. Amer. Math. Soc. 354 (2002), 4639-4679.

[CS] Z.Q. Chen and R.M. Song, General gauge and conditional gauge theorems, Ann. Probab., 30 (2002), 1313-1339.

[CZ] Z.Q. Chen and S.T. Zhang, Girsanov and Feynman-Kac type transformations for symmetric Markov processes. Ann. Inst. Henri Poincare , 38 (2002), 475-505.

[GK] A. Grigor'yan and M. Kelbert, Recurrence and transience of branching diffusion processes on Riemannian manifolds. Ann. Probab. 31 (2003), 244-284.

[TU] M. Takeda and T. Uemura, Subcriticality and Gaugeability for Symmetric α-Stable Processes, Forum Math. 16 (2004), 505-517.

ランダム作用素のスペクトルとその周辺

標記の研究集会は南就将（筑波大学大学院数理物質科学研究科）を世話人として平成１６年１１月２４日から２６日にかけて京都大学大学院人間・環境学研究科において開催された。参加者は３１名であった。

昨年からの流れを引き継いで「ランダム作用素のスペクトル」を広義に解釈し、ランダムなシュレーディンガー作用素、ランダム行列、量子カオス系等について総合的な研究を行なった。講演数は一般からの応募を含めて前回よりも２件多い１２件であった。また確率論関係者だけでなく、物理学者、作用素論研究者の出席も得られて、充実した研究集会になったと思う。なお、会場の用意、開催期間中の集会の運営にあたっては上木直正氏にご協力いただいた。この場を借りて深く感謝したい。

研究集会のプログラム、および各講演の概要を以下に示す。

プログラム

１１月２４日 (水)

14:00–15:00 永尾太郎（名古屋大学大学院多元数理科学研究科）
Asymmetric exclusion process and random matrices

15:15–16:15 笹本智弘（東京工業大学大学院理工学研究科）
外場のある PNG 模型と外場のあるランダム行列

16:30–17:30 永井克己（筑波大学大学院数理物質科学研究科）
The integrated density of states of a one-dimensional random Schrödinger operator with white noise potential and background

１１月２５日（木）

10:00–11:00 野村祐司（東京工業大学大学院理工学研究科）
無限被覆グラフ上のラプラシアンのスペクトルについて（樋口雄介氏との共同研究）

11:15–12:15 中野史彦（高知大学理学部）
ランダム磁場をもつ系のスペクトルのゆらぎについて

13:30–14:30 上木直昌（京都大学大学院人間・環境学研究科）
Wegner estimate for random Dirac operators

14:45–15:45 高原純一（京都大学大学院人間・環境学研究科）
一般化された合金型ポテンシャルエネルギーを持つシュレーディンガー作用素の固有関数の局在化について

16:00–17:00 神永正博（東北学院大学工学部）
Spectrum of Schrödinger operators with Poisson random potential

１１月２６日（金）

10:00–11:00 南就将（筑波大学大学院数理物質科学研究科）
無限分解可能な点過程とエネルギー準位統計

11:15–12:15 小谷眞一（大阪大学大学院理学研究科）
Floquet 指数と KdV 力学系-不変測度について

13:30–14:30 伊東恵一（摂南大学工学部）

Anderson localization of lattice Green's function with random complex potential derived from the 2D $O(N)$ spin model

14:45–15:45 牧野浩典（東海大学電子情報学部）

ベリー・ロブニックのを基礎仮定とする可積分量子系の準位統計 II

各講演の概要

永尾太郎：Asymmetric exclusion process and random matrices

非対称排他過程（Asymmetric Exclusion Process）は、一次元非平衡統計力学の単純化されたモデルである。Johansson は、粒子が稠密に配置された初期条件に対し、粒子のカレントがランダム行列の最大固有値分布と等価な表式で表されることを示した [1]。

一方、ランダム行列の最大固有値分布は、直交多項式の方法により、Fredholm 行列式表示を用いて書くことができる。したがって、Fredholm 行列式表示の漸近的な振る舞いを評価することにより、非対称排他過程のカレントゆらぎを評価することができる。

最近、講演者らは、Johansson の式を、一般の初期条件の場合に拡張することに成功した [2]。この結果を解説し、さらに、粒子の初期配置が稠密でない初期条件に対するカレントゆらぎについて報告する。

参考文献

[1] K. Johansson, Commun. Math. Phys. **209** (2000) 437.
[2] T. Nagao and T. Sasamoto, Nucl. Phys. **B699** (2004) 487.

笹本智弘：外場のある PNG 模型と外場のあるランダム行列

近年, 1 次元多核成長模型 (PNG 模型) とよばれる界面成長模型の高さ揺らぎが, GUE 等のランダム行列の最大固有値の揺らぎと等しいことが明らかにされつつある. そのなかで, 外場のある PNG 模型を考えたときに現れるある分布関数は, ランダム行列解釈があまり明らかではなかった. 本講演では, この分布が外場のあるランダム行列として解釈できることを示した. さらに PNG 模型の多点高さ分布と vicious walk の関係についても解説した.

離散 PNG 模型において droplet の左端のみに外場のあるモデルを考える. 核生成の頻度を記述するパラメータを q, 外場の強さを記述するパラメータを γ とする. Baik-Rains は, 外場の強さ γ が 1 の時, H_N を時刻 $2N$ における原点でのスケールされた高さとして

$$\lim_{N\to\infty} P(H_N \le s) = F_1(s)^2$$

となることを示した ([1]). ここで F_1 は GOE ランダム行列の最大固有値のスケールされた確率分布で, GOE Tracy-Widom 分布と呼ばれる. したがって F_1^2 は 2 つの GOE の最大固有値の大きい方の分布と解釈でき, GOE^2 などと呼ばれる.

しかしながら, 外場のある PNG 模型においては, GOE^2 から GUE への遷移というものもあり, GOE 2 つというランダム行列解釈ではそれは理解できない. 本講演では, GOE^2 という分布関数が, 外場のあるランダム行列の特別の場合の最大固有値分布として理解できることを示した ([2]). ここで外場のあるランダム行列とは,

$$H = H_0 + V\ ,$$

ただし H_0 は GUE ランダム行列, V はある決まった行列, というようなものである.

さらに, 外場のある PNG 模型の多点分布に関しては, [2] において調べられていたのであるが, 多層版の PNG 模型の vicious walk 解釈からそれを再現するような多行列模型 (Dyson のブラウン運動模型) を考え, その解析を行なうことによって, 多時刻最大固有値分布関数が実際に同じ分布を持つことを示した ([3]).

本講演の内容は, さらに外場が 2 つある場合や, 外場のある半無限系の解析に拡張され, 確率的成長モデルとランダム行列理論の関係をさらに明らかにするのに有用であると期待される.

参考文献

[1] J. Baik and E. M. Rains: Limiting distributions for a polynuclear growth model with external sources. J. Stat. Phys. **100** (2000) 523–541.

[2] T. Imamura and T. Sasamoto. Fluctuations of the one-dimensional polynuclear growth model with external sources. Nucl. Phys. B **699** (2004) 503–544.

[3] T. Imamura and T. Sasamoto. Polynuclear growth model, GOE^2 and random matrix with deterministic source. math-ph/0411057.

永井克己：The integrated density of states of a one-dimensional random Schrödinger operator with white noise potential and background

つぎのように形式的に表された作用素

$$H_l = -\frac{1}{r(t)}\frac{d}{dt}\Big(\frac{1}{p(t)}\frac{d}{dt}\Big) + \frac{q(t)}{r(t)} + \frac{B'(t)}{r(t)},\ 0 \le t \le l.$$

の分離境界条件 $u(0)\cos\alpha - u'(0)\frac{1}{p(0)}\sin\alpha = 0,\quad u(l)\cos\beta - u'(l)\frac{1}{p(l)}\sin\beta = 0$ の下での状態分布関数の極限 $(l \to \infty)$ を考える。M.Thompson (Bollettino U.M.I. (6) 2-B (1983),283–296) は background が Brown 運動の汎関数の場合にやや不自然な条件の下に振動定理を使って状態分布関数を求めた。今回はその証明を簡略化して background が Brown 運動と独立な場合についても同様のことが成り立つことを示す。まず background $(p(t))_{t\ge0}, (q(t))_{t\ge0}, (r(t))_{t\ge0}$ は $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 上 filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\ge0}$ に関する連続セミマルチンゲール, $(B(t) : t \ge 0)$ は 1 次元 $(\mathcal{F}_t)_{t\ge0}$ -ブラウン運動とする。

状態分布関数 $N(\lambda)$ は $N(l,\lambda,\omega) := \#\{e.v.of H_l \le \lambda\}$, $N(\lambda) := \lim_{l\to\infty}\dfrac{N(l,\lambda,\omega)}{l}$. により定義される。また background に対して次の条件を仮定する。

(A1):$p(t) = p(0) + M^p(t) + A^p(t)$ と表すとき $M^p(\infty) := \lim_{t\to\infty} M^p(t),\quad A^p(\infty) := \lim_{t\to\infty} A^p(t)$ が存在する。

(A2):$0 < c_1 < c_2, c_3 \in \mathbb{R}$ が存在して $c_1 \le p(t), r(t) \le c_2$, かつ $|q(t)| \le c_3$.

(A3):$0 \le \delta < 2$ が存在して $\int_0^l t^2 d\langle M^p\rangle(t) = \mathcal{O}(l^\delta)$, $(l \to \infty)$ また $\int_0^l t|dA^p(t)| = o(l)$, $(l \to \infty)$.

$q(t), r(t)$ についても同様の条件を課す。

次の定理が得られた。

定理 1 *:* $(A1),(A2),(A3)$ を仮定する。このとき $N(\lambda) = \left(\int_0^\pi u(x,p(\infty),q(\infty),r(\infty))\,dx\right)^{-1}$
但し 関数 u は次の方程式の有界な解 $\frac{1}{2}\sigma^2(x)u^{'}(x) + b(x,p,q,r)u(x) = 1,\ 0 < x < \pi.$
$\sigma(x) := \sin^2 x,\quad b(x,p,q,r) := p\cos^2 x + (-q + \lambda r)\sin^2 x + \sin^3 x\cos x.$

作用素の定義：A.M.Savchuk & A.A.Shkalikov (Math Note 64 Vol 6 1999) に拠ると絶対連続関数 φ の擬導関数 $\varphi^{[1]}$: $\varphi^{[1]} := \frac{\varphi^{'}(t)}{p(t)} - B(t)\varphi(t)$ を導入することで H_l は分離境界条件の下で自己共役作用素で下に半有界, スペクトルは離散的。

振動定理：擬導関数を導入することによって次の振動定理が直接示せる.

命題 1 (振動定理)*:* $H = H_l$ は分離境界条件 $\varphi(0)\cos\tilde{\alpha} - \varphi^{[1]}(0)\sin\tilde{\alpha} = 0\quad \varphi(l)\cos\tilde{\beta} - \varphi^{[1]}(l)\sin\tilde{\beta} = 0$ の下での固有値を $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < \ldots < \lambda_n \to \infty$, を持つ。このとき λ_n に対応する固有関数 $\varphi_n = \varphi(*, \lambda_n)$ は $(0,l)$ においてちょうど $n-1$ 個の零点を持つ。

注 1 $\varphi(t,\lambda) := \tilde{\rho}(t,\lambda)\sin\tilde{\theta}(t,\lambda), \quad \varphi^{[1]}(t,\lambda) := \tilde{\rho}(t,\lambda)\cos\tilde{\theta}(t,\lambda), \quad \tilde{\theta}(0,\lambda) := \tilde{\alpha}.$ とおくと

$$\varphi(t,\lambda) = 0, \iff \tilde{\theta}(t,\lambda) \equiv 0\ (mod\pi) \quad \lambda\ e.v.\ of H_l \iff \tilde{\theta}(l,\lambda) \equiv \tilde{\beta}\ (mod\pi)$$

命題 1(振動定理) を使って状態分布関数 $N(\lambda)$ を次のように求める φ を $H_l\varphi = \lambda\varphi, \varphi(0) = \sin\alpha, \frac{\varphi'(l)}{p(l)} = \cos\alpha.$ の解とする。改めて Prüffer 変換によって $\varphi(t,\lambda) = \rho(t,\lambda)\sin\theta(t,\lambda), \quad \frac{1}{p(t)}\varphi'(t,\lambda) = \rho(t,\lambda)\cos\theta(t,\lambda).$ とおくと

注 2

$$\varphi(t,\lambda) = 0, \iff \theta(t,\lambda) \equiv 0, (mod\,\pi).$$

固有値の個数と固有関数の零点の個数の関係として 注 1, 注 2 と命題 1(振動定理) より $N(l,\lambda,\omega) = [\frac{\theta(l,\lambda)}{\pi}]$. 従って

$$N(\lambda) = \frac{1}{\pi}\lim_{l\to\infty}\frac{\theta(l,\lambda)}{l}. \tag{1}$$

定理 1 はこれを用いて示される。

野村祐司：無限被覆グラフ上のラプラシアンのスペクトルについて

（以下に報告するのは樋口雄介氏（昭和大学）との共同研究である。）

グラフ $G = (V(G), E(G))$ は連結かつ局所有限であり、$V(G)$、$E(G)$ をそれぞれ G の頂点集合、無向辺集合とする。付随する有向辺集合を $A(G)$ で表し、$e \in A(G)$ に対し、その始点、終点をそれぞれ $o(e)$、$t(e)$ と書く。$V(G)$ 上の複素数値関数 f に対し、G 上のラプラシアンを

$$\Delta_G f(x) = \frac{1}{\deg_G x}\sum_{e\in A_x(G)} f(t(e)) - f(x)$$

と定義する。ここで

$$A_x(G) = \{e \in A(G) \mid o(e) = x\}, \quad \deg_G x = \sharp A_x(G)$$

である。内積を

$$\langle f_1, f_2\rangle_V = \sum_{x\in V(G)} f_1(x)\overline{f_2(x)}\deg_G x$$

とし、Hilbert 空間

$$l^2(V(G)) = \{f : V(G) \to \mathbf{C} \mid \langle f_1, f_2\rangle_V < \infty\}$$

を定義する。$-\Delta_G$ は $l^2(V(G))$ 上の非負定値な有界自己共役作用素となり、特にスペクトル集合は区間 $[0,2]$ に含まれる。

現在まで、離散スペクトル幾何、即ちグラフの幾何学構造とグラフ上のラプラシアンのスペクトルとの関係について、多くの研究がなされてきた (cf. [2],[5],[6])。ここでは、対象とするグラフの族を限定し、その幾何とスペクトル構造との関係を調べる。G は連結無限グラフで、有限生成なグラフ同型写像の群 Γ が作用し、かつ次を満たしているとする：

(1) Γ は G 上自由に作用する。即ち、$\sigma(\neq 1) \in \Gamma$ は
固定点も固定無向辺も持たない。

(2) 商グラフ $M = \Gamma\backslash G$ は有限である。

上記の仮定の下で、G は有限グラフ M の正規被覆構造を持ち、その被覆変換群は Γ となる。Γ がアーベル群である時、G は M のアーベル被覆グラフであるといい、特に Γ が M の homology 群 $H_1(M,\mathbf{Z})$ と同型である時、極大アーベル被覆グラフであるという。

まず固有関数に関し、以下が示される。

定理 1 (強局在性) Γ が *amenable* であるとする。このとき、固有値が存在すれば、対応する固有関数で台が有限なものが存在する。

ここで可算生成な群 Γ は、次の性質を満たす $L^\infty(\Gamma)$ 上の有界線型汎関数 μ を有するとき **amenable** であるといわれる。

(1) $\Phi \in L^\infty(\Gamma)$ に対して、$\inf_{\sigma\in\Gamma}\Phi(\sigma) \le \mu(\Phi) \le \sup_{\sigma\in\Gamma}\Phi(\sigma)$、

(2) 各 $\sigma \in \Gamma$ に対して、 $\mu(\sigma\Phi) = \mu(\Phi)$。ここで $\sigma\Phi(\tau)$ は $\Phi(\tau\sigma)$ を表す。

アーベル群、冪零群、可解群は amenable であり、2 個以上の生成元からなる自由群は amenable ではないことを注意する。

強局在性の証明においては、Følner [3] および Adachi [1] による amenability の組み合わせ的表現と状態密度関数が使われる。

スペクトル構造については次が示される。

定理 2 (絶対連続スペクトラム) M が *2*-因子 を持てば、M の 極大アーベル被覆グラフ上のラプラシアンは、絶対連続スペクトルのみを持つ。特に、固有値は存在しない。

さらに [4] で示された結果と併せると、次の主張も示せる。

系 1 (Full Spectrum Property + 絶対連続性) 偶次数の有限正則グラフもしくは奇次数の有限正則二部グラフの極大アーベル被覆グラフにおいて、ラプラシアンのスペクトル集合は $[0,2]$ に一致し、絶対連続スペクトルのみからなる。

参考文献

[1] T. Adachi: A note on the Fϕlner condition for amenability. Nagoya Math. J., **131** (1993), 67-74.

[2] Fan R. K. Chung: Spectral Graph Theory, Conf. Board Math.Sci. 92, 1997.

[3] E. Følner: On groups with full Banach mean value. Math. Scand., **3** (1955), 243-254.

[4] Yu. Higuchi and T. Shirai: Some spectral and geometric properties for infinite graphs, Contemp. Math., **347** (2004), 29-56.

[5] M. Kotani and T. Sunada: Spectral Geometry of Crystal Lattices. preprint.

[6] W. Woess: Random Walks on Infinite Graphs and Groups. Cambrigde Univ. Press, 2000.

中野史彦：ランダム磁場をもつ系のスペクトルのゆらぎについて

本研究は野村祐司氏（東京工業大学）との共同研究である。[1] で扱ったランダム磁場を持つ系について、アンダーソン局在している領域におけるスペクトルのゆらぎがポアソン点過程に弱収束することを示したい。南　就将氏（筑波大学）の結果 ([2]) の方法を適用することにより得られた途中経過について報告する。

考えるハミルトニアンは次のように定義される。

$$Hu(x) = \sum_{|x-y|=1}\left(u(x) - e^{i\theta(x,y)}u(y)\right), \quad u \in l^2(\mathbf{Z}^2). \quad \cdots(1)$$

ここで、$\theta(x,y) \in \mathbf{T} \simeq [-\pi,\pi)$, $\theta(x,y) = -\theta(y,x)$ とする。

仮定：$\theta(x,y)$ は次のように与えられる。

$$\theta(x,y) = \begin{cases} B_\omega(n,m) & (x=(2n+1,m), y=(2n+1,m+1), n,m\in\mathbf{Z}) \\ -B_\omega(n,m) & (y=(2n+1,m), x=(2n+1,m+1), n,m\in\mathbf{Z}) \\ 0, & otherwise \end{cases}$$

つまり、隣り合う 2 つのプラケットを貫く flux が $B_\omega, -B_\omega$ と互い違いになるようにする。$\{B_\omega(n,m)\}_{n,m}$ はある確率空間 $(\Omega,\mathcal{F},\mathbf{P})$ 上の、$\mathbf{T}$ に値をとる i.i.d. で、その分布 ν は次を満たすものとする。

(i) supp $\nu \subset \mathbf{T} \setminus (-c, c)$ for some $0 < c < \pi$,

(ii) $\pm c \in$ supp ν,

(iii) ν は Lipshitz continuous な density g を持つ。

この仮定の下で $\sigma(H) = [a, b]$, a.s. である。ここで、$a = 4\left(1 - \cos\frac{c}{4}\right)$, $b = 4\left(1 + \cos\frac{c}{4}\right)$. さらにある $\delta > 0$ が存在して $I := [a, a+\delta]$ において Anderson localization が起こる ([1]).

ここでは、Anderson localization しているようなスペクトルの領域において有限系の固有値のゆらぎの振舞を考えたい。

$\Lambda = \Lambda_L = [0, L]^2 \cap \mathbf{Z}^2$ を長さ $L(\in \mathbf{N})$ の部分格子とする。$H_\Lambda^{peri} = H|_\Lambda$ を H を有限格子 Λ に制限して周期的境界条件を課したものとする。$\{E_j(\Lambda)\}_{j \geq 1}$ を H_Λ^{peri} の固有値とし、次の point process を考える。

$$\xi(\Lambda; E) = \sum_j \delta_{|\Lambda|(E_j(\Lambda) - E)}, \quad E \in \mathbf{R}.$$

H の IDS, DS をそれぞれ $k(\lambda)$, $n(\lambda)$ とする。私達の目標は次の通りである。
目標：$E \in I$ が $0 < n(E) < \infty$ を満たすとする。$\xi(\Lambda; E)$ は intensity measure $n(E)dx$ を持つ Poisson point process ξ_P に弱収束する。

[2] では、random potential を持つ tight binding model において (fractional moment bound を用いて)、6つのステップからなる証明により、この目標の内容が正しいことが示されている。私達は (1) で定義されたハミルトニアンについても、ステップ5までは実行できることを multiscale analysis を用いて確かめたが、ステップ6についてはできなかった。従って、$\xi(\Lambda; E)$ がある point process に弱収束しているとすると、それが無限分解可能であることまではわかるが、それがポアソン点過程であるかどうかはわからない。ステップ6の困難さは、実軸のある小さな区間に H_Λ^{peri} の固有値が2つ以上ある確率の上からの評価を得ることに起因する。

参考文献

[1] Klopp, F., Nakamura, S., Nakano, F., and Nomura, Y.: Anderson localization for 2D discrete Schrödinger operators with random magnetic fields, Annales Henri Poincaré **4**(2003), p.795-811.
[2] N. Minami, Local fluctuation of the spectrum of a multidimensional Anderson tight binding model, Commun. Math. Phys. **177**(1996), 709-725.

上木直昌：Wegner estimate for random Dirac operators

$\omega = (\omega(a))_{a \in \mathbb{Z}^2}$ は独立同一分布に従う平均0の実数値確率変数系で, その確率密度関数 $h(\lambda)$ は C^1 級で $H = \|\lambda^4 h(\lambda)\|_1 + \|\lambda^5 h'(\lambda)\|_1$ が有限なものとする. $u(x)$ は $\mathbb{R}^2$ 上の compact な support をもつ連続関数とする. $B > 0$, $L \geq 1$ をとり $\mathbb{R}^2$ 上の確率場 $B_L^\omega(x) = B + \chi_L(x) \sum_{a \in \mathbb{Z}^2} \omega(a) u(x - a)$ を考える. ここで $\chi_L(x)$ は正方形 $(-L/2, L/2)^2$ の定義関数である. 各 ω 毎にこれを磁場と見做し, $(A_{L,j}^\omega(x))_{j=1}^2$ を対応する vector potential, D_L^ω を対応する Dirac operator, 即ち $L^2(\mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}^2)$ 上の次の形の自己共役作用素とする:

$$D_L^\omega = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \left(\sqrt{-1}\frac{\partial}{\partial x_1} + A_{L,1}^\omega(x)\right) + \gamma_2 = \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix} \left(\sqrt{-1}\frac{\partial}{\partial x_2} + A_{L,1}^\omega(x)\right).$$

この作用素の区間 I における重複度を込めた固有値の個数 $N(I : D_L^\omega)$ について次の評価を得た:

定理 2 *H による定数 C_H があって任意の非負整数 n, $\mu_n < E < \mu_{n+1}$, $0 < \eta < \rho_E/6$ と $L \geq 1$ に対して*

$$E[N([E - \eta, E + \eta]; D_L^\omega)] \leq C_H \frac{n+1}{\rho_E^5} B \eta L^{16}$$

が成り立つ. ここで $\{\mu_n = \sqrt{2nB} : n \in \mathbb{Z}_+\}$ は一様磁場 B に対応する Dirac operator D の非負の Landau level, ρ_E は E からこの D の Landau level までの距離である.

この定理は $\mathbb{Z}^d$ 上の Anderson model に対する Wegner 型評価 (1981 Z. Phys. B **44**) を弱めた形の評価が Dirac operator に対して成り立つことを示したものである．証明にあたっては Dirac operator の場合には確率変数に関する単調性が無いことが問題になるが, Raikov (1999 MPEJ **1999**) の仕事を参考にしてある Birman-Schwinger 型評価 (e.g.1961 Mat.Sbornik **55**) を与えることにより, 確率変数について斉次な作用素に対する問題に帰着し, Klopp (1995 CMP **167**) の方法によって示せる．この定理から確率場 $B^\omega(x) = B + \sum_{a\in\mathbb{Z}^2} \omega(a)u(x-a)$ に対応する random Dirac operator D^ω について次のことが得られる：

定理 3 H による定数 C_H があって非負整数 n と $0 < \delta \leq 1$ が $(n+1)^3 \leq C_H B\delta^4$ を満たせば区間 $I = [\mu_n + \delta(\mu_{n+1} - \mu_n), \mu_{n+1} - \delta(\mu_{n+1} - \mu_n)]$ において *Anderson* 局在が起きる．即ちスペクトルが点スペクトルのみからなり, 対応する固有関数が指数的に減衰する．

証明は Fröhlich-Spencer (1983 CMP **88**) の仕事以降発展し Germinet-Klein (2001 CMP **222**) の理論に纏められた Multi Scale Analysis による．

同様のことは Pauli Hamiltonian $H^\omega = (D^\omega)^2$ に対しても示せ, その結果は 1 つのまとまったクラスの Schrödinger 作用素に対して random な磁場による Anderson 局在を示したものとなっている．

高原純一：一般化された合金型ポテンシャルエネルギーを持つシュレーディンガー作用素の固有関数の局在化について

本稿では、Generalized Alloy type のポテンシャルエネルギーと呼ばれる $V^\omega(x) \triangleq -\sum_{i\in\mathbf{N}} f_i^{\omega_1} u(x-\xi_i^{\omega_2})$ を持つ Schrödinger 作用素:$H^\omega \triangleq -\Delta + V^\omega(x)$ の固有関数の Exponential Localization について証明し、Anderson Localization が成立することを述べる。ここで、$\xi_i^{\omega_2}$:Poisson 点配置,$f_i^{\omega_1}$:独立等分布 (i.i.d.) の連続確率変数とする。

Schrödinger 作用素 H_ω の固有関数の局在化の研究は、「不純物等の系の乱れによりポテンシャルエネルギーの不規則さが強くなると、電子の状態は結晶全体に広がった状態（金属）から広がりの有限な局在化した状態（絶縁体）に変わる」事を、最初に物理学者 P.W.Anderson[1] が指摘した事から始まった。。

数学の分野では、多次元の問題については Frölich と Spencer が、固定したエネルギーに注目する“fixed energy Multiscale Analysis”と呼ばれる手法を使って、離散的モデルを扱った。この“Multiscale Analysis”と言う手法はこの問題を扱う上での突破口となったと言える。これに対して、von Dreifus と Klein は、より簡単な $[E-\delta, E+\delta]$ なるエネルギー区間の全てのエネルギーに適用されるような“variable energy Multiscale Analysis”と呼ばれる手法を提案し、離散モデルに適用して“Pure Point Spectrum”の存在及び“Exponential Localization”の証明を与えた。その後、Klopp[2] はこれを発展させて連続体モデルに適用した。これまでは、alloy type のポテンシャルエネルギーと呼ばれる $\sum_{i\in\mathbf{Z}^d} f_{\omega_1}^i u(x-k)$ を持つ場合の議論であった。Kirsch と Veselic[3] は、Alloy type をより一般化した冒頭に述べた形の“Generalized Alloy type Potentials”と呼ばれるポテンシャルエネルギーを持つ系について“Multiscale Analysis”の証明に必要な“Wegner Estimate”の証明を行った。このポテンシャルエネルギーは、格子での位置も確率変数としている事から“液晶（アモルファス）タイプのポテンシャルと考えられる。そこで、今回 Generalized Alloy type のポテンシャルエネルギーを持つ系で u が連続で supp u がコンパクトであるようなモデルに対して Kirsch と Veselic による上記の結果を適用し、Initial Length Scale Estimate を Fischer,Leschke,Müller による Combes-ThomasEstimate を使って証明し“Exponential Localization”の証明を試み結果を得たので報告する。又、これにより Initial Length Scale Estimate の成立する負のエネルギー領域で Anderson Localization が成立する事を述べた。

参考文献

[1] P.W.Anderson: Absence of Diffusion in Certain Random Lattice. Phys.Rev.vol-109(1958) 1492-1505

[2] F.Klopp: Localization for some continuous random Schrödinger operators. Commun.Math.Phys. vol-167(1995) 553-569

[3] W.Kirsch,I.Veselic: Wegner estimate for sparse and other generalized alloy type potentials. Proc.Indian Acad.Sci.vol-112(2002) 131-146

神永正博：Spectrum of Schrödinger operators with Poisson random potential

以下の Schrödinger 作用素を考える。

$$H_\omega := -\triangle + \sum_{j=1}^{\infty} q_j(\omega) f(x - X_j(\omega)) \text{ on } L^2(\mathbf{R}^d)$$

$(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ を確率空間とし、$\omega \in \Omega$ とする。ここで、f は、遠方で十分速く減衰する零でない実数値関数とする（以下、f を single site potential と呼ぶ)。$\{q_j(\omega)\}_{j=1}^{\infty}$ は、独立同分布の確率変数、又は定数とする。$\{X_j(\omega)\}_{j=1}^{\infty}$ は、$\mathbf{R}^d$ 上の Poisson 確率過程である。作用素の族 $\{H(\omega)\}_{\omega\in\Omega}$ を単に、Poisson random Schrödinger 作用素と呼ぶ。H_ω は、自己共役作用素として実現でき、そのスペクトル $\sigma(H(\omega))$ は、確率 1 で、non-random となり、ω に依存しない閉集合 $\Sigma(\subset \mathbf{R})$ に一致することがエルゴード的 Schrdinger 作用素の一般論からわかる。

本講演では、スペクトル集合 Σ が、適当な条件下で、$\mathbf{R}$ 全体であるか、又は、$[0,\infty)$ になることの証明の概略を述べた。概略は以下の通りである。

この問題を考える上で最も基本的なのは、admissible potential という概念である。以下、$\mathbf{P}_q$ を q の分布関数とする。admissible potential とは、single site potential を平行移動したものの $\mathrm{supp}\mathbf{P}_q$ 係数の有限一次結合の全体である。admissible potential の全体を $\mathcal{A}$ と書くと、Σ は以下のように表すことができる。

$$\Sigma = \overline{\cup_{w\in\mathcal{A}}\sigma(-\triangle + w)} \tag{2}$$

(2) と、$w \in \mathcal{A}$ が $-\triangle$-compact であることから、$[0,+\infty) \subset \Sigma$ がすぐにわかる。ここから直ちに、$w \in \mathcal{A}$ が非負であれば、$\Sigma = [0,+\infty)$ となることが導かれる。一方、$w \in \mathcal{A}$ が負の値をとる場合は、一般に、$-\triangle + w$ は負の固有値を持つので、$\Sigma \neq [0,+\infty)$ である。比較的簡単な考察により、Σ には、ギャップがあったとしても一つだけであることがわかる（もちろん実軸の負の部分にある)。

今、$b \notin \Sigma$ として、single site potential の係数 $c \in \mathrm{supp}\mathbf{P}_q$ を固定し、$\mathbf{u} = (u_1, u_2, \cdots, u_n) \in \mathbf{R}^{d^n}$ に対し, $w = \sum_{j=1}^{n} cf(x - u_j) \in \mathcal{A}$ に対して、$-\triangle + w$ の b より小さい固有値の個数を $N_{(-\infty,b)}(n, \mathbf{u})$ とする。このとき、$N_{(-\infty,b)}(n,\mathbf{u})$ は $\mathbf{u}$ に対して連続であることを示すことができる。このことから、$N_{(-\infty,b)}(n,\mathbf{u})$ が $\mathbf{u}$ に依存しないことがわかる。これを $\gamma(n)$ と書く。

今、二通りの configulation を考える。一つは、$\min_{i\neq j}|u_i - u_j| \to \infty$ とする場合である。このとき、$-\triangle + w$ の b 以下の固有値は、$-\triangle + cf$ の固有値に近づく。従って、$\gamma(n)$ は、$-\triangle + cf$ の固有値の個数の n 倍に一致する。一方、もう一つの configulation として、$\mathbf{u} = \mathbf{0}$ の場合を考えると、$-\triangle + ncf$ の固有値の個数となる。このとき、$n \to \infty$ に対する $\gamma(n)$ の漸近挙動を考えると、

$$\gamma(n) \sim \begin{cases} n^{d/2} \frac{\tau_d}{(2\pi)^d} \int_{\mathbf{R}^d} ((cf)_-(x))^{d/2} dx (1 + o(1)) & d \geq 3, \\ n \left(\frac{1}{4\pi} \int_{\mathbf{R}^2} (cf)_-(x) \right) (1 + o(1)) & d = 2, \\ o(n) & d = 1. \end{cases} \tag{3}$$

となることがわかる。但し、$d = 2$ のときには、f は、compact supported かつ連続でなければならない。$d \neq 2$ のときには、より一般的な条件でよい（紙数の都合で詳細は省略する)。二つの configulation に対する $\gamma(n)$ が一致しなければならないことから矛盾を導く。$d \neq 2$ のときには、次数の不整合、$d = 2$ のときは、係数の不整合から矛盾を導く。

(本研究は、安藤和典、岩塚明、中野史彦氏との共同研究である。)

南就将：無限分解可能な点過程とエネルギー準位統計

量子系が相互作用の弱い無数の部分系に分かれるとみなされるとき、系全体のスペクトルは希薄な点過程の統計的に独立な重ね合わせの極限として、言い換えると無限分解可能点過程として近似的に表されると考えられる。例えば本研究会での牧野氏の講演にあるように、可積分な古典力学系では相空間が軌道の行き来のない無数のトーラスに分かれる。従ってこの力学系の量子力として得られる系は準古典極限においてやはり無数の部分系に分かれる。(Berry-Robnik の仮定。) また中野氏の講演にあるようにランダムなシュレーディンガー作用素においてはアンダーソン局在によってこのような部分系への分割が近似的に実現する。

無限分解可能点過程については 1970 年代に旧東独の Kerstan, Matthes, Mecke, Kallenberg などにより深い研究が行なわれているが、その理論は確率論数理物理学の研究者の間に広く普及しているとはいい難い。本講演では彼等の著書に基づいて無限分解可能点過程の標準表現の理論、特に regular あるいは singular な無限分解可能点過程への分類について概説し、ランダム作用素のスペクトルの揺らぎの研究への応用を論じた。

参考文献

K.Matthes, J.Kerstan, J.Mecke: Infinitely divisible point processes. Wiley (1978)

小谷眞一：Floquet 指数と KdV 力学系-不変測度について

古典的な無反射ポテンシャルを含む自然なクラス（その中には有限帯スペクトルをもつ周期ポテンシャルを含む）を導入して、その関数空間（コンパクトになる）上に、佐藤理論により（一般化）KdV 力学系が定義できる。ここで問題とすることは、この力学系に関して不変な確率測度が何によって決まるかということである。この力学系の中には関数の通常のシフトも含まれるので、その関数をポテンシャルにもつ 1 次元シュレーディンガー作用素のグリーン関数から Floquet 指数（これは周期的なポテンシャルの場合の自然な拡張）が定義されるが、本講演ではこの指数がどれだけこの不変測度を規程するかについて論じた。

伊東恵一：Anderson localization of lattice Green's function with random complex potential derived from the 2D $O(N)$ spin model

1: Introduction and Summary

We discuss properties of the Green's function of a Laplacian which depends on real random potentials ([2]) $\{\psi(x); x \in Z^2\}$ with pure imaginary coefficients:

$$G^{\psi}(x,y) = \frac{1}{-\Delta + m^2 + i\alpha\psi}(x) \tag{4}$$

where Δ is the Laplacian defined on the lattice space Z^2 ($(\Delta)_{xy} = -4\delta_{x,y} + \delta_{|x-y|,1}$) and $\{\psi(x); x \in Z^2\}$ are random variables which obey the Gaussian probability distributions $d\nu(\psi)$. This model is derived from 2D $O(N)$ symmetrtic spin model ([1]) (Heisenberg model), and we intend to apply our analysis to the models [5], [6]. The Gaussian distributions $d\nu(\psi)$ we consider here are:

case 1: locally and identically independently distributed:

$$d\nu(\psi) = \prod_x \frac{e^{-\frac{1}{2}\psi^2(x)}}{\sqrt{\pi}} d\psi(x) \tag{5}$$

case 2: correlating via Yukawa potential:

$$d\nu(\psi) = \exp[-\frac{1}{2} < \psi, G_0\psi >] \prod_x d\psi(x) \tag{6}$$

where $<\psi, G_0\psi> = \sum_{x,y} G_0(x,y)\psi(x)\psi(y)$, $G_0(x,y) = (-\Delta + m_0^2)^{-1}(x,y)$ is the Yukawa potential and $m_0^2 > 0$ is an arbitrarily small constant which may be set at zero after all calculatios.

Theorem *Let*

$$G^{(ave)}(x,y) \equiv \int G^{(\psi)}(x,y)d\nu(\psi) \tag{7}$$

(averaged Green's functions). Assume $|\log m| \exp[-\alpha^{-1}] << 1$ *in case 2. (No assumtion is needed in case 1.) Then*

$$G^{(ave)}(x,y) \sim \frac{1}{-\Delta + m_{eff}^2}(x,y) \tag{8}$$

where $m_{eff}^2 = O(\alpha^2 |\log \alpha|)$ *for case 1 and* $m_{eff}^2 = O(\alpha^2)$ *for case 2.*

2:Derivation and Applications

This model is derived from the ν dimensional $O(N)$ spin (Heisenberg) model by the Fourier transformation ([1]), and we start with the expression of the two-point correlation function $<\phi_0\phi_x>$, $\phi \in S^{N-1}$:

$$<\phi_0\phi_x> \;=\; \frac{1}{Z}\int \cdots \int (m^2 - \Delta + \frac{2i}{\sqrt{N}}\psi)_{0x}^{-1} F(\psi) \prod \frac{d\psi_j}{2\pi} \tag{9}$$

where $\Delta_{ij} = -2\nu\delta_{ij} + \delta_{|i-j|,1}$ is the lattice Laplacian, Z is the normalization constant, and $m > 0$ is determined later. Let $\nu = 2$. Then

$$F(\psi) \;=\; \det{}_3^{-N/2}(1 + \frac{2iG}{\sqrt{N}}\psi)\exp[-<\psi, G^{\circ 2}\psi>] \tag{10}$$

where $G = (m^2 - \Delta)^{-1}$ is the lattice Green's function, $G^{\circ 2}(x,y) = G(x,y)^2$ so that $\mathrm{Tr}(G\psi)^2 = <\psi, G^{\circ 2}\psi>$ and $\det_3(1+A)$ is the (extracted) Fredholm determinant. The mass parameter $m > 0$ has to be chosen so that $G(0) = \beta$. Then $m^2 \sim 32e^{-4\pi\beta}$ for $\nu = 2$.

Assume that the interaction is restricted to a finite rectangular region $\Lambda \subset Z^2$ and study the limit $\Lambda \to Z^2$. We decompose Λ into many small squares $\Lambda = \cup_{i=1}^n \Delta_i$ and apply the Feshbach formula to obtain $\det^{-N/2}(1 + i\kappa G_\Lambda\psi_\Lambda)$ in the following form:

$$\left[\prod_{i=1}^{n-1} \det{}^{-N/2}(1 + W(\Delta_i, \Lambda_i))\right] \prod_{i=1}^{n} \det{}^{-N/2}(1 + i\kappa G_{\Delta_i}\psi_{\Delta_i}) \tag{11}$$

where $\kappa = 2/\sqrt{N}$, $\Lambda_k = \cup_{i=k+1}^n \Delta_i$, $G_\Delta = \chi_\Delta G \chi_\Delta$, ${}_\Lambda G_\Delta = \chi_\Lambda G \chi_\Delta$ and

$$W(\Delta_i, \Lambda_i) \;=\; -(i\kappa)^2 \frac{1}{1 + i\kappa G_{\Delta_i}\psi_{\Delta_i}} G_{\Delta_i,\Lambda_i}\psi_{\Lambda_i} \frac{1}{1 + i\kappa G_{\Lambda_i}\psi_{\Lambda_i}} G_{\Lambda_i,\Delta_i}\psi_{\Delta_i}$$

$[G_\Lambda]^{-1}$ is a Laplacian with free boundary conditions at $\partial\Lambda_i$. To apply cluster expansion to prove the long-standing conjecture argued in [3], [5], [6], we will have to show $W(\Delta, \Lambda)$ are small. This work is the first step in this direction.

We prove that $([G_{\Lambda_i}]^{-1} + i\kappa\psi_{\Lambda_i})^{-1}$ behaves as massive Green's functions which decrease fast (localization). The measure restricted to each block is

$$d\mu_\Delta = \det{}_3^{-N/2}(1 + \frac{2i}{\sqrt{N}} G_\Delta\psi_\Delta)\exp[-(\psi_\Delta, G_\Delta^{\circ 2}\psi_\Delta)] \prod_{x\in\Delta} d\psi(x) \tag{12}$$

which is almost equal to the Gaussian measure $\exp[-(\psi_\Delta, G_\Delta^{\circ 2}\psi_\Delta)] \prod_{x\in\Delta} d\psi(x)$, though $\frac{2}{\sqrt{N}} G_\Delta\psi_\Delta$ seems to be very large. Then these arguments lead us to consider the problem raised in the Theorem. See [4] for the detail.

参考文献

[1] D. Brydges, J. Fröhlich and T. Spencer: The Random Walk Representation of Classical Spin Systems and Correlation Inequalities, Commun. Math. Phys.**83**: 123 (1982).
[2] J. Fröhlich and T. Spencer: Absence of Diffusion in the Andeson Tight Bindin Model for Large Disorder or Low Energy, Commun. Math. Phys.**88**: 151 (1983)
[3] K.R.Ito: Renormalization Recursion formulas and Flows of 2D $O(N)$ Spin Models, Jour. Stat. Phys., **107**: 821-856 (2002).
[4] K. R. Ito, F.Hiroshima and H. Tamura: Green's functions with Complex Random Potential in two Dimesnions Derived from 2D $O(N)$ Spin Models, Preprint (2005, Jan)
[5] A.Polyakov, Interactions of Goldstone Bosons in Two Dimensions: Phys. Lett,**59B**: 79 (1975).
[6] K. Wilson: Confinement of Quarks, Phys. Rev. D **10**: 2455 (1974) and Renormalization Groups and Critical Phenomena, Rev. Mod.Phys. **55**: 583 (1983)

牧野浩典：ベリー・ロブニックの仮定を基礎とする可積分量子系の準位統計 II

ベリー・ロブニックの仮定とは，束縛古典系の相空間が軌道の繋がらない独立な領域から成るときに，半古典極限における量子系のエネルギー準位が，これらの領域から供給される準位成分の統計的に独立な重ね合わせで与えられるというものである [1]。準位成分の間の独立性は個々の独立領域への固有状態の局在とトンネル状態の消滅によって，量子系が互いに独立な部分系に分かれることによって成立すると考えられている。互いに独立な部分系の間では，エネルギー準位も無相関であるというのがベリー・ロブニックの仮定の核心である。このような状況が期待されるのは量子系のプランク体積が各領域の相空間体積よりも充分に小さいときであり，プランク体積が０となる半古典極限に至ると，固有状態は無限小の分解能を獲得し，各領域に完全に局在することができる。

古典系が可積分の場合，１本の軌道はトーラス曲面に閉じ込められ，その内部でのみ運動が許される。リュービル・アーノルドの定理によると，相空間は無限小の体積を持つ無数の独立領域から成る [2]。一方，対応する量子系の各固有状態は半古典極限において，量子数によって定められるトーラス平面上に閉じ込められ，ウィグナー関数はトーラス平面上でデルタ関数に一致する [3]。故に，可積分量子系のエネルギー準位は半古典極限において，無数の無限小領域から供給される無数の独立な準位成分の重ね合わせであらわされる。その結果，エネルギー準位の統計的性質はポアソンの小数の法則に支配されると考えられる。実際に準位間隔分布がポアソン分布に一致することは多くの可積分量子系に対する数値的な評価によって確かめられており，この種の系が持つ普遍則として広く認知されている。しかし完全な証明は未だ与えられておらず，さらに幾つかの系における例外も報告されているため，無数の準位成分から成る系の準位統計を調べる必要がある。

本研究ではこれらのことを念頭に置き，可積分量子系の準位間隔分布・積算準位間隔分布・ギャップ分布，２点クラスター関数・準位数分散・スペクトル硬度などの統計量を独立なエネルギー準位の成分数を無限大にとる際の極限として導出した。極限において，これらの統計量を単一パラメーター関数によって特徴付け，パラメータ関数の振る舞いに応じてポアソン統計によって表される場合と，ポアソン統計から外れる場合があることを明らかにした。研究結果の一部は文献 [4] で報告している。

参考文献

[1]M.V. Berry and M. Robnik, J. Phys. A 17 (1984), 2413.
[2]I. Arnold and A. Avez, Ergodic Problems of Classilcal Mechaniocs, (Benjamin, N.Y.,1978); V.I. Arnold, Russ. Math. Surveys 18:6 (1963), 85.
[3]M.V. Berry, Phil. Trans. R. Soc. A 287 (1977), 237 ; M.V. Berry, J. Phys. A 10 (1977),2083.
[4]H. Makino and S. Tasaki, Phys. Rev. E 67, (2003), 066205.

研究集会　**確率過程とその周辺**

平成16年度科学研究費補助金 基盤研究 (A)(1) 「確率論の総合的研究」(研究代表者: 京都大学大学院理学研究科 重川 一郎) により表記の研究集会を開催します。

日程：平成16年12月7日 (火)–10日 (金)

場所：名古屋大学シンポジオン会議室
(http://www.nagoya-u.ac.jp/sogo/higasiyama.html で場所は確認できます)

プログラム

12月7日 (火)

14:00–14:50 熊谷 隆 (京都大学数理解析研究所)
Random walk on the incipient infinite cluster on trees

15:00–15:50 加藤 恭 (東京大学大学院数理科学研究科)
汎関数型確率差分方程式の極限定理

16:10–17:00 半田 賢司 (佐賀大学理工学部)
自然淘汰を考慮した抽出公式

12月8日 (水)

9:20–10:10 田村 博志 (金沢大学)・伊東 恵一 (摂南大学)
Fermion/Boson 過程と正準集団とその応用

10:20–11:10 保阪 賢資 (神戸大学大学院自然科学研究科)
弱結合領域における4次の係数が負である階層的 ϕ_4^6 模型の自明性

11:20–12:10 坂井 哲 (Eindhoven University of Technology)
Critical points for spread-out self-avoiding walk, percolation and the contact process above the upper critical dimensions

12:10–14:00 昼休み

14:00–14:50 吉田 伸生 (京都大学大学院理学研究科)
Directed polymers in random environment are diffusive at all subcritical temperature

15:00–15:50 Riddhi Shah (Tata Institute of Fundamental Research, Keio University)
Operator-semistable, operator semi-selfdecomposable probability measures and related nested classes on p-adic vector spaces

16:10–17:00 西郷 達彦・高橋 弘 (慶応義塾大学大学院理工学研究科)
作用素的半自己相似性を持つ確率過程の構成

12 月 9 日 (木)

9:20–10:10 渡辺 信三 (立命館大学)・矢野 孝次 (京都大学数理解析研究所)・矢野 裕子 (お茶の水女子大学大学院人間文化研究科)
1 次元拡散過程の正側滞在時間の分布の密度公式

10:20–11:10 針谷 祐 (京都大学数理解析研究所)
Integration by parts formulae for the Wiener measure restricted to subsets in R^d

11:20–12:10 福島 正俊 (関西大学工学部)
On entrance law, exit system and the trace Lévy system

12:10–14:00 昼休み

14:00–14:50 渡部 俊朗 (会津大学総合数理科学センター)
Asymptotic estimates of multidimensional stable densities and their applications

14:50–15:10 コーヒーブレイク

15:10–17:10 ショートコミュニケーション

12 月 10 日 (金)

9:20–10:10 桑田 和正 (京都大学大学院情報学研究科)
Laplace approximation for stochastic line integrals in long time

10:20–11:10 伏屋 広隆 (東京大学大学院数理科学研究科)
1 次元マルコフ過程の粘性的反射壁ブラウン運動への収束

11:20–12:10 鍛治 俊輔 (大阪大学大学院理学研究科)
On tail distributions of supremum and quadratic variation of cadlag local martingales

12:10–14:00 昼休み

14:00–14:50 志村 隆彰 (統計数理研究所)・渡部 俊朗 (会津大学総合数理科学センター)
On convolution roots in some classes related to the subexponentiality

15:00–15:50 南 就将 (筑波大学大学院数理物質科学研究科)
Number of leaves as the total progeny of hidden trees in a Galton-Watson tree

世話人： 長田博文 (九州大学), 関根順 (大阪大学), 松本裕行 (名古屋大学)

Random walk on the incipient infinite cluster on trees

M.T. Barlow (University of British Columbia)、熊谷　隆（京大数理研）

臨界点における分枝過程に絶滅しないという条件を付けたモデルを考える (このような cluster を incipient infinite cluster (IIC) と言う)。本講演では、実解析的な手法と確率論的手法を織りまぜて用いることにより IIC 上のシンプルランダムウォークの熱核の評価を与え、このランダムウォークが劣拡散的な挙動をすることについて報告する ([2])。このランダムウォークの挙動については、Kesten ([3]) が annealed (cluster についての平均を取る) の場合に、全く別の方法でスケーリングオーダーを導き出している。余談ながら Kesten の結果は、フラクタル上の確率過程の研究のモチベーションの一つになり、当該研究の初期の文献に多く引用されている。

1　設定と主定理

$\{X_n\}_n$ を critical binary Bienaymé-Galton-Watson branching process で $X_0 = 1$ なるもの (つまり offspring distribution が $p_0 = 1/4, p_1 = 1/2, p_2 = 1/4$ なる分枝過程) とする。(以下の結果はもう少し一般の分枝過程に拡張できるが、簡単のためこの場合について議論する。)

$(\mathbb{B}, E(\mathbb{B}))$ を binary tree のグラフとし、その root を 0 と書く。$\mathbb{B}_n$ を n 番目の generation 全体 (2^n 個ある) とし、$\mathbb{B}_{\le n} = \cup_{i=0}^n \mathbb{B}_i$ とおく。η_e, $e \in E(\mathbb{B})$ を $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ 上の i.i.d. Bernoulli 1/2 r.v. とし、$\eta_e = 1$ のとき edge e は open であると呼ぼう。$\mathcal{C} \subset \mathbb{B}$ を 0 を含む open cluster、$\mathcal{C}_{\le n} = \mathcal{C} \cap \mathbb{B}_{\le n}$ とすると、$X_n = |\mathcal{C} \cap \mathbb{B}_n|$ である。

補題 1.1 *(Lemma 1.14 in [3]). Let $A \subset \mathbb{B}_{\le k}$. Then*

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(\mathcal{C}_{\le k} = A | Z_n \ne 0) = |A \cap \mathbb{B}_k| \mathbb{P}(\mathcal{C}_{\le k} = A) =: \widetilde{\mathbb{P}}_0(A). \tag{1.1}$$

$^{\exists 1}\widetilde{\mathbb{P}}$*: extension of $\widetilde{\mathbb{P}}_0$ on the set of ∞-connected subsets of $\mathbb{B}$ containing 0.*

$\mathcal{G}$ を分布 $\widetilde{\mathbb{P}}$ に従って決まるランダムな rooted tree とする (これが IIC である)。$\widetilde{\mathbb{P}}$-a.s. で $\mathcal{G}$ は 0 から伸びる唯一の infinite descending path を持つ。これを backbone と呼び、H と書く。$x, y \in \mathbb{B}$ について $\widetilde{\mathbb{P}}_x(\cdot) = \widetilde{\mathbb{P}}(\cdot | x \in \mathcal{G})$, $\widetilde{\mathbb{P}}_{xy}(\cdot) = \widetilde{\mathbb{P}}(\cdot | x, y \in \mathcal{G})$ とおき、それぞれについての平均を $\widetilde{\mathbb{E}}_x$, $\widetilde{\mathbb{E}}_{xy}$ と書く。Descending path $b = \{0, b_1, b_2, \cdots\}$ に対して、$\widetilde{\mathbb{P}}_{x,b}(\cdot) = \widetilde{\mathbb{P}}(\cdot | x \in \mathcal{G}, H = b)$ とおき、$\widetilde{\mathbb{P}}_{x,y,b}$ も同様に定める。

$(\mathcal{G}, \widetilde{\mathbb{P}})$ を、上で定めた IIC とする。各 $\mathcal{G}(\omega)$ 上に、exponential holding time をもつシンプルランダムウォーク $Y = \{Y_t\}_{t\ge 0}$ を定め、$x \in \mathcal{G}(\omega)$ から出発する Y の法則を P_ω^x、その平均を E_ω^x とかく。Y の熱核を $q_t^\omega(x,y) := P_\omega^x(Y_t = y)/\mu_y$ で定める (μ_y は y から出るボンドの数)。我々の主結果は以下の通りである。

定理 1.2 *(Annealed case)*
(a) There exists $c_1, c_2 > 0$ such that for each x and $t \ge 1$,

$$c_1 t^{-2/3} \le \widetilde{\mathbb{E}}_x[q_t^\omega(x,x)] \le c_2 t^{-2/3}. \tag{1.2}$$

(b) There exists $c_3, c_4 > 0$ such that for each x and $t \ge 1$,

$$c_3 t^{1/3} \le \widetilde{\mathbb{E}}_x E_\omega^x d(x, Y_t) \le c_4 t^{1/3}. \tag{1.3}$$

定理 1.3 *(Quenched case)*
(a) There exist $c_1, c_2, S(x)$ *such that for each* x,

$$c_1 t^{-2/3}(\log\log t)^{-11} \le q_t^{\omega}(x,x) \le c_2 t^{-2/3}(\log\log t)^6, \tag{1.4}$$

for all $t \ge S(x)$. *Further,* $\widetilde{\mathbb{P}}_x(S(x) \ge m) \le c(\log m)^{-1}$.
(b) There exists $T(x)$ *with* $\widetilde{\mathbb{P}}_x(T(x) < \infty) = 1$ *such that*

$$E_\omega^x[d(x,Y_t)] \le c_3 t^{1/3}\log t \qquad \textit{for all } t \ge T(x). \tag{1.5}$$

2 解析的評価と確率論的評価

上の主定理を示すために、実解析的な結果である命題2.3と確率論的評価である命題2.2が鍵となる。講演ではこれらの評価がどのようにして得られるか、また、これらの結果からどのように主定理が導き出せるかについて、簡単に触れたい。

定義 2.1 *Let* $x \in \mathbb{B}$, $r \ge 1$, $\lambda \ge 16$. *We say that* $B(x,r)$ *is* λ*-good if the following hold.*

$$x \in \mathcal{G},\ |B(x,r)| \le \lambda r^2,\ M(x,r) \le \frac{\lambda}{16},\ |B(x,r/\lambda)| \ge \frac{r^2}{\lambda^4},\ |B(x,\frac{r}{\lambda^2})| \ge \frac{r^2}{\lambda^6}.$$

ここで、$M(x,r) = \min\{|A| : A \subset \mathcal{G},\ r/4 \le d(x,z) \le 3r/4, \forall z \in A$、$x$ から $B(x,r)^c$ へのすべてのパスが A と交わる$\}$ とする。

命題 2.2 *For any* $x \in \mathbb{B}$ *and any descending path* b,

$$\widetilde{\mathbb{P}}_{x,b}(B(x,r) \textit{ is not } \lambda\textit{-good}) \le c_1 e^{-c_2\lambda}. \tag{2.1}$$

命題 2.3 *Suppose that* $B(x,r)$ *is* λ*-good. Then the following hold.*

$$c_1 \frac{r^3}{\lambda^5} \le E^x T_{B(x,r)^c} \le c_2 \lambda r^3, \tag{2.2}$$

$$c_3 t^{-2/3}\lambda^{-11} \le q_{2t}(x,y) \le c_4 t^{-2/3}\lambda^6, \tag{2.3}$$

for $\frac{r^3}{\lambda^6} \le t \le \frac{r^3}{\lambda^5}$, $\quad y \in B(x, c_5 r\lambda^{-13})$.

参考文献

[1] M. T. Barlow, T. Coulhon and T. Kumagai, Characterization of sub-Gaussian heat kernel estimates on strongly recurrent graphs, Preprint 2004 (available at http://www.kurims.kyoto-u.ac.jp/~kumagai).

[2] M.T. Barlow and T. Kumagai Random walk on the incipient infinite cluster on trees, In preparation.

[3] H. Kesten. Subdiffusive behavior of random walk on a random cluster, *Ann. Inst. Henri Poincaré*, **22** (1986), 425–487.

[4] A.G. Pakes. Some limit theorems for the total progeny of a branching process. *Adv. Appl. Prob.*, **3** (1971), 176–192.

汎関数型確率差分方程式の極限定理

加藤 恭 (東京大学大学院数理科学研究科)

$(\Omega^n, \mathcal{F}^n, P^n)$, $n \in \mathbb{N} = \{1,2,3,\ldots\}$, を確率空間とする. $F^{n,i}(w,\omega)$, $G_k^{n,i}(w,\omega) : C([0,\infty);\mathbb{R}^d) \times \Omega^n \longrightarrow \mathbb{R}$, $i = 1,\ldots,d$, を $\mathcal{B}_{k/n} \otimes \mathcal{F}^n$-measurable な random function で $\mathrm{E}^n[F_k^{n,i}(w)] = 0$ を満たすものとし (但し $\mathcal{B}_{k/n}$ は $\mathcal{B}_{k/n} = \sigma(w(s); 0 \le s \le k/n)$ で与えられる $C([0,\infty);\mathbb{R}^d)$ 上の σ-algebra, E^n は P^n の下での期待値) , $\mathbb{R}^d$-値確率過程 $X_t^n = (X_t^{n,i})_{i=1}^d$, $t \in [0,\infty)$, を次の確率差分方程式 (及び linear interpolation) で構成する.

$$X_{(k+1)/n}^{n,i} - X_{k/n}^{n,i} = \frac{1}{\sqrt{n}} F_k^{n,i}(X^n,\omega) + \frac{1}{n} G_k^{n,i}(X^n,\omega), \quad k \in \mathbb{Z}_+ = \{0,1,2,\ldots\}, \tag{1}$$

$$X_t^{n,i} = (1 - nt + k) X_{k/n}^{n,i} + (nt - k) X_{(k+1)/n}^{n,i}, \quad \frac{k}{n} < t < \frac{k+1}{n}, \tag{2}$$

$$X_0^n = x_0 \in \mathbb{R}^d. \tag{3}$$

また Ω^n 上の σ-algebra $\mathcal{F}_{k,l}^n$, $k,l \in \mathbb{Z}_+$, $k \le l$, を

$$\mathcal{F}_{k,l}^n = \sigma\big(F_m^{n,i}(w), G_m^{n,i}(w)\ ;\ i = 1,\ldots,d,\ k \le m \le l,\ w \in C([0,\infty);\mathbb{R}^d)\big)$$

で定義し,

$$\alpha_k = \sup_n \sup_l \sup\{|P^n(A \cap B) - P^n(A)P^n(B)|\ ;\ A \in \mathcal{F}_{0,l}^n,\ B \in \mathcal{F}_{k+l,\infty}^n\}$$

とおく. Watanabe [1], [2] では, $F_k^{n,i}, G_k^{n,i}$ が

$$F_k^{n,i}(w,\omega) = \tilde{F}_k^{n,i}(w(k/n),\omega), \quad G_k^{n,i}(w,\omega) = \tilde{G}_k^{n,i}(w(k/n),\omega)$$

という形のときに, α_k に対する適当な仮定の下で, $X^n = (X_t^n)_{t\ge 0}$ の $C([0,\infty);\mathbb{R}^d)$ 上の確率分布 Q^n が, ある martingale problem の解に弱収束することが示されている. そこでは, Kesten-Papanicolaou [3] によって示された mixing 不等式が重要な役割を果たしている.

本講演では, $F_k^{n,i}, G_k^{n,i}$ が汎関数型である場合の極限定理を扱う. その際, パラメーター空間 $C([0,\infty);\mathbb{R}^d)$ が有限次元でないため, [3] の mixing 不等式をそのままの形で使うことはできない. そこで, $F_k^{n,i}, G_k^{n,i}$ に対し, ある種の有限次元性を保障する追加的な仮定が必要となる.

以下, 主結果に対する仮定を述べる. $p_0 > 3$ 及び $\gamma_0 > 0$ を与えられた数とする.

[A1] $F_k^{n,i}(w,\omega)$, $G_k^{n,i}(w,\omega)$ は $\mathcal{B}_{k/n} \otimes \mathcal{F}^n$-measurable.

[A2] P^n-a.s. ω に対して, $F_k^{n,i}(w,\omega)$ (及び $G_k^{n,i}(w,\omega)$) は, Banach 空間 $C([0,k/n];\mathbb{R}^d)$ 上の関数として w について 2 回 (及び 1 回) 連続 Fréchet 微分可能.

[A3] 各 $M > 0$ に対してある定数 $C(M) > 0$ が存在して

$$\sum_{m=0}^{2} \mathrm{E}^n\Big[\sup_{|w|_\infty \le M} |\nabla^m F_k^{n,i}(w)|_{L_{k/n}^m}^{p_0}\Big], \quad \sum_{m=0}^{1} \mathrm{E}^n\Big[\sup_{|w|_\infty \le M} |\nabla^m G_k^{n,i}(w)|_{L_{k/n}^m}^{p_0}\Big] \le C(M), \quad n \in \mathbb{N},\ k \in \mathbb{Z}_+.$$

但し $|w|_\infty = \sup_{t\in[0,\infty)} |w(t)|$, L_T^m は $C([0,T];\mathbb{R}^d)$ 上の 連続 m 重線形作用素全体, $|\cdot|_{L_T^m}$ をそのノルムとする.

$C_M^d = \{w \in C([0,\infty);\mathbb{R}^d)\ ;\ |w|_\infty \le M\}$ とする. $U : C([0,\infty);\mathbb{R}^d) \times \Omega^n \longrightarrow \mathbb{R}$ と $\varepsilon > 0$ に対して, $N_n(\varepsilon, M; U)$ を, 次を満たす最小の自然数 m とする : 集合 $S_1,\ldots,S_m$ が存在して, $C_M^d = \bigcup_{i=1}^m S_i$ 及び

$$\mathrm{E}^n\Big[\max_{i=1,\ldots,m} \sup_{x,y\in S_i} |U(x) - U(y)|^{p_0}\Big]^{1/p_0} < \varepsilon$$

が成り立つ.

[A4] 各 $M > 0$, $i,j,\nu = 1,\ldots,d$ に対して

$$\sup_{n,k} \sup_{\varepsilon>0} \varepsilon^{\gamma_0} N_n(\varepsilon, M; F_k^{n,i}) < \infty, \quad \sup_{n,k} \sup_{l\le k} \sup_{\varepsilon>0} \varepsilon^{\gamma_0} N_n(\varepsilon, M; \nabla F_k^{n,i}(\cdot\,; I_l^n e_j)) < \infty,$$

$$\sup_{n,k} \sup_{l,m\le k} \sup_{\varepsilon>0} \varepsilon^{\gamma_0} N_n(\varepsilon, M; \nabla^2 F_k^{n,i}(\cdot\,; I_l^n e_j, I_m^n e_\nu)) < \infty, \quad \sup_{n,k} \sup_{\varepsilon>0} \varepsilon^{\gamma_0} N_n(\varepsilon, M; G_k^{n,i}) < \infty,$$

但し $e_j = (0,\dots,0,\overset{j}{1},0,\dots,0)$ とし, $I_l^n:[0,\infty)\longrightarrow\mathbb{R}$ は次で与えられる関数とする.

$$I_l^n(t)=0\ \left(\text{if } 0\le t<\frac{l}{n}\right),\quad nt-l\ \left(\text{if } \frac{l}{n}\le t<\frac{l+1}{n}\right),\quad 1\ \left(\text{if } t\ge\frac{l+1}{n}\right).$$

[A5] $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\alpha_k^{\varrho_0}<\infty,\quad \varrho_0=\frac{1}{2s_0+4\gamma_0},\quad s_0=\frac{p_0}{p_0-3}.$

[A6] $\mathrm{E}^n[F_k^{n,i}(w)]=0.$

[A7] $a_0^{n,ij}(k,w)=\mathrm{E}^n[F_k^{n,i}(w)F_k^{n,j}(w)],\quad b_0^{n,i}(k,w)=\mathrm{E}^n[G_k^{n,i}(w)],$

$\displaystyle A^{n,ij}(k,w)=\sum_{l=1}^{\infty}\mathrm{E}^n\left[F_{k+l}^{n,i}\left(w\left(\cdot\wedge\frac{k}{n}\right)\right)F_k^{n,j}(w)\right],\quad B^{n,ij}(k,w)=\sum_{l=1}^{\infty}\mathrm{E}^n\left[\nabla F_{k+l}^{n,i}\left(w\left(\cdot\wedge\frac{k}{n}\right);I_k^n e_j\right)F_k^{n,j}(w)\right]$

とする. 但し $a\wedge b=\min\{a,b\}$. このとき以下の極限が存在する.

$$a_0^{ij}(t,w)=\lim_{n\to\infty}a_0^{n,ij}([nt],w),\quad b_0^{i}(t,w)=\lim_{n\to\infty}b_0^{n,i}([nt],w),$$
$$A^{ij}(t,w)=\lim_{n\to\infty}A^{n,ij}([nt],w),\quad B^{ij}(t,w)=\lim_{n\to\infty}B^{n,ij}([nt],w).$$

これらの収束は 各 $t\ge 0$ に対して, 各 $K\in\mathcal{K}^d$ 上一様収束. 但し $[x]$ は x を超えない最大の整数, $\mathcal{K}^d$ は $C([0,\infty);\mathbb{R}^d)$ の compact set K で $\displaystyle\sup_{w\in K}|w|_\infty<\infty$ を満たすもの全体.

[A8] $\displaystyle a^{ij}(t,w)=a_0^{ij}(t,w)+A^{ij}(t,w)+A^{ji}(t,w),\quad b^i(t,w)=b_0^i(t,w)+\sum_{j=1}^{d}B^{ij}(t,w)$ とする.

各 $T>0$ に対して定数 $C(T)>0$ が存在して

$$|a^{ij}(t,w)|,\ |b^i(t,w)|\le C(T)\left(1+\sup_{0\le s\le t}|w(s)|\right),\quad t\in[0,T],\ w\in C([0,\infty);\mathbb{R}^d).$$

[A9] $\displaystyle\mathscr{L}f(t,w)=\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{d}a^{ij}(t,w)\frac{\partial^2}{\partial x^i\partial x^j}f(w(t))+\sum_{i=1}^{d}b^i(t,w)\frac{\partial}{\partial x^i}f(w(t)),\quad f\in C^2(\mathbb{R}^d)$

とする. 初期条件を $w(0)=x_0$ とする $\mathscr{L}$ に対する martingale problem の解 Q は高々 1 つ.

Theorem 1. *[A1]–[A9] を仮定する. $X_t^n,\ t\in[0,\infty)$, を (1)–(3) で定義し, Q^n を X^n が誘導する $C([0,\infty);\mathbb{R}^d)$ 上の確率測度とする. このとき Q^n は Q に弱収束する.*

また, mixing condition を強めることで, [A4] よりも緩い dimensional condition の下でも同様の結果を示すことができる.

[B4] 条件 [A4] で, N_n を $\log N_n$ に置き換えたものが成り立つ.

[B5] ある $\varrho_1\in\left(0,\frac{1}{2\gamma_0}\right)$ に対して $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\log(1/\alpha_k)}\right)^{\varrho_1}<\infty.$

Theorem 2. *[A1] – [A3], [B4], [B5], [A6] – [A9] を仮定する. このとき Theorem 1 と同様の結果が成り立つ.*

参考文献

[1] H.Watanabe, Diffusion approximations of some stochastic difference equations II, Hiroshima Math. J. 14, 15-34 (1984)
[2] H.Watanabe, Diffusion approximations of some stochastic difference equations revisited, Stoch. Proc. Appl. 29, 147-154 (1988)
[3] H.Kesten and G.C.Papanicolaou, A limit theorem for turbulent diffusion, Comm. Math. Phys. 65, 97-128 (1979)

自然淘汰を考慮した抽出公式

半田 賢司（佐賀大学 理工学部）
handa@ms.saga-u.ac.jp

ここで考えるのは、ある種の（集団遺伝学的）平衡状態にある集団からランダムに抽出した個体を型により分類したときに形成される標本数の分割がどのような分布を持つかという問題であり、そしてその分布の陽な表示を「抽出公式」と呼ぶ。最も重要な抽出公式として知られる「Ewens抽出公式」は、突然変異率 $\theta > 0$ のみをパラメータとして持つが、本講演ではある特定の自然淘汰の要素も取り入れた一般化を考える。これはWattersonの論文 (Genetics 85 (1977) 789–814) を動機とするが、そこでは自然淘汰の影響が非常に小さい場合の摂動論的な結果が得られている。

数学としての設定はgamma乱測度およびそれの正規化であるDirichlet乱測度の言葉で述べることができ、問題はそれらのある汎関数の期待値の具体形を求めることである。最後の定理ではその答えを与える。

標本の成す分割: 一般に n 個の標本 $x_1, \ldots, x_n$ が与えられたとき、それらを分類してグループ分けすると、当然 n はグループのサイズの和

$$n = n_1 + \cdots + n_k \qquad (n_\alpha \in \mathbf{N}) \tag{1}$$

として表せる。これを「$x_1, \ldots, x_n$ が生成する（n の）分割」と呼ぶ。これにより n 個の確率変数は n のランダム分割を生成するが、Kingman (Proc. R. S.c. Lond. A. 361 (1978) 1-20) がpartition structureと名づけたランダム分割の分布は、交換可能な確率変数列に対応する。分割の空間の“座標”として

$$a_i = \sharp\{\alpha : n_\alpha = i\}, \qquad i = 1, 2, \ldots \tag{2}$$

を用いる。つまり $a_i \geq 0$ は (1) の右辺において i と等しい項の個数であり、したがって $n = \sum_i i a_i$ が成り立つ。（また、項の個数 $k = \sum_i a_i$ である。）このような $\mathbf{a} := (a_1, a_2, \ldots)$ の全体を、n の分割全体 $\mathcal{P}_n$ とみなす。標本が空間 X から取られる場合に、X^n の部分集合 $E_{\mathbf{a}}$ を次で定義する。

$$E_{\mathbf{a}} = \{(x_1, \ldots, x_n) : x_1, \ldots, x_n \text{ は } \mathbf{a} \text{ を生成する}\}$$

Dirichlet乱測度: μ を $(X := [0,1], dx)$ 上のパラメータ $\theta > 0$ のDirichlet乱測度とする。すなわち $[0,1]$ の任意の有限可測分割 $A_1, \ldots, A_m$ に対し、$(\mu(A_1), \ldots, \mu(A_m))$ がパラメータ $(\theta|A_1|, \ldots, \theta|A_m|)$ のDirichlet分布にしたがう。ただし、$|A_i|$ は A_i のLebesgue測度である。以下、このランダムな確率測度 μ の分布とそれに関する平均をそれぞれ P_θ, E_θ で表す。

Ewens 抽出公式: n の任意の分割 $\mathbf{a}$ に対し、

$$E_\theta\left[\mu^{\otimes n}(E_{\mathbf{a}})\right] = \frac{n!\Gamma(\theta)}{\Gamma(n+\theta)}\prod_{i=1}^{n}\frac{\theta^{a_i}}{i^{a_i}a_i!} \tag{3}$$

Dirichlet 乱測度は、率 θ で一様に突然変異しかつ自然淘汰を考慮しない Fleming-Viot 過程の定常状態を記述するため、左辺は「平衡状態からランダムに抽出した n 個の標本が分割 $\mathbf{a}$ を生成する確率」とみなされる。

'対称な' 自然淘汰を考慮した抽出公式: 上述の突然変異のほか、パラメータ $s \in \mathbf{R}$ のある種の自然淘汰も考慮した Fleming-Viot 過程の定常分布は、P_θ から次の Esscher 変換で与えられる。（ここに $D = \{(x,x) : x \in X\}$.）

$$P_{\theta,s}(\bullet) = E_\theta\left[e^{s\mu^{\otimes 2}(D)};\ \bullet\ \right]/E_\theta\left[e^{s\mu^{\otimes 2}(D)}\right] \tag{4}$$

そこでこれに関する抽出公式、すなわち $P_{\theta,s}$ に関する期待値 $E_{\theta,s}$ の言葉で与えられる次の量の明示式が問題となる。

$$E_{\theta,s}\left[\mu^{\otimes n}(E_{\mathbf{a}})\right] = E_\theta\left[e^{s\mu^{\otimes 2}(D)}\ \mu^{\otimes n}(E_{\mathbf{a}})\ \right]/E_\theta\left[e^{s\mu^{\otimes 2}(D)}\right] \tag{5}$$

形式的には右辺の分母は分子において $n = 0$ (i.e., $\mathbf{a} = (0, 0, \ldots) =: \mathbf{0}$) の場合と考えられる。そこで、分子の明示式を次の定理で与える。

$\boxed{\textbf{定理}}$ $\theta > 0, s \in \mathbf{R}$ とする。$\mathbf{a}$ を非負整数 n の任意の分割とし、$k = \sum_i a_i$ とおき、(1) は分割 $\mathbf{a}$ の一つの表示式であるとする。このとき、

$$E_\theta\left[e^{s\mu^{\otimes 2}(D)}\ \mu^{\otimes n}(E_{\mathbf{a}})\ \right] = \frac{n!}{\prod_{i=1}^{n}(i!^{a_i}a_i!)}\theta^k\sum_{l=0}^{\infty}\frac{\theta^l}{l!}I_l(\mathbf{a};\theta,s) \tag{6}$$

ここで、$I_l(\mathbf{a};\theta,s)$ は $(k+l)$-次元単位単体 Δ_{k+l} 上のある Dirichlet 分布に関する次の積分で与えられる：

$$\begin{aligned} &I_l(\mathbf{a};\theta,s) \\ &= \int_{\Delta_{k+l}}\prod_{\alpha=1}^{k}(y_\alpha^{n_\alpha}e^{sy_\alpha^2})\prod_{\alpha=k+1}^{k+l}(e^{sy_\alpha^2}-1)\left(1-\sum_{\beta=1}^{k+l}y_\beta\right)^{\theta-1}\frac{dy_1\cdots dy_{k+l}}{y_1\cdots y_{k+l}} \end{aligned} \tag{7}$$

ただし、$n = 0 = l$ に対しては $I_0(\mathbf{0};\theta,s) = 1$ と定める。

注意 $s = 0$ のとき $I_l(\mathbf{a};\theta,0) = 0$ ($l = 1, 2, \ldots$) および $I_0(\mathbf{a};\theta,0) = \Gamma(n_1)\cdots\Gamma(n_k)\Gamma(\theta)/\Gamma(n+\theta)$ より、(6) は (3) を再現する。

Fermion/Boson 過程と正準集団とその応用

田村博志（金沢大学）　伊東恵一（摂南大学）

CAR/CCR から作られた作用素代数上の state との関連で理解されていた Fermion/Boson Process を, 有限粒子系の量子力学からの熱力学的極限として初等的に理解する方法を示す. また, この方法の応用として, 量子場理論としての定式化が困難な問題（ para 粒子, 複合粒子のガス）の, 確率場の理論としての定式化を試みる.

Notations $\Lambda_L = [L/2, L/2]^d \subset \mathbb{R}^d$, $G_L = e^{\beta\triangle_L}$ (ただし, $\triangle_L$ は $L^2(\Lambda_L)$ に作用する周期境界条件の下での Laplacian), $\varphi_k^L = \exp(i2\pi k\cdot x/L)$ $(k \in \mathbb{Z}^d)$ は G_L の固有関数からなる $L^2(\Lambda_L)$ の CONS, f は compact support を持つ $\mathbb{R}^d$ 上の非負連続関数, $\tilde{G}_L = G_L^{1/2} e^{-f} G_L^{1/2}$, $G = e^{\beta\triangle}$ は $L^2(\mathbb{R}^d)$ 上の熱作用素.

Fermion Processes 箱 Λ_L の中にある N 個の自由 Ferm 粒子の系を考える. この系の, 量子力学的状態は $\mathcal{H}_{L,N}^f = A_N \otimes^N L^2(\Lambda_L)$ の元である. 但し, $A_N\psi_1\otimes\cdots\otimes\psi_n = \sum_{\sigma\in S_N}\mathrm{sgn}(\sigma)\,\psi_{\sigma^{-1}(1)}\otimes\cdots\otimes\psi_{\sigma^{-1}(n)}/N!$. この空間の CONS としては, $\Phi_k^L = \sqrt{N!}A_N\varphi_{k_1}^L\otimes\cdots\otimes\varphi_{k_N}^L$ と書くとき $\{\Phi_k^L\}_{k\in(\mathbb{Z}^d)^N_{\preceq,\neq}}$ で与えられるものが便利. さてこの系の逆温度 β での平衡状態における粒子の位置の分布を与える確率密度関数は, 正準集団の考え方により

$$p_{L,M}^f(x_1,\cdots,x_N) = Z_f^{-1}\sum_{k\in(\mathbb{Z}^d)^N_{\preceq,\neq}}\Big(\prod_{j=1}^N e^{-\beta|2\pi k_j/L|^2}\Big)|\Phi_k(x_1,\cdots,x_N)|^2$$

で与えられる. ここで $\hbar^2/2m = 1$ とした. これから $\mathbb{R}^d$ 上の Point Process （ $Q(\mathbb{R}^d)$ 上の測度 $\mu_{L,N}^f$ ）を写像 $\Lambda_L^N \ni (x_1,\cdots,x_N) \to \sum_{j=1}^N \delta_{x_j} \in Q(\mathbb{R}^d)$ によって導く. この Point Process の Laplace 変換は

$$\mathrm{E}_{L,N}^f\big[e^{-<f,\xi>}\big] = \int_{Q(\mathbb{R}^d)} e^{-<f,\xi>}d\mu_{L,N}^f(\xi) = \frac{\int_{\Lambda_L^N}\det\tilde{G}_L(x_i,x_j)\,dx_1\cdots dx_N}{\int_{\Lambda_L^N}\det G_L(x_i,x_j)\,dx_1\cdots dx_N}$$

となる.

Theorem 1 熱力学的極限 $L, N\to\infty, N/L^d\to\rho$ の下で, この *Point Process* は次の *Laplace* 変換をもつ *Fermion Process* に弱収束する.

$$\mathrm{E}_\rho^f\big[e^{-<f,\xi>}\big] = \mathrm{Det}[1-\sqrt{1-e^{-f}}z_*G(1+z_*G)^{-1}\sqrt{1-e^{-f}}]$$

但し z_* は ρ との次の関係式から一意的に決定される.

$$\rho = \int\frac{dp}{(2\pi)^d}\frac{z_*e^{-\beta|p|^2}}{1+z_*e^{-\beta|p|^2}}$$

Boson Processes 同様にして Λ_L の中にある N 個の自由 Bose 粒子の系を考える. この系の状態空間は, $\mathcal{H}_{L,N}^b = S_N\otimes^N L^2(\Lambda_L)$ である. 但し, $S_N\psi_1\otimes\cdots\otimes\psi_n = \sum_{\sigma\in S_N}\psi_{\sigma^{-1}(1)}\otimes\cdots\otimes\psi_{\sigma^{-1}(n)}/N!$. この系の逆温度 β での平衡状態から導かれる Point Process の Laplace 変換は

$$\mathrm{E}_{L,N}^b\big[e^{-<f,\xi>}\big] = \frac{\int_{\Lambda^N}\mathrm{per}\,\tilde{G}_L(x_i,x_j)\,dx_1\cdots dx_N}{\int_{\Lambda^N}\mathrm{per}\,G_L(x_i,x_j)\,dx_1\cdots dx_N}$$

となる.

$$\rho_c = \int \frac{dp}{(2\pi)^d} \frac{e^{-\beta|p|^2}}{1-e^{-\beta|p|^2}}$$

とおく.

Theorem 2 この *Point Process* は, 熱力学的極限の下で, $\rho < \rho_c$ のとき次の *Laplace* 変換をもつ *Boson Process* に弱収束する.

$$\mathrm{E}^b_\rho[e^{-<f,\xi>}] = \mathrm{Det}[1+\sqrt{1-e^{-f}}z_* G(1-z_* G)^{-1}\sqrt{1-e^{-f}}]^{-1}$$

ここで z_* は次式で与えられる.

$$\rho = \int \frac{dp}{(2\pi)^d} \frac{z_* e^{-\beta|p|^2}}{1-z_* e^{-\beta|p|^2}}$$

また, $\rho > \rho_c$ のとき次の *Laplace* 変換をもつ *Point Process* に弱収束する.

$$\mathrm{E}^b_\rho[e^{-<f,\xi>}] = \frac{\exp\left(-(\rho-\rho_c)(\sqrt{1-e^{-f}}, [1+\sqrt{1-e^{-f}}G(1-G)^{-1}\sqrt{1-e^{-f}}]^{-1}\sqrt{1-e^{-f}})\right)}{\mathrm{Det}[1+\sqrt{1-e^{-f}}G(1-G)^{-1}\sqrt{1-e^{-f}}]}$$

Vere-Jones の公式 これらの定理の証明には次の公式が重要な役割をする.

$$\int \det_\alpha\{J(x_i,x_j)\}_{1\le i,j\le N}\, dx_1\cdots dx_n = N! \oint_{S_r(0)} \frac{dz}{2\pi i z^{N+1}} \mathrm{Det}[1-z\alpha J]^{-1/\alpha}$$

ここで, $\alpha \in [-1,1]-\{0\}$, $N\times N$ 行列 A に対し $\det_\alpha A = \sum_{\sigma\in\mathcal{S}_N} \alpha^{N-\nu(\sigma)}\prod_i A_{i\sigma(i)}$ であり, $\det_1$ は per, $\det_{-1}$ は通常の det となる. $S_r(0)$ は $\mathbb{C}$ 内の中心 0 半径 r の円周, J は積分核 $J(x,y)$ を持つ有界作用素. ($-1/\alpha \notin \mathbb{N}$ のときは $r||J||<1$ も必要.)

Para-bosons of order 2 各 $j=1,\cdots,[N/2]$ に対し Young frame $(N-j,j)$ 上の Young tableau T_j を一つずつ, また frame (N) 上に tableau T_0 を与える. $\mathcal{S}_N$ の群環 $\mathbb{C}[\mathcal{S}_N]$ 上の表現における T_j に対応する規約表現空間への射影を $e(T_j)$ とする. $\mathcal{S}_N$ の $\otimes^N L^2(\Lambda_L)$ 上のユニタリ表現（及びその $\mathbb{C}[\mathcal{S}_N]$ への拡張） U を

$$U(\sigma)\varphi_1\otimes\cdots\otimes\varphi_N = \varphi_{\sigma^{-1}(1)}\otimes\cdots\otimes\varphi_{\sigma^{-1}(N)} \qquad (\,\varphi_1,\cdots,\varphi_N \in L^2(\Lambda_L)\,)$$

によって定義する.

Λ_L の中にある N 個の自由 Para-Bose 粒子 (order 2) の系を考える. この系の状態空間は, $\mathcal{H}^{2b}_{L,N} = P^{2b}_N \otimes^N L^2(\Lambda_L)$ である. 但し, $P^{2b}_N = \sum_{j=0}^{[N/2]} U(e(T_j))$. この系の逆温度 β での平衡状態から導かれる Point Process の Laplace 変換は

$$\mathrm{E}^{2b}_{L,N}[e^{-<f,\xi>}] = \frac{\sum_{j=0}^{[N/2]}\int_{\Lambda_L^N} \det_{T_j}\tilde{G}_L(x_i,x_k)\,dx_1\cdots dx_N}{\sum_{j=0}^{[N/2]}\int_{\Lambda_L^N} \det_{T_j} G_L(x_i,x_k)\,dx_1\cdots dx_N}$$

となる. ここで $\det_T A = \sum_{\sigma\in\mathcal{S}_N}\chi_T(\sigma)\prod_i A_{i\sigma(i)}$ である.

Theorem 3 この *Point Process* は, 熱力学的極限の下で, $\rho/2 = \int \frac{dp}{(2\pi)^d}\frac{z_* e^{-\beta|p|^2}}{1-z_* e^{-\beta|p|^2}} < \rho_c$ のとき次の *Laplace* 変換をもつ *Point Process* に弱収束する.

$$\mathrm{E}^{pb}_\rho[e^{-<f,\xi>}] = \mathrm{Det}[1+\sqrt{1-e^{-f}}z_* G(1-z_* G)^{-1}\sqrt{1-e^{-f}}]^{-2}$$

$\rho/2 > \rho_c$ の場合, order 2 の Para-fermion の場合もそれぞれ対応する結果が成立する.

Reference

T. Shirai and Y. Takahashi, Random point fields associated with certain Fredholm determinants I: fermion, Poisson and boson point processes, J. Funct, Anal. **205** (2003) 414–463.

弱結合領域における4次の係数が負である階層的ϕ_4^6模型の自明性

保阪賢資　（神戸大学自然科学研究科）

$\mathbf{Z}^d$ を d 次元正方格子とする。L を10以上の偶数とし（この L を**くりこみ変換のスケール**と呼ぶ）、標準正規分布 $N_{0,1}$ に従う独立確率変数列 $\{Z_x^k; x \in \mathbf{Z}^d, k \in \mathbf{Z}_+\}$ に対して、次の確率場 $\{\phi_x; x \in \mathbf{Z}^d\}$ を考える。

$$\phi_x = \sum_{n=0}^{\infty} L^{-n(d-2)/2} A_{[L^{-n}x]} Z^n_{[L^{-(n+1)}x]}. \tag{1}$$

ここで $[x] = ([x_1], \cdots, [x_d])$ で $[\ ]$ は Gauss 記号とし、A_x を 1 又は -1 を取る x の関数で任意の y に対して $\sum_{[L^{-1}x]=y} A_x = 0$ を満たすように定義されているものとする。$\{\phi_x\}_{x\in\mathbf{Z}^d}$ の分布を $d\nu_{G_h}$ と書くと、**potential** $V(\phi) = \sum_x v(\phi_x)$ （$v(\phi_x)$ を **single spin potential** と呼ぶ）に対して次のような Gibbs 分布を考える。

$$d\nu_V(\phi) = \frac{1}{Z}\exp[-V(\phi)]d\nu_{G_h}(\phi). \tag{2}$$

ただし Z は規格化定数。このような格子模型を Gawędzki-Kupiainen 型階層模型と呼ぶ。これらの確率模型は、block spin 変換

$$\phi'_x = L^{-(d+2)/2} \sum_{[L^{-1}y]=x} \phi_y \tag{3}$$

から定まるくりこみ変換を簡単に行なう為に考案された模型で、実際 (2) に (3) の変換を作用させると次のように書ける [1]。

$$d\nu_{V'}(\phi') = \frac{1}{Z'}\exp[-V'(\phi')]d\nu_{G_h}(\phi') \tag{4}$$

potential $V'(\phi')$ は次のように $V'(\phi') = \sum_{x\in\mathbf{Z}^d} v'(\phi'_x)$ と、くりこみ変換された single spin potential の和で書き表すことができ、その具体形は

$$e^{-v'(\phi'_x)} = \frac{\int_{\mathbf{R}} \exp[-\frac{1}{2}L^d[v(L^{-(d-2)/2}\phi'_x + z) + v(L^{-(d-2)/2}\phi'_x - z)]]d\nu(z)}{\int_{\mathbf{R}} \exp[-L^4 v(z)]d\nu(z)},\ x \in \mathbf{Z}^d. \tag{5}$$

という1次元の積分で書ける。ただし、$d\nu(z) = \exp[-z^2/2]dz/\sqrt{2\pi}$ である。

[先行結果及び主結果]　我々は、くりこみ変換 (5) によって定義される single spin potential の離散力学系に興味を持つ。まず single spin potential $v(\phi_x) \equiv 0$ はこの力学系の不動点の一つだとわかる。この不動点を **Gauss 型固定点**と呼ぶ。そして、ある single spin potential $v_0(\phi_x)$ を初期値とするこの力学系の軌道が Gauss 型固定点に吸い込まれる時、その初期値の single spin potential を持つ格子模型は**自明性**を持つという。階層的な格子模型に関する自明性の結果として、次元 d が $d \geq 4$ ならば初期値の single spin potential $v_0(\phi_x)$ が $v_0(\phi_x) = \mu_0\phi_x^2 + \lambda_0\phi_x^4$ （このような初期値の single spin potential を持つ模型を ϕ^4 **模型**と呼ぶ）の**弱結合領域**（大雑把に言えば λ が十分小さいパラメタ領域）において自明性が示された [1]。弱結合領域以外の結果としては、次元 d が4以上として初期値の single spin potential が Hierarchical Ising $v_{I,s}$ と呼ばれる次の形のもの $v_{I,s}(\phi_x) = -\log\{\frac{1}{2}(\delta(\phi_x - s) + \delta(\phi_x + s))\}$ について自明性が証明されている [3]。

今回われわれは次の初期値の single spin potential の class $\mathcal{V}_0(L, D, C_1, n_0, \rho_0)$ の中に、自明性が成り立つものが存在するという以下のような結果を得た。

Ta 複素領域 $|\mathbf{Im}\phi_x| < C_1((L^{-4}\rho_0^{-1})^{1/6} \wedge n_0^{1/4})$ に対して、$\exp[-v_0(\phi_x)]$ は解析的で実軸上で正値を取る偶関数で、次の上からの評価を持つ。

$$|e^{-(v_0)(\phi_x)}| \leq \exp[D - (\lambda_0^{1/2} + \rho_0^{1/3})|\phi_x|^2 + 20\lambda_0(\mathbf{Im}\phi_x)^4 + 2004\rho_0(\mathbf{Im}\phi_x)^6]. \tag{6}$$

Tb 複素領域 $|\phi_x| < C_1((L^{-4}\rho_0^{-1})^{1/6} \wedge n_0^{1/4})$ において、 $v_0(\phi_x)$ の 4 次以上の部分 $(v_0)_{\geq 4}(\phi_x)$ は解析的でかつ、次のように書ける。

$$(v_0)_{\geq 4}(\phi_x) = (\lambda_0 - \frac{15\rho_0}{1-L^{-2}})\phi_x^4 + \rho_0\phi_x^6 + (v_0)_{\geq 8}(\phi_x), \tag{7}$$

そして、各係数及び部分に対して次の評価を満たす。

$$\frac{C_{--}L^{-4}}{n_0} \leq \lambda_0 \leq \frac{C_{++}L^{-4}}{n_0}, \quad C_{--} = \frac{1}{42}, \quad C_{++} = \frac{1}{28}, \tag{8}$$

$$|(v_0)_{\geq 8}(\phi_x)| \leq \rho_0^{2/3} n_0^{1/8} \vee n_0^{-3/4}. \tag{9}$$

ただし、$(v_0)_{\geq m}(\phi) = v_0(\phi) - \sum_{l=0}^{m-1} \frac{d^l v_0(0)}{d\phi^l}\phi^l$ とする。主張を正確に書くと次のようになる。

Theorem 1 ([6]) $d = 4$ とし、$L \geq 10$ とする。このとき以下の主張を満たす、ある定数 D, $\bar{C}_1(L,D) \geq L$, $\bar{n}_0(L,D,C_1) \geq L^{48}$ が存在する。初期値の *single spin potential* $v_0(\phi_x)$ が $\mathcal{V}_0(L,D,C_1,n_0,\rho_0)$ に含まれているならば、ある $\mu_{crit} = \mu(\lambda_0,\rho_0)$ が存在して、初期値の *single spin potential* $v_0(\phi_x)$ を

$$v_0(\phi_x) = \mu_{crit}\phi_x^2 + (v_0)_{\geq 4}(\phi_x) \tag{10}$$

としたときの *Gawędzki-Kupiainen* 型階層的格子模型は自明性が成り立つ。

6 次の項の係数の大きさが 4 次の項の係数の大きさがほぼ等しい single spin potential の class にまで拡張できたのが本質的である。このため表題にある 4 次の係数が負である初期値の single spin potential であるものを取り扱う事ができた。その single spin potential は [1] の扱っている class に含まれないだけでなく、Lee-Yang の性質 $\mathcal{L}$ を満たしていない為に [5]、Newman の不等式が成立しない。その為に [3] の手段では自明性を証明できないことを付記する。3 次元では Müller と Schiemann による ϕ^6 模型の自明性の結果 [4] が知られているが、彼らの方法は 3 次元特有の方法によるもので、その方法を 4 次元以上にそのまま適応することができないことに注意する。

Gawędzki と Kupiainen は論文 [2] で負の結合係数（つまり、$\lambda_0 < 0$）を持つ非自明な階層的 ϕ_4^4 模型を構成に成功した。4 次の結合係数が負であれば非自明な模型が構成できると期待されるが、少なくとも我々の扱えた potential の class にはそのようなものが含まれなかった。

証明は [1] の証明で用いた数学的帰納法を拡張することにより $\mathcal{V}_0(L,D,C_1,n_0,\rho_0)$ から出発した軌跡が [1] で扱ってる single spin potential の class に入る事を確かめることにより示した。

参考文献

[1] K. Gawędzki. and A. Kupiainen. : Triviality of ϕ_4^4 and all that in a hierarchical model approximation. J. Stat. Phys. 29, 683-699 (1982)

[2] K. Gawędzki. and A. Kupiainen. : Non-Trivial Cnotinuum Limit of a ϕ_4^4 Model with Negative Coupling Constant. Nuclear Physics B257 [FS14] (1985) 474-504

[3] T. Hara. T. Hattori. and H. Watanabe. : Triviality of Hierarchical Ising model in Four Dimensions. Commun. Math. Phys. 220, 13-40 (2001)

[4] V. F. Müller. and J. Schiemann. : Infrared Asymptotic Freedom of a Hierarchical ϕ_3^6 Lattice Theory. J. Stat. Phys. 43, 123-142 (1986)

[5] C. Newman. : Zeros of the Partition Function for Generalized Ising Systems. Commun. Pure Appl. Math. 27, 143-159 (1974)

[6] K. Hosaka. : Triviality of Hierarchical Models with Small Negative ϕ^4 Model in Four Dimensions. Preprint.

Critical points for spread-out self-avoiding walk, percolation and the contact process above the upper critical dimensions

Remco van der Hofstad[1] and Akira Sakai[2]
Department of Mathematics and Computer Science, TU/e
&
EURANDOM

1 Motivation

Self-avoiding walk, percolation and the contact process are well-known models that exhibit critical phenomena. For percolation in two or higher dimensions, for example, there is a critical point $p_c^{\text{perc}} > 0$ such that there is almost surely no infinite cluster for $p < p_c^{\text{perc}}$, while for $p > p_c^{\text{perc}}$ there is almost surely a unique infinite cluster. As $p \uparrow p_c^{\text{perc}}$, the average cluster size and the correlation length diverge. The precise value of p_c^{perc} depends on the details of the model, and is only explicitly known in a few cases.

We consider the spread-out models of self-avoiding walk, percolation, oriented percolation and the contact process, where the interaction is uniform over the box of side length $2L$ in the d-dimensional integer lattice $\mathbb{Z}^d$. For self-avoiding walk, for example, each step is chosen uniformly in the box of side length $2L$ centered at the starting point of the step, so that there is repulsive interaction uniformly in that box, due to the self-avoiding constraint (see below for the precise definition). When L is sufficiently large, the interaction in the considered models is relatively weak, and therefore the critical points are expected to be close to the critical point 1 of the corresponding models with no interaction (*mean-field models*), i.e., random walk and branching random walk.

In 1999, Durrett and Perkins [1] proved that the critical point p_c^{cp} for the spread-out contact process above two dimensions satisfies

$$\lim_{L\to\infty} \frac{p_c^{\text{cp}} - 1}{L^{-d}} = \sum_{n=2}^{\infty} U^{\star n}(o), \tag{1}$$

where $U(x) = \frac{1}{2^d}\mathbb{1}_{\{\|x\|_\infty \le 1\}}$ is the uniform probability distribution over $[-1,1]^d \subset \mathbb{R}^d$, and $U^{\star n}$ is the n-fold convolution of U in $\mathbb{R}^d$. Inspired by this result, we are interested in the asymptotics of the difference between the critical point for each interacting model and the mean-field value 1, scaled by L^{-d} as in (1), with error estimates, especially in finding out how the model-dependence shows up in the asymptotics.

2 Models and the main result

A self-avoiding walk $\omega = (\omega_0, \dots, \omega_{|\omega|})$ is a path in $\mathbb{Z}^d$ of length $|\omega| \ge 0$, with $\omega_i \ne \omega_j$ for every distinct $i, j \in \{0, \dots, |\omega|\}$ when $|\omega| \ge 1$. To each walk ω, we assign weight $W_p(\omega)$ that is 1 if $|\omega| = 0$, otherwise

$$W_p(\omega) = p^{|\omega|} \prod_{i=1}^{|\omega|} D(\omega_i - \omega_{i-1}), \tag{2}$$

where

$$D(x) = \frac{\mathbb{1}_{\{0<\|x\|_\infty \le L\}}}{\sum_{y\in\mathbb{Z}^d} \mathbb{1}_{\{0<\|y\|_\infty \le L\}}} = \frac{\mathbb{1}_{\{0<\|x\|_\infty \le L\}}}{(2L+1)^d - 1}. \tag{3}$$

Note that $D(x) \sim L^{-d} U(L^{-1}x)$ as $L \to \infty$. The self-avoiding walk two-point function and its sum over $\mathbb{Z}^d$ are defined as

$$\tau_p^{\text{saw}}(x) = \sum_{\omega: o \xrightarrow[\text{saw}]{} x} W_p(\omega), \qquad \chi_p^{\text{saw}} = \sum_{x\in\mathbb{Z}^d} \tau_p^{\text{saw}}(x). \tag{4}$$

If there is no self-avoiding constraint, the two-point function is equivalent to the random walk Green's function with killing rate $1-p$, and hence its sum equals $(1-p)^{-1}$ for $p < 1$. For self-avoiding walk, it is known that there is a $p_c^{\text{saw}} \ge 1$ such that χ_p^{saw} is finite if and only if $p < p_c^{\text{saw}}$ and diverges as $p \uparrow p_c^{\text{saw}}$. Moreover, when $d > 4$ and $L \gg 1$, the divergence of χ_p^{saw} is mean-field like, i.e., $\chi_p^{\text{saw}} \approx (p_c^{\text{saw}} - p)^{-1}$ as $p \uparrow p_c^{\text{saw}}$.

[1] r.w.v.d.hofstad@tue.nl
[2] sakai@eurandom.tue.nl

For percolation, each bond $\{x,y\}$ is occupied with probability $p\,D(y-x)$ and vacant with probability $1-p\,D(y-x)$, independently of the other bonds, where $p\in[0,\|D\|_\infty^{-1}]$. Since $\sum_{x\in\mathbb{Z}^d}D(x)=1$, the parameter p is the expected number of occupied bonds per site. We denote by $\mathbb{P}_p^{\text{perc}}$ the probability distribution of the bond variables. We say that x is connected to y, and write $x\longleftrightarrow y$, if either $x=y$ or there is a path of occupied bonds between x and y. The percolation two-point function and its sum over $\mathbb{Z}^d$ are denoted by

$$\tau_p^{\text{perc}}(x)=\mathbb{P}_p^{\text{perc}}(o\longleftrightarrow x),\qquad\qquad \chi_p^{\text{perc}}=\sum_{x\in\mathbb{Z}^d}\tau_p^{\text{perc}}(x). \tag{5}$$

Similarly to self-avoiding walk, there is a $p_c^{\text{perc}}\geq 1$ such that χ_p^{perc} is finite if and only if $p<p_c^{\text{perc}}$ and diverges as $p\uparrow p_c^{\text{perc}}$. In addition, $\chi_p^{\text{perc}}\approx(p_c^{\text{perc}}-p)^{-1}$ as $p\uparrow p_c^{\text{perc}}$ when $d>6$ and $L\gg 1$.

Oriented percolation is a time-directed version of percolation. Each bond $((x,t),(y,t+1))$ is an ordered pair of sites in $\mathbb{Z}^d\times\mathbb{Z}_+$, and is occupied with probability $p\,D(y-x)$ and vacant with probability $1-p\,D(y-x)$, independently of the other bonds, where $p\in[0,\|D\|_\infty^{-1}]$. We say that (x,s) is connected to (y,t), and write $(x,s)\longrightarrow(y,t)$, if either $(x,s)=(y,t)$ or there is an oriented path of occupied bonds from (x,s) to (y,t). Let $\mathbb{P}_p^{\text{op}}$ be the probability distribution of the bond variables. The oriented percolation two-point function and its sum over $\mathbb{Z}^d\times\mathbb{Z}_+$ are denoted by

$$\tau_p^{\text{op}}(x,t)=\mathbb{P}_p^{\text{op}}((o,0)\longrightarrow(x,t)),\qquad\qquad \chi_p^{\text{op}}=\sum_{t\in\mathbb{Z}_+}\sum_{x\in\mathbb{Z}^d}\tau_p^{\text{op}}(x,t). \tag{6}$$

Oriented percolation also exhibits a phase transition such that $\chi_p^{\text{op}}<\infty$ if and only if $p<p_c^{\text{op}}$ and $\chi_p^{\text{op}}\uparrow\infty$ as $p\uparrow p_c^{\text{op}}$, and exhibits the mean-field behavior $\chi_p^{\text{op}}\approx(p_c^{\text{op}}-p)^{-1}$ as $p\uparrow p_c^{\text{op}}$ when $d>4$ and $L\gg 1$.

The contact process is a model of the spread of an infection in $\mathbb{Z}^d$. Let $\mathbf{C}_t\subset\mathbb{Z}^d$ be the set of infected individuals at time $t\in\mathbb{R}_+$, and let $\mathbf{C}_0=\{o\}$. An infected site spontaneously recovers at rate 1, while a healthy site x gets infected, depending on the status of its neighbors, at rate $p\sum_{y\in\mathbf{C}_t}D(x-y)$, where $p\geq 0$ is the infection rate. Denoting the associated probability measure by $\mathbb{P}_p^{\text{cp}}$, we define the contact process two-point function and its integro-sum over $\mathbb{Z}^d\times\mathbb{R}_+$ as

$$\tau_p^{\text{cp}}(x,t)=\mathbb{P}_p^{\text{cp}}(x\in\mathbf{C}_t),\qquad\qquad \chi_p^{\text{cp}}=\int_0^\infty dt\sum_{x\in\mathbb{Z}^d}\tau_p^{\text{cp}}(x,t). \tag{7}$$

Again, there is a $p_c^{\text{cp}}\geq 1$ such that χ_p^{cp} is finite if and only if $p<p_c^{\text{cp}}$ and diverges as $p\uparrow p_c^{\text{cp}}$. The contact process also exhibits the same mean-field behavior $\chi_p^{\text{cp}}\approx(p_c^{\text{cp}}-p)^{-1}$ as $p\uparrow p_c^{\text{cp}}$, when $d>4$ and $L\gg 1$.

The following is our main result on the asymptotics of the critical points for the above interacting models in the limit $L\to\infty$.

Theorem 1. *Let $d>6$ for percolation, and let $d>4$ for the other models. As $L\to\infty$,*

$$\left.\begin{matrix}p_c^{\text{saw}}\\ p_c^{\text{cp}}\end{matrix}\right\}=1+L^{-d}\sum_{n=2}^\infty U^{\star n}(o)+O(L^{-d-1}), \tag{8}$$

$$p_c^{\text{op}}=1+\frac{L^{-d}}{2}\sum_{n=2}^\infty U^{\star 2n}(o)+O(L^{-d-1}), \tag{9}$$

$$p_c^{\text{perc}}=1+L^{-d}\Big[U^{\star 2}(o)+\sum_{n=3}^\infty\frac{n+1}{2}\,U^{\star n}(o)\Big]+O(L^{-d-1}). \tag{10}$$

Note that the model-dependent coefficients of L^{-d} in (8)–(10) are finite if $d>4$ for percolation and if $d>2$ for the other models. We also note that the result (8) for the contact process is stronger than the Durrett-Perkins result (1) when $d>4$.

The proof of Theorem 1 is based on the so-called *lace expansion* and estimates of the dominant coefficients in the lace expansion with respect to random walks generated by D.

References

[1] R. Durrett and E. Perkins. Rescaled contact processes converge to super-Brownian motion in two or more dimensions. *Probab. Theory Related Fields* **114** (1999): 309–399.

[2] R. van der Hofstad and A. Sakai. Critical points for spread-out self-avoiding walk, percolation and the contact process above the upper critical dimensions. To appear in *Probab. Theory Related Fields.*

Directed polymers in random environment are diffusive at all subcritical temperature.[1]

Francis COMETS (Paris 7) 吉田伸生（京都大学）

「ランダム媒質中のディレクティドポリマー」に関する基本的問題で、長い間（少なくとも我々には）不明のだったものの幾つかについて、ある程度の解答を得たので報告する。

• **ディレクティドポリマー:** $\omega = (\omega_n)_{n\geq 0}$ は d 次元単純ランダムウォークで、確率空間 $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ で定義されるとする。「折れ線」グラフ：

$$(j, \omega_j) \in \mathbb{Z}^{1+d}, \quad j = 1, ..., n$$

を（ディレクティド）ポリマーと呼ぶ。

• **ランダム媒質:** $\eta = \{\eta(n, x) : n \in \mathbb{N},\ x \in \mathbb{Z}^d\}$ は独立同分布確率変数列で、確率空間 $(H, \mathscr{G}, Q)$ で定義されるとする。η は、ポリマーを取り巻く不純物を記述する。次の仮定を置く：

$$\exp(\lambda(\beta)) := Q \exp(\beta\eta(x, n)) < \infty, \quad \forall \beta \in \mathbb{R}.$$

• **ポリマーの分布:** ポリマーの分布を $(\Omega, \mathscr{F})$ 上の確率測度：

$$\mu_n(d\omega|\eta) = \frac{1}{W_n(\eta)} P[e_n(\omega, \eta) : d\omega],$$

で与える、但し

$$\begin{aligned} e_n(\omega, \eta) &= \exp\left(\beta \sum_{1\leq j\leq n} \eta(\omega_j, j) - n\lambda(\beta)\right) \\ W_n(\eta) &= P[e_n(\omega, \eta)] \end{aligned}$$

また、$\beta \in (0, \infty)$ は **逆温度** と呼ばれる定数である。$\mu_n(d\omega|\eta)$ はポリマーとランダム媒質 η の相互作用エネルギーを

$$-\sum_{1\leq j\leq n} \eta(j, \omega_j)$$

で与えるときの有限体積 Gibbs 分布に他ならない。$\mu_n(d\omega|\eta)$ はランダム媒質 η をパラメーターとして含んだ測度である点に注意。この模型での主要研究課題は、

(1) 測度 $\mu_n(d\omega|\eta)$ で観測したポリマーの長時間挙動 $(n \nearrow \infty)$

と言える。

• **媒質からの摂動が弱い相／強い相の転移**：上記模型は 次元 d と 逆温度 β の値によって、媒質からの摂動が弱い相 (weak disorder phase) と強い相 (strong disorder phase) の間の転移を起こす。媒質からの摂動が弱い相は $d \geq 2$ かつ β が小さいときに現われ、(1) で問題とするポリマー

[1]2004 年 12 月「確率過程とその周辺」（名古屋大学）の為の予稿

の長時間挙動は通常のランダムウォークと本質的に同じである [Bol89, SoZh96, CY04]. これに対し媒質からの摂動が強い相は $d = 1, 2$ 或は β が十分大きいときに現われ、ポリマーの長時間挙動が通常のランダムウォークと全く異なる [CaHu02, CSY03].

● **2 相の数学的定義**：媒質からの摂動が弱い相と強い相の一般的な数学的判別は次の通り：まず、極限 $W_\infty(\eta)$ が $Q(d\eta)$-a.s. で存在することに注意する（martingale 収束定理）。更に次の 0-1 法則が成立：

$$\theta(\beta) \stackrel{\text{def.}}{=} Q\{W_\infty(\eta) = 0\} = 0, \text{ or } 1.$$

$\theta(\beta) = 0, 1$ をそれぞれ、**媒質からの摂動が弱い相**、**強い相**の定義とする。

● **臨界値の存在**： $\theta(\beta)$ について既知の事柄の主なものは：

(a) $d = 1, 2$ なら全ての $\beta > 0$ に対し $\theta(\beta) = 1$ [CaHu02, CSY03].

(b) $d \geq 3$ かつ β が十分小さければ $\theta(\beta) = 0$ [Bol89, SoZh96]. $d \geq 3$ かつ「β が十分大きい」事に対応する条件を仮定すれば、 $\theta(\beta) = 1$ [CaHu02, CSY03].

上記 (b) の相転移について、臨界値の有無は不明だった。今回、これが解った。

定理 1 [CY04] $d \geq 3$ なら次の意味での臨界値 $\beta_c \in (0, \infty]$ が存在する：

$$\theta(\beta) = \begin{cases} 0 & \text{if } \beta < \beta_c, \\ 1 & \text{if } \beta > \beta_c. \end{cases}$$

● **中心極限定理**： 次の中心極限定理が既知 [Bol89, SoZh96]： $d \geq 3$ かつ β が十分小さければ、$Q(d\eta)$- 概収束で

$$\text{(2)} \qquad \lim_n \mu_n \left(\frac{\omega_n}{\sqrt{n}} \in dx \,\middle|\, \eta \right) = \mathscr{N}_d(dx) \stackrel{\text{def.}}{=} (2d\pi)^{-d/2} \exp\left(-|x|^2/2d\right) dx.$$

これに対し、収束の意味を少し弱めた中心極限定理が、媒質からの摂動が弱い相全体で成立することが解った：

定理 2 [CY04] $d \geq 3$ かつ $\theta(\beta) = 0$ （特に $\beta < \beta_c$ ）なら、 $Q(d\eta)$- 確率収束で (2) が成立。
注： $\theta(\beta) = 1$ なら $|\omega_n| \approx n^\xi$ ($\xi > 1/2$: 超拡散) が予想されている。

参考文献

[Bol89] Bolthausen, E.: A note on diffusion of directed polymers in a random environment, Commun. Math. Phys. **123**, 529–534, (1989).

[CaHu02] Carmona, P., Hu Y., 2001: On the partition function of a directed polymer in a random environment, Probab.Theory Related Fields **124** (2002), no. 3, 431–457.

[CSY03] Comets, F., Shiga, T., Yoshida, N.: Directed Polymers in Random Environment: Path Localization and Strong Disorder, Bernoulli, **9**(3), 2003, 705–723.

[CSY04] Comets, F., Shiga, T., Yoshida, N.: Probabilistic analysis of directed polymers in random environment: a review, Advanced Studies in Pure Mathematics, **39**, 115–142, (2004).

[CY04] Comets, F., Yoshida, N.: Directed polymers in random environment are diffusive at weak disorder, preprint (2004).

[SoZh96] Song, R. and Zhou, X. Y. : A remark on diffusion on directed polymers in random environment, J. Stat. Phys. **85**, Nos.1/2, 277–289, (1996).

Operator-semistable, Operator Semi-selfdecomposable Probability Measures and Related Nested Classes on p-adic Vector Spaces

Lecture by: Riddhi Shah[1,2]
(Joint work with Makoto Maejima[1])

Abstract

Let V be a finite dimensional p-adic vector space, where p is a prime number. Let $\mathcal{P}(V)$ denote the topological semigroup of probability measures on V, with weak topology and convolution '$*$' as the semigroup operation. Let $GL(V)$ denote the group of all invertible linear operators on V. A measure μ in $\mathcal{P}(V)$ is said to be *operator-semistable* if there exist $\tau \in GL(V)$ and $c \in]0,1[$ such that μ is embeddable in a continuous one-parameter convolution semigroup $\{\mu_t\}_{t\geq 0} \subset \mathcal{P}(V)$ satisfying $\mu = \mu_1$ and $\tau(\mu_t) = \mu_{ct}$ for all $t \geq 0$; we call μ as above *(τ, c)-semistable*. Let $OSS(\tau)$ denote the set of all (τ, c)-semistable measures on V. We now define nested classes of τ-decomposable measures on V for some $\tau \in GL(V)$ as follows: Let $L_{-1}(\tau) = ID(V)$, the set of all infinitely divisible measures on V, for $m \geq 0$, let

$$L_m(\tau) = \{\mu \in ID(V) : \mu = \tau(\mu) * \nu, \nu \in L_{m-1}(\tau)\} \text{ and } L_\infty(\tau) = \bigcap_m L_m(\tau).$$

If τ is contracting on V, then $L_0(\tau)$ is same as the class of all τ-semi-selfdecomposable measures on V. Clearly, $OSS(\tau) \subset L_\infty(\tau)$. Also, $L_\infty(\tau)$ contains all Dirac measures, idempotent measures ω_H such that $\tau(H) \subset H$ and all τ-invariant measures. In fact, we show in [MSh] that $L_\infty(\tau)$ is the

[1]Address: Department of Mathematics, Keio University, 3-14-1, Hiyoshi, Kohoku-ku, Yokohama 223-8522, Japan, maejima@math.keio.ac.jp

[2]Permanent address : School of Mathematics, TIFR, Homi Bhabha Road, Mumbai, 400 005, India, riddhi@math.tifr.res.in

smallest τ-completely closed class containing all measures from $OSS(\tau)$, all Dirac measures, idempotent measures ω_H such that $\tau(H) \subset H$ and all τ-invariant measures. This is a generalization of a result by M. Maejima, K. Sato and T. Watanabe on real vector spaces (cf. [MSW2]).

If $\mu \in ID(V)$, there exists $x \in V$ such that $\mu * \delta_x$ is embeddable (cf. [Sh]). In case of embeddable measures in $L_m(\tau)$, we show that μ has an embedding in $\{\mu_t\}_{t\geq 0} \subset L_m(\tau)$ and we also describe the structure of the Lévy measure of $\{\mu_t\}_{t\geq 0}$, $(\mu_0 = \delta_0)$. This is a generalization of a result on real vector spaces (cf. [MSW1]). We use the structure of the Lévy measure of $\{\mu_t\}_{t\geq 0}$ in $L_\infty(\tau)$ to describe $L_\infty(\tau)$ as above (cf. [MSh]).

References

[MSW1] M. Maejima, K. Sato and T. Watanabe. Operator semi-selfdecomposability, (C, Q)-decomposability and related nested classes. *Tokyo Journal of Mathematics* **22** (1999), 473–509.

[MSW2] M. Maejima, K. Sato and T. Watanabe. Completely operator semi-selfdecomposable distributions. *Tokyo Journal of Mathematics* **23** (2000), 235–253.

[MSh] M. Maejima and R. Shah. Operator-semistable, Operator Semi-selfdecomposable Probability Measures and Related Nested Classes on p-adic Vector Spaces. Manuscript under preparation.

[Sh] R. Shah. Infinitely divisible measures on p-adic groups. *Journal of Theoretical Probability* **4** (1991), 391–405.

作用素的半自己相似性を持つ確率過程の構成

西郷達彦　高橋　弘　(慶應義塾大学院理工学研究科)

Kesten-Spitzer は Random walks in random scenery の極限として，定常増分性と自己相似性を持つ確率過程を構成した．彼らの方法に習い，定常増分性と作用素的半自己相似性を持つ確率過程を構成する．

定義 1. $\mathbf{R}^d$ 値確率過程 $\{Y(t), t \geq 0\}$ が operator semi-selfsimilar with exponent H であるとは，$a > 1$ と 線形作用素 H が存在して，

$$\{Y(at), t \geq 0\} \stackrel{\mathrm{d}}{=} \{a^H Y(t), t \geq 0\} \tag{1}$$

が成立することを指す．ここで $\stackrel{\mathrm{d}}{=}$ は両辺の任意の有限次元分布が一致することを表す．またこれ以降 $r = \inf\{a > 1 : (1)$ を満たす.$\}$ として，operator (r, H)-semi-selfsimilar process と呼ぶ．さらに $H = hI$ となるときは (r, h)-semi-selfsimilar process と呼ぶ.

この確率過程は，作用素的である，半自己相似性を持つ，という二重の意味で自己相似過程の拡張となる．また $r = 1$ のとき (1) はすべての $a > 1$ について成立し，operator H-selfsimilar process と呼ばれる．

定義 2. $\mathbf{R}^d$ 上の確率分布 μ が operator B-semi-stable であるとは，その特性関数 $\hat{\mu}(z)$ について $a \in (0,1) \cup (1,\infty)$ と可逆な線形作用素 B が存在して，

$$\hat{\mu}(z)^a = \hat{\mu}(a^{B^*} z) \tag{2}$$

とかけることである．ここで B^* は B の 共役作用素 を表す．$r = \inf\{a > 1, (2)$ を満たす.$\}$ として operator (r, B)-semi-stable と呼ぶ．さらに $B = \frac{1}{\alpha} I$ であるとき d 次元 (r, α)-semi-stable と呼ぶ.

Semi-stable 分布は無限分解可能分布であることが知られている．よって時刻 $t = 1$ の分布が semi-stable である Lévy 過程が存在し，これを semi-stable Lévy process と呼ぶ．上の定義の semi-stable 分布について Lévy 過程をそれぞれ $\{Z_B(x)\}, \{Z_\alpha(t)\}$ と表す．一般に B は一意には決定しないが，その固有値は決定する．その最大，最小固有値をそれぞれ T_B, τ_B とする．(2) のような分解ができるときは $\tau_B \geq 1/2$ であることが知られている．また $\tau_B > 1/2$ であるときは Gauss part を持たない．以後，$\tau_B > 1/2$ を仮定する．

ここで考察する確率過程は以下に定義される Random walks in random scenery の極限である：

設定.　整数値で平均 0 の独立同分布に従う確率変数列 $\{X_i, i \in \mathbf{N}\}$ からランダムウォーク $S_k = \sum_{i=1}^k X_i$ を定義する．また $\{\xi(j), j \in \mathbf{Z}\}$ を $\{S_k\}$ と独立である独立同分布に従う確率

変数列とする．この二つの確率変数列は，それぞれ次の分布の domain of partial attraction に属していることを仮定する：

$$r_1^{-n/\alpha}\sum_{i=1}^{[r_1^n]} X_i \xrightarrow{d} Z_\alpha(1), \qquad r_2^{-nB}\sum_{j=1}^{[r_2^n]}\xi(j) \xrightarrow{d} Z_B(1). \tag{3}$$

ここで $\xrightarrow{d}$ は分布の意味の収束を表す．以後 $\alpha>1$ の場合を考える．

$$W_n=\sum_{k=1}^{n}\xi(S_k) \tag{4}$$

として，線形補間したものを $\{W(t),\ t\geq 0\}$ とする．

命題. (r_1,α)-semi-stable Lévy process $\{Z_\alpha(t)\}$ は (t,x) について連続な局所時間 $\{L(t,x)\}$ を持ち，

$$\{L(r_1 t, r_1^{1/\alpha}x)\} \stackrel{\mathrm{d}}{=} \{r_1^{1-1/\alpha}L(t,x)\}$$

という semi-selfsimilarity がある．

定理. $H=(1-\frac{1}{\alpha})I+\frac{1}{\alpha}B$ とする．ただし $\tau_B\leq 1\leq T_B$ のときは，$\xi(k)$ の分布は対称であることを仮定する．$\log r_1/(\alpha\log r_2)\in\mathbf{Q}$ であれば，$r_0=r_0(\alpha,r_1,r_2)$ が存在して，$\mathbf{C}([0,\infty);\mathbf{R}^d)$ 上で

$$\{r_0^{-nH}W(r_0^n t),\ t\geq 0\}$$

が operator (r_0,H)-semi-selfsimilar process, $\{\Delta(t),t\geq 0\}$ に弱収束する．ここで $\{\Delta(t)\}$ は $L(t,x)$ を用いて

$$\Delta(t)=\int_{-\infty}^{\infty}L(t,x)dZ_B(x) \tag{5}$$

で表される．

系. $r_1>1, r_2=1$ の場合は $r_0=r_1^n$ として極限をとると定理の $\{\Delta(t)\}$ を得る．

注意 1. 有理数の条件は，$\{D(t)\}$ が二つの semi-stable Lévy process $\{Z_\alpha(t)\}$ と $\{Z_B(x)\}$ から構成されることによる．また r_0 は $\log r_1/(\alpha\log r_2)$ から具体的に決まる．

注意 2. Kesten-Spitzer は $\{X_i\}$ と $\{\xi(k)\}$ がそれぞれ α-stable, β-stable 分布の domain of attraction に属しているとき，適切なスケーリングの下で $\{W(t)\}$ が $(1-1/\alpha+1/(\alpha\beta))$-selfsimilar process, $\{\Delta(t)\}$ に弱収束することを示した．この結果は Maejima によって $\{\xi(k)\}$ が operator B-stable の domain of attraction に属している場合に拡張され，極限過程として operator $((1-\frac{1}{\alpha})I+\frac{1}{\alpha}B)$-selfsimilar process が得られた．

また Arai は $\{\xi(k)\}$ が (r_2,β)-semi-stable の domain of partial attraction に属しているときを考察して，$(r_2,1-1/\alpha+1/(\alpha\beta))$-semi-selfsimilar process が極限過程に出てくることを示した．これは今回の結果の $r_1=1, r_2>1, B=1/\beta$ の場合に対応している．この semi-selfsimilar process と同じ (r,h) を持つ semi-selfsimilar process が系で得られるが，各時刻での周辺分布の持つ性質は異なるという意味で二つの確率過程は異なる性質を持っていると言える．

1次元拡散過程の正側滞在時間の分布の密度公式

立命館大学　渡辺 信三
京都大学数理解析研究所　矢野 孝次
お茶の水女子大学大学院人間文化研究科　矢野 裕子

P. Lévy の定理としてよく知られているように，1 次元 Brown 運動 (X_t) $(X_0=0)$ の正側滞在時間 $A^+(t)=\int_0^t 1_{[0,\infty)}(X_s)ds$ は逆正弦関数を用いて表される分布関数を持つ．従って，割合 $\frac{1}{t}A^+(t)$ の分布は区間 $(0,1)$ で滑らかな密度を持ち、それは区間の両端 $x=0,1$ においては発散している．最近，笠原勇二氏および矢野裕子氏 [1] は，1 次元一般化拡散過程に対する正側滞在時間割合の分布関数について，extreme values $x=0,1$ における漸近公式を得た．ここでは，密度関数の表現とその連続性および漸近性質，さらに局所極限定理への応用について論じたい．

$m\in\mathcal{M}$ を M. G. Krein の意味の string とする．すなわち，

$$\mathcal{M}=\{m:[0,\infty)\to[0,\infty],\ \text{右連続単調増加}\}$$

とする．$l=\sup\{x:m(x)<\infty\}$, $m(0-)=0$ とおくと，m は $[0,l)$ 上の Radon 測度 dm と同一視できる．$m\in\mathcal{M}$ に対し，$\frac{d}{dm}\frac{d}{dx}$ を generator にもつ原点反射壁一般化拡散過程 (X_t), $X_0=0$ が対応する．(X_t) の原点における局所時間およびその右連続逆過程をそれぞれ $l(t)$ および $\eta(t)$ で表す．以下では，$m\in\mathcal{M}$ に次の仮定をおく．

(A) $$m(0)=0 \qquad \text{and} \qquad \inf \mathrm{Supp}(dm)=0.$$

この仮定は，(X_t) が原点に holding time を持たずかつ $\eta(t)$ の分布が原点に mass を持たないことを保証する．

Theorem 1. 仮定 **(A)** の下で，ある $(0,\infty)\times(0,\infty)$ 上の連続関数 $p(t,x)$ および $q(t,x)$ が存在して

$$\begin{aligned} P(\eta(t)\in dx) =& p(t,x)dx \qquad \text{on } x\in(0,\infty) \quad \text{for } t>0,\\ P(l(x)\in dt) =& q(t,x)dt \qquad \text{on } t\in(0,\infty) \quad \text{for } x>0 \end{aligned}$$

が成り立つ．特に，$\eta(t)$ および $l(t)$ は連続な密度関数をもつ． □

2 つの string $m_+,m_-\in\mathcal{M}$, $m_-(0)=0$ に対し，$\frac{d}{dm}\frac{d}{dx}$ を generator にもつ一般化拡散過程 (X_t), $X_0=0$ が対応する．ただし，$(-\infty,\infty)$ 上の関数 m は $[0,\infty)$ 上では $m_+(x)$, $(-\infty,0)$ 上では $-m_-(-x+0)$ として定める．m_+ に対応する局所時間等の諸量を l_+ 等とあらわす (m_- も同様である).

Theorem 2. $m_+,m_-\in\mathcal{M}$ はいずれも仮定 **(A)** を満たすとする．$t>0$ に対し，正側滞在時間割合 $\frac{1}{t}A^+(t)$ の分布は密度関数

$$f_t^+(x)=t\left\{\int_0^\infty p_-(s,t(1-x))q_+(s,tx)ds+\int_0^\infty q_-(s,t(1-x))p_+(s,tx)ds\right\}$$

$(x\in(0,1))$ を持つ． □

$x=a$ の近くで定義された 2 つの関数 $A(x), B(x)$ に対し，$A(x) \asymp B(x)$ as $x \to a$ とは，ある定数 $C_1, C_2 > 0$ が存在して $x=a$ の近くで $C_1 B(x) \le A(x) \le C_2 B(x)$ が成り立つこととする．$m \in \mathcal{M}$ に対し次の仮定を導入する．

(M) $\exists \alpha \in (0,1)\ \exists K(x)$: slowly varying at $x=0$ s.t. $m(x) \asymp x^{\frac{1}{\alpha}-1} K(x)$ as $x \searrow 0$.

これは，m が原点の近くで Bessel 過程の string に近い振る舞いをするということを意味しているが，Cantor 測度や de Rham 測度などのフラクタル測度を含むかなり一般的な仮定である。

Theorem 3. $m_+, m_- \in \mathcal{M}$ は仮定 (M) を満たすとする．$t > 0$ に対し，密度関数 f_t^+ は $(0,1)$ 上で連続. $\square$

以下は複号同順として，$m_\pm$ およびその dual string $m_\pm^*$ に対応するスペクトル測度をそれぞれ $d\sigma_\pm, d\sigma_\pm^*$ とし，その Laplace 変換をそれぞれ $g_\pm, g_\pm^*$ とする．仮定 (A) の下で $g_\pm, g_\pm^*$ は $x=0$ において発散すること，さらに仮定 (M) の下ではその power order まで判ることに注意する．

Theorem 4. $m_+, m_- \in \mathcal{M}$ は仮定 (M) を満たすとする．$t > 0$ に対し，密度関数 f_t^+ の $x \to 0$ における漸近挙動は

$$f_t^+(x) \sim t g_-^*(t) g_+(tx)$$

で与えられる． $\square$

最後に，局所極限定理について述べよう．$\alpha \in (0,1), c > 0$ に対し，

$$m_{\alpha,c}(x) = c^{\frac{1}{\alpha}} x^{\frac{1}{\alpha}-1}$$

とする．$p \in (0,1)$ とすると，$(m_{\alpha,p}, m_{\alpha,1-p})$-diffusion は skew parameter p を持つ $2-2\alpha$ 次元の skew Bessel 過程と呼ばれる．このとき，対応する $\frac{1}{t}A^+(t)$ の分布は t によらない密度 $f_{\alpha,p}(x)$ をもつ．$m_+, m_- \in \mathcal{M}$ が

(L) $m_+(x) \sim m_{\alpha,p}(x)$ and $m_-(x) \sim m_{\alpha,1-p}(x)$ as $x \to \infty$

を満たすとき，$\frac{1}{t}A^+(t)$ は $t \to \infty$ で skew Bessel 過程のそれに分布収束する．

Theorem 5. (L) および次を仮定する: ある $x=0$ における緩変動関数 $\widetilde{K}(x)$ が存在して

$$m_+(x) \asymp x^{\frac{1}{\alpha}-1}\widetilde{K}(x) \quad \text{and} \quad m_-(x) \asymp x^{\frac{1}{\alpha}-1}\widetilde{K}(x) \quad \text{as } x \searrow 0.$$

このとき，任意の $x \in (0,1)$ に対し，

$$\lim_{t\to\infty} f_t^+(x) = f_{\alpha,p}(x).$$

$\square$

参考文献

[1] Y. Kasahara and Y. Yano. On a generalized arc-sine law for one-dimensional diffusion processes. *Osaka J. Math.*, to appear.

[2] S. Watanabe, K. Yano, and Y. Yano. A density formula for the law of time spent on the positive side of one-dimensional diffusion processes. preprint.

`http://www.kurims.kyoto-u.ac.jp/~yano/works.html` から，プレプリント [2] および本講演の OHP シートをダウンロードできます．

Integration by parts formulae for the Wiener measure restricted to subsets in $\mathbb{R}^d$

Yuu Hariya
Research Institute for Mathematical Sciences,
Kyoto University

In [2], Zambotti explored an integration by parts formula for the pinned Wiener measure over the time interval $[0,1]$ restricted to the path space $D = C([0,1];\Omega)$, where $\Omega = (0,\infty) \subset \mathbb{R}$; similarly to the divergence theorem in finite dimension, there appears a certain boundary term in the formula, which is explicitly expressed in terms of pinned 3-dimensional Bessel processes.

In this talk, we shall discuss an extension of his result to the case of more general Ω's: Let $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ be an open, bounded region with a smooth boundary. For $a, b \in \Omega$, let B and $\widehat{B}$ be independent d-dimensional Brownian motions starting respectively at a and b. Let $\tau_\Omega(B)$ (resp. $\tau_\Omega(\widehat{B})$) be the first exit time from Ω of B (resp. of $\widehat{B}$). Given $\tau_\Omega(B) + \tau_\Omega(\widehat{B}) = 1$, $B_{\tau_\Omega(B)} = x$, and $\widehat{B}_{\tau_\Omega(\widehat{B})} = x$, define the process $Y = (Y_t)_{0 \le t \le 1}$ by

$$Y_t = \begin{cases} B_t, & 0 \le t \le \tau_\Omega(B), \\ \widehat{B}_{\tau_\Omega(B)+\tau_\Omega(\widehat{B})-t}, & \tau_\Omega(B) \le t \le \tau_\Omega(B) + \tau_\Omega(\widehat{B}). \end{cases}$$

Let $\mathbb{P}^{a,x,b}_{[0,1]}$ denote the law of Y and $\mathbb{E}^{a,x,b}_{[0,1]}$ the expectation with respect to $\mathbb{P}^{a,x,b}_{[0,1]}$. For an element w in the support of $\mathbb{P}^{a,x,b}_{[0,1]}$, let $S_x(w) \in (0,1)$ be the time at which $w(S_x(w)) = x$. Let H_Ω be the minus one half of the Dirichlet Laplacian for Ω, and $e^{-tH_\Omega}(y,z)$ the integral kernel of the semigroup e^{-tH_Ω} generated by H_Ω; i.e., for $t > 0$ and $y, z \in \Omega$,

$$e^{-tH_\Omega}(y,z) = p(t;y,z)\mathcal{W}^{y,z}_{[0,t]}\left(w \in C([0,t];\mathbb{R}^d); w(s) \in \Omega, 0 \le s \le t\right).$$

Here $p(t;y,z)$ is the Gaussian kernel and $\mathcal{W}^{y,z}_{[0,t]}$ denotes the law of pinned Brownian motion over $[0,t]$ with boundary conditions y, z at each end. Following [1, Theorem A.3.2], we assume:

(A1) for each fixed $t > 0$ and $y \in \Omega$, the integral kernel $e^{-tH_\Omega}(y,\cdot)$ has an extension to $\overline{\Omega}$ which is C^1 up to the boundary;

(A2) the restrictions to $\partial\Omega$ of functions which are harmonic on Ω, and C^1 up to boundary, is dense in the set of continuous functions on $\partial\Omega$.

Under these condtions, they proved an explicit formula for the joint distribution of $B_{\tau_\Omega(B)}$ and $\tau_\Omega(B)$:

$$P_a(B_{\tau_\Omega(B)} \in dx, \tau_\Omega(B) \in dt) = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial n_x} e^{-tH_\Omega}(a,x)\,\sigma(dx)\,dt, \tag{1}$$

where n_x is the inward normal vector at $x \in \partial\Omega$, $\partial/\partial n_x$ denotes the normal derivative, and σ is the surface measure on $\partial\Omega$,

Using (1), we prove the following formula for a smooth functional F of a certain class:

Theorem 1. *Assume* (A1) *and* (A2). *Then, for* $h = (h_i)_{1\le k\le d}, h_k \in C_0^2((0,1))$, *it holds that*

$$\int_D \partial_h F(w)\, d\mathcal{W}^{a,b}_{[0,1]}(w) = -\int_D F(w) \sum_{i=1}^d \int_0^1 h_i''(s) w_i(s)\, ds\, d\mathcal{W}^{a,b}_{[0,1]}(w) + (\text{boundary term}),$$

where the boundary term is given by

$$-\frac{1}{2p(1;a,b)} \int_{\partial\Omega} \sigma(dx)\, \mathbb{E}^{a,x,b}_{[0,1]}[n_x \cdot h(S_x) F]$$
$$\times \int_0^1 du \frac{\partial}{\partial n_x} e^{-uH_\Omega}(a,x) \frac{\partial}{\partial n_x} e^{-(1-u)H_\Omega}(b,x).$$

The key to proving Theorem 1 is the following lemma:

Lemma 2. *Let* f, g *be functions of class* $C^2(\Omega)$ *which satisfy* $f|_{\partial\Omega} = g|_{\partial\Omega} = 0$ *and are* C^1 *up to the boundary. Then we have, for all* $v \in \mathbb{R}^d$,

$$\int_\Omega dx\, (v\cdot\nabla f)\Delta g + \int_\Omega dx\, (v\cdot\nabla g)\Delta f + \int_{\partial\Omega} \sigma(dx)\,(v\cdot n_x) \frac{\partial f}{\partial n_x}\frac{\partial g}{\partial n_x} = 0.$$

References

[1] Aizenman, M., Simon, B.: Brownian motion and Harnack inequality for Schrödinger operators. Comm. Pure and Appl. Math. **35**, 209-273 (1982)

[2] Zambotti, L.: Integration by parts formulae on convex sets of paths and applications to SPDEs with reflection. Probab. Theory Relat. Fields **123**, 579-600 (2002)

Entrance law, exit system and trace Lévy system

Masatoshi Fukushima (Kansai University)

We consider two Hunt processes $X = (X_t, \zeta, \mathbf{P}_x)$ and $\widehat{X} = (\widehat{X}_t, \widehat{\zeta}, \widehat{\mathbf{P}}_x)$ on E which are in the *weak duality* with respect to a σ-finite mesure m on a state space E:

$$\int_E \widehat{p}_t f \cdot g dm = \int_E f \cdot p_t g dm, \qquad f, g \in \mathcal{B}^+(E), \tag{1}$$

where p_t (resp. $\widehat{p}_t$) is the transition function of X (resp. $\widehat{X}$). We assume for X that every semi polar set is m-polar. Let F be a nearly Borel subset of E satisfying $F^r = F$, where F^r denotes the set of all regular points of F. We put $E_0 = E \setminus F$ and $m_0 = m|_{E_0}$. We further assume that the subprocess $X^0 = (X_t^0, \zeta^0, \mathbf{P}_x)_{x \in E^0}$ of X killed upon the hitting time σ_F of F is transient. The transition function of X^0 is denoted by p_t^0.

We let, for $f \in \mathcal{B}^+(E)$, $x \in E$,

$$\mathbf{H}f(x) = \mathbf{E}_x\left(f(X_{\sigma_F}); \sigma_F < \infty\right), \quad \mathbf{H}_\alpha f(x) = \mathbf{E}_x\left(e^{-\alpha\sigma_F}(X_{\sigma_F})\right).$$

The corresponding notions to $\widehat{X}$ are denoted by $\widehat{\mathbf{H}}$ and $\widehat{\mathbf{H}}_\alpha$. The measure $\widehat{\mathbf{H}}f \cdot m_0$ is X^0-excessive for any $f \in \mathcal{B}_b^+(E)$. We can therefore define a bimeasure on $E \times E$ by

$$U(f \otimes g) = L(\widehat{\mathbf{H}}f \cdot m_0, \mathbf{H}g) \qquad f, g \in \mathcal{B}_b^+(E), \tag{2}$$

which we call the *Feller measure*([3]). Here $L(\eta, u)$ denotes the energy functional of an X^0-excessive measure η and an X^0-excessive functional. We also define the *supplementary Feller measure* V by

$$V(f) = L(\widehat{\mathbf{H}}f \cdot m_0, q), \qquad q(x) = 1 - \mathbf{H}1(x) = \mathbf{P}_x(\sigma_F = \infty). \tag{3}$$

We call a family of σ-finite measures $\{\nu_t,\ T > 0\}$ on E_0 an X^0-*entrance law* if $\nu_t p_s^0 = \nu_{t+s},\ t, s > 0$.

By a theorem due to Fitzsimmons([6]), there exists, for any $f \in \mathcal{B}_b^+(E)$, a unique X^0-entrance law μ_t^f such that

$$\widehat{\mathbf{H}}f \cdot m_0 = \int_0^\infty \mu_t^f\, dt. \tag{4}$$

Put $M(\omega) = \{t \geq 0 : X_t(\omega) \text{ or } X_{t-} \in F\} \subset [0, \infty)$. Then $M(\omega)$ is closed P_x-a.s. for q.e. x. Its complement $M(\omega)^c$ consists of countable number of disjoint open intervals called the *excursions*. Let I be the set of all left end points of excursions.

Let $(\mathbf{P}_x^*, K + J)$ be an *exit system* in the sense of Maisonneuve[7]: K is a PCAF of X carried on F, $dJ_t = \sum_{s \in I: X_s \in E \setminus F} \varepsilon_s(dt)$, and $\mathbf{P}^*$ is a kernel from E to Ω such that

$$\mathbf{E}_x\left[\sum_{s \in I} Z_s \cdot \Lambda \circ \theta_s\right] = \mathbf{E}_x\left[\int_0^\infty Z_s \cdot \mathbf{P}_{X_s}^*(\Lambda) d(K_s + J_s)\right], \quad x \in E, \tag{5}$$

for any positive predictable process Z_s and positive r.v. Λ. For $x \in E_0$, $\mathbf{P}_x^*$ is defined to be equal to $\mathbf{P}_x$.

Denote by $Q_t^*(x, \cdot)$, $x \in F$, the *entrance law with respect to* $\mathbf{P}_x^*$ defined by

$$Q_t^* g(x) = \mathbf{E}_x^*\left(g(X_t); t < \sigma_F\right), \quad T > 0,\ x \in E,\ g \in \mathcal{B}^+(E). \tag{6}$$

The next theorem may be thought as an extension of a part of [5] where F is a one point set.

Theorem 1 (i) *For any Borel subset $B \subset E_0$ and $f \in \mathcal{B}_b(F)$,*

$$\mu_t^f(B) = \int_F f(x)Q_t^*(x,B)\mu_K(dx) + \int_{F\times(E\setminus F)} f(x)P_t^0 1_B(y)N(x,dy)\mu_H(dy), \tag{7}$$

where (N,H) is the Lévy system for X while μ_K and μ_H denote the Revuz measures of PCAF*'s K and H respectively.*

(ii)

$$U(dx,dy) = \mu_K(dx)\mathbf{P}_x^*(X_{\sigma_F} \in dy) + \mu_H(dx)\big|_F \int_{E\setminus F} N(x,dz)\mathbf{P}_z(X_{\sigma_F} \in dy). \tag{8}$$

$$V(dx) = \mu_K(dx)\mathbf{P}_x^*(\sigma_F = \infty) + \mu_H(dx)\big|_F \int_{E\setminus F} N(x,dz)\mathbf{P}_z(\sigma_F = \infty). \tag{9}$$

(iii) *For any $\Psi \in \mathcal{B}^+(E \times E)$,*

$$\int_{F\times F} \Psi(x,y)U(dx,dy) = \lim_{t\downarrow 0}\frac{1}{t}\mathbf{E}_m\left[\sum_{s\in I, s\le t}\Psi(X_{s-}, X_{\sigma_F}\circ\theta_s)\right]. \tag{10}$$

We assume that every semi-polar set is m-polar for X and F is q.e. finely closed set such that $\mathbf{P}_x(\sigma_F < \infty) > 0$ for m-a.e. $x \in E_0$. Then the situation is reduced to the above setting by allowing exceptional sets. Let A_t be a PCAF whose support coincides with F q.e. and $Y = (Y_t, P_x)$ be the time changed process of X by the inverse of A_t. The Revuz measure of A_t is denoted by μ.
We aim at deriving the following formula from Theorem 1 (iii):

$$\lim_{t\downarrow 0}\frac{1}{t}\mathbf{E}_\mu(\Psi(Y_{t-},Y_t)) = \int_{F\times F}\Psi(x,y)U(dx,dy) + \int_{F\times F}\Psi(x,y)\mu_H(dx)N(x,dy). \tag{11}$$

This has been done in [4] when X is a conservative symmetric diffusion and F is a closed set. The above formula has been shown for a general symmetric right process X and a quasi-closed set F in [1] by using the Dirichlet form theory. In this case, the Lévy system for Y is well defined and the left hand side is expressed in terms of it.

References

[1] Z.-Q. Chen, M. Fukushima and J. Ying, Traces of symmetric Markov processes and their characterizations. Preprint, 2004.

[2] J.L. Doob, Boundary properties of functions with finite Dirichlet integrals, *Ann. Inst. Fourier* **12**(1962), 573-621

[3] W. Feller, On boundaries and lateral conditions for the Kolmogorov differential equations, *Ann. Math.* **65**(1957), 527-570

[4] M. Fukushima, P. He and J. Ying, Time changes of symmetric diffusions and Feller measures, to appear *Annales Probab.*

[5] M. Fukushima and H. Tanaka, Poisson point processes attached to symmetric diffusions, to appear *Annales de'l I.H.P.-Probabilité & Statistiques*

[6] R.K. Getoor, Excessive measures, Birkhäuser, 1990

[7] B. Maisonneuve, Exit systems. *Ann. Probab.* **3** (1975), 399-411.

ASYMPTOTIC ESTIMATES OF MULTI-DIMENSIONAL STABLE DENSITIES AND THEIR APPLICATIONS

TOSHIRO WATANABE (THE UNIVERSITY OF AIZU)

A Lévy process $\{X_t\}$ on $\mathbb{R}^d$, $d \geqslant 1$, is called *stable* if, for every $a > 0$, there are $b > 0$ and $c \in \mathbb{R}^d$ such that

$$\{X_{at}\colon t \geqslant 0\} \stackrel{\mathrm{d}}{=} \{bX_t + tc\colon t \geqslant 0\}. \tag{1}$$

If $\{X_t\}$ is a nontrivial stable process, then define $\alpha = \log a/\log b$ for $a \neq 1$; the index α is uniquely determined and $0 < \alpha \leq 2$. If $c = 0$ in (1) for every $a > 0$, we call a nontrivial process $\{X_t\}$ a *first-class* stable process. Otherwise we call $\{X_t\}$ a *second-class* stable process.

Let $\{X_t\}$ be a nontrivial α-stable process on $\mathbb{R}^d$ with $\alpha \neq 2$. Then there is a probability measure σ on $S^{d-1} = \{\xi \in \mathbb{R}^d\colon |\xi| = 1\}$ such that

$$\nu(B) = c_\nu \int_{S^{d-1}} \sigma(d\xi) \int_0^\infty 1_B(r\xi) r^{-1-\alpha} dr \qquad \text{for } B \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}^d}, \tag{2}$$

where c_ν is a positive constant independent of ξ and r and $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^d}$ is the class of all Borel sets in $\mathbb{R}^d$.

A positive and decreasing function ϕ is called of *dominated variation* ($\phi \in \mathcal{D}$) if there is a constant $c_1 > 0$ such that $\phi(r) \leq c_1\phi(2r)$ for $r > 0$. Denote by B_a an open ball in $\mathbb{R}^d$ with center 0 and radius a. For the spectral measure σ of an α-stable process $\{X_t\}$ on $\mathbb{R}^d$ with $\alpha \neq 2$, define functions $\sigma_\xi(r)$ and $\sigma^*(r)$ for $r > 0$ as

$$\sigma_\xi(r) = \sigma(\xi + B_{1/r}) \qquad \text{and} \qquad \sigma^*(r) = \sup_{\xi \in S^{d-1}} \sigma(\xi + B_{1/r}). \tag{3}$$

Obviously$\sigma^*(\cdot) \in \mathcal{D}$. Let S_σ be the support of σ. We define

$$\begin{aligned} C_\sigma^0(n) = \{\xi \in S^{d-1}\colon \xi = \textstyle\sum_{j=1}^n c_j\xi_j \text{ for some } c_j > 0 \text{ and } \xi_j \in S_\sigma, \\ j = 1, \dots, n, \text{ such that } \xi_1, \dots, \xi_n \text{ are linearly independent}\} \end{aligned} \tag{4}$$

for $1 \leqslant n \leqslant d$, $T_\sigma(1) = C_\sigma^0(1) = S_\sigma$, and

$$T_\sigma(n) = C_\sigma^0(n) \setminus \overline{C_\sigma^0(n-1)} \tag{5}$$

for $2 \leqslant n \leqslant d$, where $\overline{C_\sigma^0(n-1)}$ is the closure of $C_\sigma^0(n-1)$. We write $C_\sigma^0(d) = C_\sigma^0$ and $C_\sigma = \overline{C_\sigma^0}$. Let int C_σ be the interior of the set C_σ in the relative topology on S^{d-1}. The set C_σ^0 is nonempty if $\{X_t\}$ is nondegenerate. We assume that $\{X_t\}$ is a nondegenerate α-stable process on $\mathbb{R}^d$ with $0 < \alpha < 2$ and $d \geqslant 1$. Thus X_t has the probability density function $p(t,x)$ for $t > 0$. We write $p(1,x) = p(x)$. We denote by m the uniform probability measure on S^{d-1}.

Theorem 1. (i) *There is a constant* $c_1 > 0$ *such that*

$$p(x) \leqslant c_1(1+|x|)^{-(1+\alpha)}\sigma^*(1+|x|) \qquad \textit{for } x \in \mathbb{R}^d. \tag{6}$$

In particular, we have

$$p(x) \leqslant c_1(1+|x|)^{-(1+\alpha)} \qquad \textit{for } x \in \mathbb{R}^d. \tag{7}$$

(ii) *Let $\xi^0 \in S^{d-1}$. In the case where $0<\alpha<1$ and ν is one-sided, we make an additional assumption that $\xi^0 \in \operatorname{int} C_\sigma$. (Otherwise we make no additional assumption.) Then for any $\delta_1 > 0$, there are $c_2 > 0$ and $R_1 > 0$ such that both are independent of ξ^0 and*

$$p(r\xi^0 + y) \geqslant c_2(1+r)^{-(1+\alpha)}\sigma_{\xi^0}(1+r) \qquad \textit{whenever } r \geqslant R_1,\ |y| \leqslant \delta_1. \tag{8}$$

(iii) *For any compact set K_1 in C_σ^0 and for any $\delta_2 > 0$, there are $c_3 > 0$ and $R_2 > 0$ such that*

$$p(x+y) \geqslant c_3(1+|x|)^{-(1+\alpha)d} \qquad \textit{whenever } x/|x| \in K_1,\ |x| \geqslant R_2,\ |y| \leqslant \delta_2. \tag{9}$$

(iv) *For any compact set $K_2 \subset S^{d-1}$ with $K_2 \cap C_\sigma = \emptyset$, for any $\delta_3 > 0$, and for any $c_0 > 0$, there is $c_4 > 0$ such that*

$$p(x+y) \leqslant c_4 \exp(-c_0|x|\log|x|) \qquad \textit{whenever } x \neq 0,\ x/|x| \in K_2,\ |y| \leqslant \delta_3. \tag{10}$$

Theorem 2. *Let $\phi \in \mathcal{D}$ and let K be a compact set in S_σ. Suppose that*

$$\limsup_{r\to\infty} \sup_{\xi \in S^{d-1}} \frac{\sigma(\xi + B_{1/r})}{\phi(r)} < \infty \textit{ and } \liminf_{r\to\infty} \inf_{\xi\in K} \frac{\sigma(\xi + B_{1/r})}{\phi(r)} > 0. \tag{11}$$

In the case where $0<\alpha<1$ and ν is one-sided, we make an additional assumption that $K \subset \operatorname{int} C_\sigma$. Then given $\delta > 0$, we can find $c_1 > 0$ and $c_2 > 0$, and $R > 0$ such that

$$c_1(1+|x|)^{-(1+\alpha)}\phi(1+|x|) \leqslant p(x+y) \leqslant c_2(1+|x|)^{-(1+\alpha)}\phi(1+|x|) \tag{12}$$

whenever $x/|x| \in K$, $|x| \geqslant R$, $|y| \leqslant \delta$.

Remark 3. Let $d \geq 2$ and let E be a self-similar set in $\mathbb{R}^{d-1}$ satisfying open set condition with Hausdorff dimension $s > 0$. Then there are $c_1 > 0$ and $c_2 > 0$ independent of $x \in E$ such that

$$c_1 a^s \leq H_s(E \cap B_a(x)) \leq c_2 a^s \qquad \text{for } x \in E, \tag{13}$$

where $H_s(dx)$ is s-dimensional Hausdorff measure on $\mathbb{R}^{d-1}$ and $B_a(x)$ is an open ball with center x and radius a in $\mathbb{R}^{d-1}$. Let $f(x)$ be a bi-Lipschitz map from an open ball in $\mathbb{R}^{d-1}$ including the set E to a relatively open set in S^{d-1} and define $\widehat{E} = f(E)$. Let $\widehat{H}_s(d\xi)$ be s-dimensional Hausdorff measure on S^{d-1}. Assume the spectral measure σ on S^{d-1} of $\{X_t\}$ is expressed as

$$\sigma(d\xi) = \frac{\widehat{H}_s(\widehat{E} \cap d\xi)}{\widehat{H}_s(\widehat{E})}. \tag{14}$$

Thus the spectral measure σ satisfies the assumption (11) of the above theorem with $\phi(r) = r^{-s}$ for any $K \subset S_\sigma = \widehat{E}$. In the case where $0<\alpha<1$ and ν is one-sided, we make an additional assumption that $K \subset \operatorname{int} C_\sigma$. Then, in particular the dimension s can be arbitrarily chosen in $(0, d-1)$ by arranging the contraction ratio of E. Thus, fixing α in the above theorem, it follows that, for any $\delta > 0$, there are $c_3 > 0$, $c_4 > 0$ and $R > 0$ such that

(15) $c_3(1+|x|)^{-\beta} \le p(x+y) \le c_4(1+|x|)^{-\beta}$ whenever $x/|x| \in K$, $|x| \geqslant R$, $|y| \leqslant \delta$,

where $\beta = 1 + s + \alpha$ can be arbitrarily chosen in $(1+\alpha, d+\alpha)$.

Theorem 4. *Consider* $\xi^0 \in T_\sigma(n)$ *with* $1 \le n \le d$. *Let* ϕ_1, $\phi_2 \in \mathcal{D}$.

(i) *Suppose that*

$$\limsup_{r\to\infty} \sup_{\xi \in S^{d-1}} \frac{\sigma(\xi + B_{1/r})}{\phi_1(r)} < \infty. \tag{16}$$

Then, given $\delta_1 > 0$, *we can find* $c_1 > 0$ *such that*

$$p(r\xi^0 + y) \leqslant c_1(1+r)^{-(1+\alpha n)}\phi_1(1+r) \qquad \text{whenever } r > 0,\ |y| \leqslant \delta_1. \tag{17}$$

(ii) *Suppose that*

$$\liminf_{r\to\infty} \frac{\sigma(\xi + B_{1/r})}{\phi_2(r)} > 0 \qquad \text{for any } \xi \in S_\sigma. \tag{18}$$

In the case where $0 < \alpha < 1$ *and* ν *is one-sided, we make an additional assumption that* $\xi^0 \in \operatorname{int} C_\sigma$. *Then, given* $\delta_2 > 0$, *we can find* $c_2 > 0$, *and* $R > 0$ *such that*

$$c_2\left((1+r)^{-(1+\alpha)}\phi_2(1+r)\right)^n \leqslant p(r\xi^0 + y) \qquad \text{whenever } r \geqslant R,\ |y| \leqslant \delta_2. \tag{19}$$

Theorem 5. (i) *If, for some* $c_1 > 0$,

$$\sigma(d\xi) \leqslant c_1 m(d\xi) \qquad \text{on } S^{d-1}, \tag{20}$$

then, for some $c_2 > 0$

$$p(x) \leqslant c_2(1+|x|)^{-(d+\alpha)} \qquad \text{for } x \in \mathbb{R}^d. \tag{21}$$

The converse is also true except in the case where $0 < \alpha < 1$ *and* ν *is one-sided.*

(ii) *Suppose that there is a nonempty compact set* K *in* S^{d-1} *such that*

$$\liminf_{r\to\infty} \inf_{\xi \in K} \frac{\sigma(\xi + B_{1/r})}{r^{-(d-1)}} > 0. \tag{22}$$

In the case where $0 < \alpha < 1$ *and* ν *is one-sided, we impose an additional condition that* $K \subset \operatorname{int} C_\sigma$. *Then, for any* $\delta > 0$, *there are* $c_3 > 0$ *and* $R > 0$ *such that*

$$p(x+y) \geqslant c_3(1+|x|)^{-(d+\alpha)} \qquad \text{whenever } x/|x| \in K,\ |x| \geqslant R,\ |y| \leqslant \delta. \tag{23}$$

Remark 6. The condition (22) is satisfied if there are a nonempty relatively open set U in S^{d-1}, a compact set K in $\overline{U}$ and $c_1 > 0$ such that

$$\sigma(d\xi) \geqslant c_1 m(d\xi) \quad \text{on } U \quad \text{and} \quad \liminf_{a\to 0+} \inf_{\xi\in K} \frac{m((\xi + B_a)\cap U)}{a^{d-1}} > 0. \tag{24}$$

We give the applications of the above results to the moments of the last exit time from a ball and the Spitzer type limit theorems involving capacities for transient stable processes.

Laplace approximation for stochastic line integrals in long time *

栗田 和正† (京都大学大学院情報学研究科)

M を閉 Riemann 多様体とし，$(\{z_t\}_{t\geq 0}, \{\mathbb{P}_x\}_{x\in M})$ を生成作用素 $\mathscr{L} = \Delta/2 + b$ を持つ M 上の拡散過程とする．但し，Δ は Laplace-Beltrami 作用素，b は滑らかなベクトル場とする．滑らかな 1 次微分形式の空間上に，L^2-Sobolev ノルムの族 $\{\|\cdot\|_p\}_{p\in\mathbb{R}}$ を Hodge-小平 Laplacian の冪を用いて定義する．以下，$\mathscr{D}_p$ で，滑らかな微分形式の成す空間の $\|\cdot\|_p$ による完備化を表わすものとする．

滑らかな 1 次微分形式 α に対し，拡散過程 $\{z_s\}_{s\in[0,t]}$ の経路に沿った確率線積分 $\int_{z[0,t]}\alpha$ が定まる．$\int_{z[0,t]}\alpha$ のマルチンゲール部分を $Y_t(\alpha)$ と書く．$p>0$ が充分大きければ，ランダムな写像 $Y_t : \alpha \mapsto Y_t(\alpha)$ は $\mathscr{D}_{-p}$ に値を取る確率変数とみなせる．

本講演では $\mathscr{D}_{-p}$-値確率変数 $\bar{Y}_t := t^{-1}Y_t$ の $t\to\infty$ での Laplace 近似の問題を扱う．

定義 1 速度関数 $I : \mathscr{D}_{-p} \to [0,\infty]$ を次で定義する．

$$I(\omega) = \begin{cases} \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_M |\hat{\omega}|^2 d\mu^\omega & \omega \in \mathscr{H} \text{ のとき，} \\ \infty & \text{そうでないとき．} \end{cases}$$

ここで，$\mathscr{H}$ を，次の 3 つの条件を満たす $\omega \in \mathscr{D}_{-p}$ 全体として定義する:

(i) M 上の確率測度 μ^ω が存在して，各 $u \in C^1(M)$ に対し，次を満たす

$$\langle \omega, du\rangle + \int_M \mathscr{L}u\, d\mu^\omega = 0.$$

(ii) $\hat{\omega} \in L_1^2(d\mu^\omega)$ が存在して，各 $\alpha \in \mathscr{D}_p$ に対して，$\langle \omega, \alpha\rangle = \displaystyle\int_M (\hat{\omega}, \alpha)\, d\mu^\omega$ が成り立つ．

(iii) μ^ω は Riemann 測度 v について絶対連続かつ $\sqrt{d\mu^w/dv} \in H_1$．但し、H_1 は 1 階の L^2-Sobolev 空間とする．

$\bar{Y}_t$ は $t\to\infty$ で速度関数 I について大偏差原理を満たす [2]．よって，Varadhan の補題により，適切な可積分性の条件を満たす連続関数 $F : \mathscr{D}_{-p} \to \mathbb{R}$ について

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t}\log \mathbb{E}_x\left[\exp\{tF(\bar{Y}_t)\}\right] = \sup_{w\in\mathscr{D}_{-p}} \{F(w) - I(w)\} =: \kappa_F$$

をみたす．以下，F を 3 回 Fréchet 微分可能とする．

定理を述べるために，いくつか記号を用意しよう．

---

*研究集会「確率過程とその周辺」(2004 年 12 月 7 日-12 月 10 日，於名古屋) 講演予稿

†Partially supported by JSPS fellowship for young scientists. e-mail: kkuwada@acs.i.kyoto-u.ac.jp

(I) $\mathscr{K}_F := \{w \in \mathscr{D}_{-p}\ ;\ F(w) - I(w) = \kappa_F\}$ とおく．$\mathscr{K}_F$ は空でないコンパクト集合になる．$\nabla^k F(w)$ を w での k 階 Fréchet 微分とする ($k=1$ のときは k を省略する)．$w \in \mathscr{D}_{-p}$ に対し，$\alpha_w := \nabla F(w) \in \mathscr{D}_p$ とおく．

(II) $L^2(dv)$ 上の微分作用素 $u \mapsto \mathscr{L}u + (\alpha, du) + |\alpha|^2 u/2$ の主固有値に対応する固有関数を h^α と書く．h^α は M 上の正値 C^1-級関数になる．h^α を用いて，別の微分作用素 $\mathscr{L}^\alpha\ :\ u \mapsto \mathscr{L}u + (\alpha - dh^\alpha/h^\alpha, du)$ が定まる．$\mathscr{L}^\alpha$ の正規化された不変測度を m_α と書く．$w \in \mathscr{K}_F$ のとき，$m_{\alpha_w} = \mu^w$ が成り立つ．

(III) 微分方程式

$$\mathscr{L}u + \left(\alpha - \frac{dh^\alpha}{h^\alpha}, du\right) = \left(\alpha - \frac{dh^\alpha}{h^\alpha}, \beta\right) - \int_M \left(\alpha - \frac{dh^\alpha}{h^\alpha}, \beta\right) dm_\alpha$$

の解 $u^{\alpha,\beta}$ を用いて，$\Gamma_\alpha \beta := du^{\alpha,\beta}$ と定める．Γ_α は $\mathscr{D}_p$ 上の有界線型作用素になる．有界線型対称作用素 $G_w^F\ :\ \mathscr{D}_{-p} \to \mathscr{D}_{-p}$ を以下で定める:

$$(\eta, G_w^F \eta)_{-p} = \nabla^2 F(w)((1 - \Gamma_{\alpha_w}^*)\eta, (1 - \Gamma_{\alpha_w}^*)\eta).$$

(IV) $\beta^* \in \mathscr{D}_{-p}$ を $\beta \in \mathscr{D}_p$ の共役元とする．$w \in \mathscr{H}$ に対し，跡族正値対称作用素 $S_w\ :\ \mathscr{D}_{-p} \to \mathscr{D}_{-p}$ を以下で定める:

$$\langle S_w(\beta^*), \gamma \rangle = \int_M (\beta, \gamma) d\mu^w.$$

仮定 1 各 $w \in \mathscr{K}_F$ に対し定数 $\delta_w > 0$ が存在し，任意の $\eta \in \mathscr{D}_{-p}$ に対して

$$\inf\left\{ \|\eta'\|_{-p}\ ;\ \eta = \sqrt{S_w}\eta' \right\} \geq (\eta, G_w^F \eta)_{-p} + \delta_w \|\eta\|_{-p}^2$$

が成り立つ．

定理 1 [1] 仮定 1 のもとで $\mathscr{K}_F$ は有限集合であり，

$$\lim_{t\to\infty} \mathrm{e}^{-t\kappa_F} \mathbb{E}_x \left[\exp\left\{ tF(\bar{Y}_t) \right\} \right] = \sum_{w \in \mathscr{K}_F} \frac{1}{\det\left(1 - G_w^F \circ S_w\right)^{1/2}} h^{\alpha_w}(x) \int_M \frac{1}{h^{\alpha_w}} d\mu^w$$

が成り立つ．

参考文献

[1] K. Kuwada. Laplace approximation for stochastic line integrals. preprint.

[2] K. Kuwada. On large deviations for random currents induced from stochastic line integrals. preprint.

1 次元マルコフ過程の粘性的反射壁ブラウン運動への収束

伏屋　広隆（東京大学大学院数理科学研究科）

$fushiya@mail4.alpha-net.ne.jp$

$\mu_W^\lambda, \lambda \in (0,1]$ は $\mathbf{R}$ 上の確率分布、$\mu_{Z+}^\lambda, \lambda \in (0,1]$ は $(0,\infty)$ 上の確率分布、$p^\lambda \in (0,1]$, $\lambda \in (0,1]$ は数列とする。これらに対して以下の仮定 (A.1)〜(A.2) が成立するものとする。

$(A.1)$ $\displaystyle\int_{\mathbf{R}} x\mu_W^\lambda(dx) = 0$

正の定数 K, K' が存在して、

$$\sup_{\lambda\in(0,1]}\int_{\mathbf{R}} e^{K|x|}\mu_W^\lambda(dx) < \infty,\ \int_{\mathbf{R}} x^4\mu_W^\lambda(dx) + \int_{(0,\infty)} x^4\mu_{Z+}^\lambda(dx) \le K'\lambda^4.$$

$(A.2)$ 正の定数 σ, m_{Z+}, p が存在して、

$$\lim_{\lambda\to 0}\lambda^{-2}\int_{\mathbf{R}} x^2\mu_W^\lambda(dx) = \sigma^2,\ \lim_{\lambda\to 0}\lambda^{-1}\int_{(0,\infty)} x\mu_{Z+}^\lambda(dx) = m_{Z+},\ \lim_{\lambda\to 0}\lambda^{-1}p^\lambda = p.$$

$\{W_n^\lambda\}_{n=0}^\infty, \{Z_n^\lambda\}_{n=0}^\infty$ は次の性質を満たす $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ 上の確率過程とする。

1 $W_n^\lambda, Z_n^\lambda, n = 1, 2, \cdots,$ は独立。

2 $\{W_n^\lambda\}_{n=0}^\infty$ は同じ分布をもち、分布は μ_W^λ で与えられる。

3 $\{Z_n^\lambda\}_{n=0}^\infty$ は同じ分布をもち $Z_n^\lambda \ge 0$ $a.s.$, $\mathbf{P}(Z_n^\lambda \in dx | Z_n^\lambda > 0) = \mu_{Z+}^\lambda(dx)$,
$\mathbf{P}(Z_n^\lambda = 0) = 1 - p^\lambda$.

$\mathcal{F}_n = \sigma(W_m^\lambda, Z_m^\lambda; 0 \le m \le n)$ とおき、確率過程 $\{X_n^\lambda(x)\}_{n=0}^\infty$, $x \in [0,\infty), \lambda \in (0,1]$, を帰納的に

$$X_0^\lambda(x) = x$$

$$X_{n+1}^\lambda(x) = \begin{cases} (X_n^\lambda(x) + W_{n+1}^\lambda) \vee 0, & X_n^\lambda(x) > 0 \\ Z_{n+1}^\lambda, & X_n^\lambda(x) = 0 \end{cases}$$

で定義する。この時 $\{X_n^\lambda(x)\}_{n=0}^\infty$ はマルコフ過程となる。

また、

$$S_n^\lambda(x) = x + \sum_{k=1}^{n} W_k^\lambda, \quad \lambda \in (0,1],$$

$$\tau^\lambda(x) = \inf\{n \geq 0; X_n^\lambda(x) = 0\} = \inf\{n \geq 0; S_n^\lambda(x) \leq 0\},$$

$$c(\lambda,\eta) = \mathbf{E}\left[e^{-\frac{\sqrt{2\eta}}{\sigma}W_1^\lambda}\right],$$

を定義し、(A.3)〜(A.4) を仮定する。

$$\text{(A.3)} \quad \overline{\lim}_{\eta\to 0}\ \overline{\lim}_{\lambda\to 0} \int_0^\infty \mathbf{E}\left[c(\lambda,\eta)^{-\tau^\lambda(x)}\left(-\lambda^{-1}S_{\tau^\lambda(x)}^\lambda(x)\right)\right]\mu_{Z+}^\lambda(dx)$$
$$= \underline{\lim}_{\eta\to 0}\ \underline{\lim}_{\lambda\to 0} \int_0^\infty \mathbf{E}\left[c(\lambda,\eta)^{-\tau^\lambda(x)}\left(-\lambda^{-1}S_{\tau^\lambda(x)}^\lambda(x)\right)\right]\mu_{Z+}^\lambda(dx) = \beta.$$

$$\text{(A.4)} \quad \lim_{\eta\to 0}\lim_{\lambda\to 0}\frac{1}{\lambda\sqrt{\eta}}\int_0^\infty \mathbf{E}\left[c(\lambda,\eta)^{-\tau^\lambda(x)}\left(e^{-\frac{\sqrt{2\eta}}{\sigma}S_{\tau^\lambda(x)}^\lambda(x)} - 1 + \frac{\sqrt{2\eta}}{\sigma}S_{\tau^\lambda(x)}^\lambda(x)\right)\right]\mu_{Z+}^\lambda(dx) = 0.$$

$\delta = p(m_{Z+} + \beta)$ とおく。さらに、

$$\widetilde{X}_t^\lambda(x) = X_{[\lambda^{-2}t]}^\lambda(x) + (\lambda^{-2}t - [\lambda^{-2}t])(X_{[\lambda^{-2}t]+1}^\lambda(x) - X_{[\lambda^{-2}t]}^\lambda(x)),$$

$$\widetilde{S}_t^\lambda = S_{[\lambda^{-2}t]}^\lambda(0) + (\lambda^{-2}t - [\lambda^{-2}t])(S_{[\lambda^{-2}t]+1}^\lambda(0) - S_{[\lambda^{-2}t]}^\lambda(0)).$$

とし、$\{(\widetilde{X}_t^\lambda(x), \widetilde{S}_t^\lambda),\ t \geq 0\}$ の与える $(\mathbf{C}([0,\infty);\mathbf{R}^2),\ \mathcal{B}(\mathbf{C}([0,\infty);\mathbf{R}^2)))$ 上の分布を $\mathbf{Q}^\lambda$ とする。このとき、次の定理が成立する。

定理 1 $\mathbf{Q}^\lambda$ は $\lambda \downarrow 0$ のとき $\mathbf{C}([0,\infty);\mathbf{R}^2)$ 上の確率測度として弱収束する。その収束先を $\mathbf{Q}$ とする。$w = (w_1, w_2) \in \mathbf{C}([0,\infty);\mathbf{R}^2)$ に対して $X_t = X_t(w) = w_1(t)$, $W_t = W_t(w) = w_2(t)$ とおくと、$\mathbf{Q}$ の下で $\{W_t\}$ は *Wiener* 過程であり、

$$X_t = x + \sigma\int_0^t 1_{\{X_s>0\}}dW_s + \delta\int_0^t 1_{\{X_s=0\}}ds, \quad t \geq 0.$$

が成立する。

On tail distributions of supremum and quadratic variation of cádlág local martingales

Shunsuke Kaji

1 Introduction and Notation

We study a property on tail distributions of supremum and quadratic variation of local martingales. In the case of a continuous local martingale there have been works by Azema, Gundy, and Yor[1], Elworthy, Li, and Yor[2], and Takaoka[4] etc. Recently, by Liptser and Novikov[3] they were extended to the case of a local martingale with uniformly bounded jumps.

Let $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ be a complete probability space with a right-continuous filtration $\{\mathcal{F}_t\}_{t\in\mathbf{R}_+}$ and $\mathcal{F}_0 \supset \mathcal{N}$, where $\mathbf{R}_+ = [0,\infty)$ and $\mathcal{N}$ is a class of P-null sets, and let $M = \{M_t\}_{t\in\mathbf{R}_+}$ be a locally square integrable cádlág local martingale with $M_0 = 0$ defined on $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t\in\mathbf{R}_+}, P)$. $\Delta M_t = M_t - M_{t-}$, $\langle M\rangle_t$ and $[M]_t$ are jumps, predictable quadratic variation and optimal quadratic variation processes of M respectively.

We introduce the main result in the paper Liptser and Novikov[3];

Theorem 1.1 *Assume that $\langle M\rangle_\infty = \lim_{t\to\infty}\langle M\rangle_t < \infty$ a.s and $\{M_\tau^+\}_{\tau\in\mathcal{T}}$ is uniformly integrable, where $\mathcal{T}$ is the set of stopping times τ. Then*

(*i*) $0 \le E[M_\infty] \le E[M_\infty^+] < \infty$.

Besides,

(*ii*) *if $\{\Delta M_\tau\}_{\tau\in\mathcal{T}}$ is uniformly integrable, then*

$$\lim_{\lambda\to\infty}\lambda P(\sup_{t\in\mathbf{R}_+}(M_t^-) > \lambda) = E[M_\infty];$$

(*iii*) *if $|\Delta M| \le K$ and $E[e^{\epsilon M_\infty}] < \infty$ for some $K > 0$ and ϵ, then*

$$\lim_{\lambda\to\infty}\lambda P(\sqrt{\langle M\rangle_\infty} > \lambda) = \lim_{\lambda\to\infty}\lambda P(\sqrt{[M]_\infty} > \lambda) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}E[M_\infty].$$

In this presentation, we will present the result without the uniform boundedness assumption for jumps. But, to obtain the characterization for tail distributions of quadratic variation processes of a local martingale M, we replace it by another assumptions: "the quasi left-continuity of M and the exponential moment in terms of the compensator of the counting measure of ΔM."

2 Main result

Denote a random measure μ such that $\mu(\cdot,(0,t]\times U)=\sum_{0<s\leq t}1_U(\Delta M_s)$ for all $t\in(0,\infty)$ and $U\in\mathcal{B}(\mathbf{X})$, where $\mathbf{X}=\mathbf{R}-\{0\}$, and let $\hat{\mu}$ be the compensator of μ.

Assume that $\{M_\tau^-\}_{\tau\in\mathcal{T}}$ is uniformly integrable, where $\mathcal{T}$ is the set of stopping times τ. First, we introduce the result with respect to the tail distribution of supremum of M;

Theorem 2.1 *Assume that there exists the random variable M_∞ such that $\lim_{t\to\infty}M_t=M_\infty\in\mathbf{R}$ a.s.. Then*

(*i*) $-\infty<-E[M_\infty^-]\leq E[M_\infty]\leq 0$.

Besides, if $\{\Delta M_\tau\}_{\tau\in\mathcal{T}}$ is uniformly integrable, then

(*ii*) $\lim_{\lambda\to\infty}\lambda P(\sup_{t\in\mathbf{R}_+}M_t>\lambda)=-E[M_\infty]$.

Second, we can have the following result with respect to the tail distributions of quadratic variation of M;

Theorem 2.2 *Assume that there exists $\lim_{t\to\infty}\langle M\rangle_t=\langle M\rangle_\infty<\infty$ a.s.. Then (i) of the theorem 2.1 holds. Assume furthermore that M is quasi left-continuous and there exists $\lambda_0>0$ such that*

$$(*)\quad E[\exp\{\lambda_0 M_\infty^- +(\lambda_0+1)\textstyle\int_{(0,\infty)\times\{|x|>K\}}|\phi_{\lambda_0}(x)|\hat{\mu}(\cdot,dsdx)\}]<\infty$$

for some $K>0$, where $\phi_\lambda(x)=\frac{e^{-\lambda x}-1}{\lambda}+x-\frac{\lambda}{2}x^2$, then

(*i*) $\lim_{\lambda\to\infty}\lambda P(\sqrt{\langle M\rangle_\infty}>\lambda)=-\sqrt{\frac{2}{\pi}}E[M_\infty]$,

(*ii*) $\lim_{\lambda\to\infty}\lambda P(\sqrt{[M]_\infty}>\lambda)=-\sqrt{\frac{2}{\pi}}E[M_\infty]$.

Corollary 2.1 *Under the assumptions of the theorem 2.1 and 2.2, $\{M_\tau\}_{\tau\in\mathcal{T}}$ is uniformly integrable if and only if*

$$\begin{aligned}
&\lim_{\lambda\to\infty}\lambda P(\sup_{t\in\mathbf{R}_+}M_t>\lambda)\\
=&\lim_{\lambda\to\infty}\lambda P(\sqrt{\langle M\rangle_\infty}>\lambda)\\
=&\lim_{\lambda\to\infty}\lambda P(\sqrt{[M]_\infty}>\lambda)\\
=&\,0.
\end{aligned}$$

Remark 2.1 *We can find that $\{\Delta M_\tau\}_{\tau\in\mathcal{T}}$ is uniformly integrable if and only if*

$$\lim_{a\to\infty}\sup_{\tau\in\mathcal{T}}E[\int_{\{|x|\geq a\}}|x|\hat{\mu}(\cdot,\{\tau\},dx)]=0.$$

Because it follows that for any $\tau \in \mathcal{T}$ and $a > 0$

$$E[|\Delta M_\tau|; |\Delta M_\tau| \geq a] = E[\int_{\{|x| \geq a\}} |x| \hat{\mu}(\cdot, \{\tau\}, dx)].$$

Remark 2.2 *If we have that for some $\lambda_0 > 0$ and $K > 0$*

$$E[exp(\lambda_0 M_\infty^-)] < \infty \text{ and } |\Delta M| \leq K,$$

then they satisfy $(*)$. Because, $|\Delta M| \leq K$ implies $0 = \mu(\cdot, \mathbf{R}_+ \times \{|x| > K\})$ a.s. which gives the result $\hat{\mu}(\cdot, \mathbf{R}_+ \times \{|x| > K\}) = 0$ a.s..

3 REFERENCE

1. Azema, Gundy, Yor(1980) Sur lintegrabilite uniforme des martingales continues. Seminaire de Probabilites XIV, LNM 784, Springer, pp.249-304.

2. Elworthy, Li, Yor(1997) On the tails of the supremum and the quadratic variation of strictly local martingales. Seminaire de Probabilites XXXI, LNM 1655, Springer, pp.113-125.

3. Liptser, Novikov(2004) On tail distributions of supremum and quadratic variation of local martingales. preprint

4. Takaoka(1999) Some remarks on the uniform integrability of continuous martingales. Seminaire de Probabilites XXXIII, LNM 1709, Springer, pp.327-333.

On convolution roots in some classes related to the subexponentiality

志村 隆彰 (統数研)・渡部 俊朗 (会津大学)

分布 μ の $n(\geq 2)$ 回 convolution μ^{n*} がある分布族に属しているという仮定から、μ 自身がその分布族に属することが導かれるかという問題を考える。答が肯定的ならば、その分布族は convolution roots について閉じているという。具体的に考察する分布族は、convolution equivalent class $\mathcal{S}(\gamma)$、exponential tail class $\mathcal{L}(\gamma)$ などでそれぞれ以下のように定義される。まず、subexponential class $\mathcal{S}$ と long-tailed class $\mathcal{L}$ から始める。以下、$\bar{\mu}(x) = \mu(x, \infty)$ とする。

$\mathcal{L}$: $[0, \infty)$ 上の分布 μ が $\mathcal{L}$ に属するとは、$\lim_{x\to\infty} \bar{\mu}(x+k)/\bar{\mu}(x) = 1$ for each $k \in \mathbf{R}$ が成り立つときをいう。

$\mathcal{S}$: $[0, \infty)$ 上の分布 μ が $\mathcal{S}$ に属するとは、$\lim_{x\to\infty} \overline{\mu * \mu}(x)/\bar{\mu}(x) = 2$ が成り立つときをいう。

$\mathcal{S} \subset \mathcal{L}$ である。次に、これらを拡張した分布族 $\mathcal{L}(\gamma)$ と $\mathcal{S}(\gamma)$ を与える。

$\mathcal{L}(\gamma)$ $(\gamma > 0)$: $[0, \infty)$ 上の分布 μ が $\mathcal{L}(\gamma)$ に属するとは、$\lim_{x\to\infty} \bar{\mu}(x+k)/\bar{\mu}(x) = e^{-\gamma k}$ for each $k \in \mathbf{R}$ が成り立つときをいう。

$\mathcal{S}(\gamma)$ $(\gamma > 0)$: $[0, \infty)$ 上の分布 μ が $\mathcal{S}(\gamma)$ に属するとは、(i) $\mu \in \mathcal{L}(\gamma)$ 及び、(ii) $\lim_{x\to\infty} \overline{\mu * \mu}(x)/\bar{\mu}(x) = 2\int_0^\infty e^{\gamma t}\mu(dt) < \infty$ が成り立つときをいう。$\mathcal{S} = \mathcal{S}(0)$、$\mathcal{L} = \mathcal{L}(0)$ と書く。

問題は $\mathcal{S}(\gamma)$ が convolution roots について閉じているかということである。$\mathcal{S}$ は閉じていることが知られており (Embrechts et al.(1979))、$\gamma > 0$ の場合に対し、Embrechts and Goldie(1982) は、$\mu^{n*} \in \mathcal{S}(\gamma)(n \geq 2)$ かつ $\mu \in \mathcal{L}(\gamma)$ ならば、$\mu \in \mathcal{S}(\gamma)$ であることを示した。さらに $\mathcal{L}(\gamma)$ が convolution roots について閉じていると予想している。この予想が正しければ、直ちに $\mathcal{S}(\gamma)$ も閉じていることが導かれる。以上が、これまで知られている結果であるが、最初の結果は $\mathcal{L}(\gamma)$ に関する Embrechts たちの予想が誤りであることを主張している。

定理 1 $\mathcal{L}(\gamma)$ $(\gamma \geq 0)$ は convolution roots について閉じておらず、$\mu \notin \mathcal{L}(\gamma)$ であるが、$\mu * \mu \in \mathcal{L}(\gamma)$ となる分布が存在する。

そこで、$\mathcal{S}(\gamma)$ について新たな考察手段を試み、local subexponential class と the γ-transform を導入する。

定義 1 $\Delta = [0, c)(c > 0)$ に対し, $[0, \infty)$ 上の分布 μ が $\Delta-subexponential$ $(\mu \in \mathcal{S}_\Delta)$ であるとは、

(i) $\lim_{x\to\infty} \mu(x+k, x+c+k]/\mu(x, x+c] = 1$ uniformly in $k \in [0, 1]$,

(ii) $\lim_{x\to\infty}\mu^{2*}(x,x+c]/\mu(x,x+c]=2$.

さらに $\mathcal{S}_{loc}=\cap_{c>0}\mathcal{S}_{[0,c)}$ とする。

定義 2 $[0,\infty)$ 上の分布 μ が、全ての $x>0$ に対して $\bar{\mu}(x)>0$ を満たすとき、$\gamma>0$ に対して、γ の γ-transform $G_\gamma(\mu)$ を次にように定義する。

$$G_\gamma(\mu)=ce^{\gamma x}\mu,\ \text{ここで } c>0 \text{ は規格化定数である}.$$

γ−transform は convolution を保存し、$G_\gamma(\mathcal{S}(\gamma))=\{G_\gamma(\mu):\mu\in\mathcal{S}(\gamma)\}$ と書く。次の結果から、$\mathcal{S}(\gamma)$ と $\mathcal{S}_{loc}$ の convolution roots の問題は同値である。

定理 2 $G_\gamma(\mathcal{S}(\gamma))=\mathcal{S}_{loc}$.

$[0,\infty)$ 上の正値関数 $h(x)$ が $\mathcal{GL}$ に属するとは、ある非負の数 p_1 と $p_2(p_1+p_2>0)$、正値非増加関数 $d(x)$ 及び正値平行移動に対して漸近不変な関数 $l(x)$ が存在し、$h(x)\sim p_1d(x)+p_2l(x)$ となるときをいう。

$[0,\infty)$ 上の正値 関数 $f(x)$ が $\widetilde{\mathcal{GL}}$ に属するとは、正の数 b、$c_1-c_2=c_3-c_4>0$ を満たす非負の数 $c_i(i=1,2,3,4)$ 及び $h(x)\in\mathcal{GL}$ により、

$$f(x)+c_2h(x+b)\preceq c_1h(x),\quad f(x)+c_4h(x)\succeq c_3h(x+b),$$

となるときをいう。

定理 3 $c>0$、$\Delta=[0,c)$ とする。$\mu^{n*}\in\mathcal{S}_\Delta$ かつ $\mu(x,x+c]\in\widetilde{\mathcal{GL}}$ ならば、$\mu\in\mathcal{S}_\Delta$ である。

系 1 $\mu^{n*}\in\mathcal{S}(\gamma)$ かつ $e^{\gamma x}\bar{\mu}(x)\in\mathcal{GL}$ ならば、$\mu\in\mathcal{S}(\gamma)$ である。

最後に、無限分解可能分布と関わりのある結果をしめす。

定理 4 μ を Lévy 測度 ν をもつ $[0,\infty)$ 上の無限分解可能分布とする。$\nu_1=1_{\{x>1\}}\nu/\nu(1,\infty)\in\mathcal{L}_\Delta$, $\Delta=(0,c](c>0)$ とする。このとき、次は同値である。

(1) $\mu\in\mathcal{S}_\Delta$,
(2) $\nu_1\in\mathcal{S}_\Delta$,
(3) $\mu(x+\Delta)\sim\nu(x+\Delta)\ (x\to\infty)$

References

[1] S.Asmussen, S.Foss and D.Korshunov(2003). Asymptotics for sums of random variables with local subexponential behaviour. J. Theor. Probab. **16** No.2 489-518.

[2] P.Embrechts and C.M.Goldie(1982). On convolution tails. Stochastic Process. Appl., **13**, 263-278.

[3] P.Embrechts, C.M.Goldie and N.Veraverbeke.(1979). Subexponentiality and infinite divisibility. Z.Wahrscheinlichkeitstheorie und Verw.Gebiete **49** 335-347.

Number of leaves as the total progeny of hidden trees in a Galton-Watson tree

南　就将　　　　筑波大学数理物質科学研究科（数学専攻）

1. 問題

$\mathbf{Z}_1$ 上の確率分布 $\Pi = \{p_j\}_{j=0}^{\infty}$ $(p_0 > 0,\ p_0 + p_1 < 1)$ を offspring distribution とする Galton-Watson tree を考え、その頂点総数 (total progeny) を Z, Π の母関数を $f(z)$, Z の母関数を $\mathcal{P}(z)$ とすると、$w = \mathcal{P}(z)$ は方程式 $w = zf(w)$ の解である。このことから例えば $P(Z = n)$ の $n \to \infty$ での漸近展開が得られる。一方、Y を同じ Galton-Watson tree の leaf（端点）の総数とし、$\mathcal{Q}(z)$ をその母関数とすると、$w = \mathcal{Q}(z)$ は方程式 $w = zg_0(w)$ の解であることがわかる。ただし、$g_0(w) = p_0 w/(w - f(w) + p_0)$. ところが、$S_1, S_2, \ldots$ を分布 $\{p_{j+1}/(1-p_0)\}_{j=0}^{\infty}$ に従う確率変数、N を幾何分布 $\{p_0(1-p_0)^j\}_{j=0}^{\infty}$ に従う確率変数とし、これらはすべて独立とすると、$g_0(w)$ は確率変数 $X = \sum_{j=1}^{N} S_j$ の母関数である。その分布を $\Pi^{(0)}$ とすると、次が言えたことになる:

定理. Π を offspring distribution とする Galton-Watson tree の端点数 Y は、$\Pi^{(0)}$ を offspring distribution とする Galton-Watson tree の頂点総数に分布の意味で等しい。

以下、Y を total progeny に持つような tree をもとの Galton-Watson tree の汎関数として具体的に構成することを考える。

2. Standard Galton-Watson tree (after J. Neveu)

$U = \sum_{n\geq 0} \mathbf{N}^n$ を有限な長さをもつ自然数列 $u = j_1 j_2 \cdots j_p$ の全体とする。（ただし ϕ を空なる列として、$N^0 := \{\phi\}$. ）$\omega \subset U$ が tree であるとは、次の 3 条件が成り立つことである: (a) $\phi \in \omega$; (b) $uj \in \omega$ ならば $u \in \omega$; (c) 各々の $u \in \omega$ に対して非負整数 $\nu_u(\omega)$ が存在して $uj \in \omega \Leftrightarrow 1 \leq j \leq \nu_u(\omega)$. ここで 2 つの列 $u = j_1 j_2 \cdots j_n$ と $v = k_1 k_2 \cdots k_p$ に対して $uv = j_1 j_2 \cdots j_n k_1 k_2 \cdots k_p$ と記す。特に $uj = j_1 j_2 \cdots j_n j$ $(j \in \mathbf{N})$. また $u0 = u\phi = u$ とおく。

この意味での tree ω の全体を Ω とし、各 $u \in U$ に対して $\Omega_u\{\omega \in \Omega \mid \omega \ni u\}$ とおき、集合族 $\{\Omega_u \mid u \in U\}$ が生成する σ-field を $\mathcal{F}$ とする。

さて、無限直積空間 $(\Omega^*, \mathcal{F}^*, P^*) = \prod_{u\in U}(\mathbf{Z}_+, \Pi)$ から $(\Omega, \mathcal{F})$ への写像 ψ を

$$\psi(\omega^*) = \{u = j_1 \cdots j_p \mid j_{k+1} \leq \nu^*_{j_1 \cdots j_k}(\omega^*)\ ,\ 0 \leq k < p\}\ .$$

により定義し（ν^*_u は座標写像）、$P = P^* \psi^{-1}$ とおくと、$(\Omega, \mathcal{F}, P)$ は Galton-Watson tree の確率空間となる（文献 [N] 参照）。

$\omega \in \Omega$ に対して

$$Z(\omega) = |\omega| = \sum_{u\in U} 1_{\Omega_u}(\omega)\ ,\quad Y(\omega) = \sum_{u\in U} 1_{\Omega \setminus \Omega_{u1}}(\omega)$$

はそれぞれ tree ω の頂点総数、端点数を表す。

3. Abstract Galton-Watson tree

定義. 有限または可算集合 V を頂点集合とする有向グラフ $G = (V, E)$ $(E \subset V \times V)$ が abstract tree であるとは、次の 5 条件を満たすこと：

1) 任意の $u \in V$ に対して $(u, u) \notin E$.

2) $u_0 \in V$ が存在して $(u, u_0) \notin E$ $(\forall u \in V)$. この u_0 を G の "root" と呼ぶ.

3) 任意の $v \in V \setminus \{u_0\}$ に対して $(u, v) \in E$ となる $u \in V$ がただ一つ存在する.

4) $E^s := \{\{u, v\};\ (u, v) \in E \text{ or } (v, u) \in E\}$ とおくことによって得られるグラフ $G^s = (V, E^s)$ は連結。

5) 任意の $u \in V$ に対して $W_G(u) = \{v \in V;\ (u, v) \in E\}$ 有限な全順序集合.

容易にわかるように、abstract tree $G = (V, E)$ はある $\omega \in \Omega$ にグラフとして isomorphic となる。τ_G をその graph isomorphism とする。S を可算無限集合とし、$V \subset S$ であるような abstract tree $G = (V, E)$ の全体を $\mathbf{G}_S$ とする。$\tau : \mathbf{G}_S \mapsto \Omega$ を $\tau(G) = \tau_G(V)$ $(G = (V, E))$ により定義し、$\mathcal{G} := \tau^{-1}(\mathcal{F})$ とおく。$(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{F}}, \tilde{P})$ が確率空間のとき、写像 $G : \tilde{\Omega} \mapsto \mathbf{G}_S$ が $\tilde{\mathcal{F}}/\mathcal{G}$- 可測ならば $G(\cdot)$ を random S-tree という。Ω 上の分布 $\tilde{P} \circ (\tau \circ G)^{-1}$ がある offspring distribution に対する Galton-Watson tree の分布に一致するとき、G を abstract Galton-Watson tree と呼ぶことにする。

4. Y を頂点総数とする abstract Galton-Watson tree の構成

我々の Galton-Watson tree においては $p_0 > 0$ だから、$1_n := 11 \cdots 1$ （n 回）とおくとき、$\forall u \in U$ に対して $P(\cap_{n=1}^{\infty} \Omega_{u1_n}) = 0$. そこで $\tilde{\Omega} := \cap_{u \in U} \cup_{n=1}^{\infty} \Omega_{u1_n}$ とおくと、$P(\tilde{\Omega}) = 1$. $\mathcal{F}$, P を $\tilde{\Omega}$ に制限して確率空間 $(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{F}}, \tilde{P})$ を得る。$S = U$ として $\omega \in \tilde{\Omega}$ に対して定義され、$Y(\omega)$ を頂点総数に持つような random U-tree $G_0(\omega)$ を次の手順で構成すると、$G_0(\cdot)$ は $\Pi^{(0)}$ を offspring distribution とする abstract Galton-Watson tree であることを示すことができる。

1. 各々の $\omega \in \tilde{\Omega}$ に対して $V_0(\omega) = \{u \in \omega;\ \nu_\omega(u)\}$ を ω の端点の全体とする。$V_0(\omega)$ に隣接関係を以下のように定義して abstract tree $G_0(\omega)$ を得る:
2. $n_0(\omega) := \max\{p \geq 0;\ 1_p \in \omega\}$ とすると、$n_0(\omega) < \infty$. そこで $u_0(\omega) := 1_{n_0(\omega)}$ が $G_0(\omega)$ の root の役割をはたす。
3. $u \in V_0(\omega)$ は一般に
$$u = 1_{p_1} a_1 1_{p_2} a_2 \dots 1_{p_N} a_N 1_m =: \tilde{u} 1_m$$
$(p_i \geq 0, i = 1, \dots, N, 1 < a_i \leq \nu_\omega(1_{p_1} a_i \dots 1_{p_i}), m = \max\{j \geq 0;\ \tilde{u} 1_j \in \omega\})$ という形をしている。$m = 0$ または $\nu_\omega(\tilde{u} 1_j) = 1, \forall j = 0, 1, \dots, m-1$ ならば u は子供を持たない。一方、$\nu_\omega(\tilde{u} 1_j) > 1$ となるような $0 \leq j < m$ があれば u は $v = \tilde{u} 1_i b 1_\ell \in V_0(\omega)$ の形の子供を持つ。ただし、$0 \leq i < m$, $1 < b \leq \nu_\omega(\tilde{u} 1_i)$, $\ell = \max\{p \geq 0;\ \tilde{u} 1_i b 1_p \in \omega\}$ である。この意味での親子の対 $(u, v) \in V_0(\omega) \times V_0(\omega)$ の全体を $E_0(\omega)$ とする。

5. 一般化

$\omega \in \tilde{\Omega}$ に対して $V_k(\omega) = \{u \in U;\ u \in \omega \text{ and } \nu_\omega(u) \leq k\}$ とする。$V_k(\omega)$ 上に適当な隣接関係を定義すると、高々 k 人の子供を持つ頂点の数 $\mathcal{Y}_k = \sum_{u \in U} 1_{\Omega \setminus \Omega_{u(k+1)}}$ を頂点総数とする abstract Galton-Watson tree を構成することができる。その offspring distribution $\Pi^{(k)}$ の母関数 $g_k(w)$ は $g_k(w) = w(\sum_{j=0}^{k} p_j w^j)/(w - f(w) + \sum_{j=0}^{k} p_j w^j$ で与えられる。

文献

[M] N. Minami: On the number of vertices with a given degree in a Galton- Watson tree. to appear in Adv. Appl. Prob. (2005)

[N] J. Neveu: Arbres et processus de Galton-Watson. Ann. Inst. Henri Poincaré, vol.22, no.2, 199–207 (1986)

エルゴード理論とその周辺

本研究集会は，仲田 均 (慶應義塾大学)・吉田雅通 (大阪市立大学)・盛田 健彦 (広島大学) が世話人となって，大阪市立大学文化交流センターホールにおいて，2004 年 12 月 16 日 (木)〜12 月 18 日 (土) の日程で開催された．エルゴード理論と関連した様々な分野の数多くの講演があり，有意義な討論，情報交換が行われた．以下に，そのプログラムと，講演アブストラクトを付けておく．

プログラム

12 月 16 日（木）

10:00–10:50 由利 美智子 (札幌大学)
Non-equilibrium steady states arising from number theory

11:00–11:50 濱地 敏弘 (九州大学)
Invariants and embeddings in symbolic dynamics

13:20–14:10 谷口 礼偉 (三重大学)・久保 泉 (広島工業大学)
カオス写像で生成される疑似乱数の Perron-Frobenius 作用素による解析

14:20–14:50 夏井 利恵 (慶應義塾大学)
On the metric theory of non-Archimedian Diophantine approximation and the discrepancy problem of generalized Kronecker sequence

15:00–15:30 中石 健太郎 (東京大学)
Some remark on Bernoulli convolutions

15:50–16:40 Michael Keane (Wesleyan University)
Ergodicity of adic transformations

12 月 17 日（金）

10:00–10:50 吉田 雅通 (大阪市立大学)・増井 健一 (大阪市立大学)・杉崎 文亮 (熊本大学)
On Denjoy minimal systems (I) - Markov odometer models

11:00–11:50 増井 健一 (大阪市立大学)・吉田 雅通 (大阪市立大学)・杉崎 文亮 (熊本大学)
On Denjoy minimal systems (II)
- Sturmian sequences and dimension groups

13:20–13:50 杉崎 文亮 (熊本大学)
Pressures of Cantor minimal systems within a strong orbit equivalence class

14:00–14:30 湯浅 久利 (九州大学)
Orbit equivalence and normalizers of Cantor minimal systems

14:40–15:10 盛田 健彦 (広島大学)
2次元散乱開撞球の temporal distance function について

15:30–16:00 波止元 仁 (東京都立大学)
物理的測度をもつ写像とその正則性について

16:10–17:00 鄭 容武 (広島大学)
Large deviations for unimodal maps satisfying the Collet-Eckmann condition

12月18日（土）

10:00–10:50 高橋 智 (奈良女子大学)
Models on lateral asymmetry polymorphism of fish

11:00–11:50 伊藤 俊次 (金沢大学)
A construction of Markov partition of a non-Pisot group automorphism

13:20–13:50 榎本 文彦 (金沢大学)
Anti-homomorphic substitutions and dynamical systems

14:00–14:30 高嶋 惠三 (岡山理科大学)
エルゴード理論と見本関数 (sample path)

14:40–15:10 仲田 均 (慶應義塾大学)
Ergodicity of some skew products of Jacobi-Perron algorithm

16:10 – 17:00 釜江 哲朗 (大阪市立大学)
Numeration systems from the ergodic theoretical point of view

カオス写像で生成される擬似乱数の Perron-Frobenius 作用素による解析

久保 泉（広島工大） 谷口 礼偉（三重大）

非再帰的に擬似乱数を生成する実数シフト法について、理論的な背景が明らかになってきたので紹介する。考察する対象は以下の単純実数シフト計算 (simplified shift-real computation, ＳＳＲ計算) である：

$$g(x) = x \cdot x \cdot x \cdot \cdots \cdot x \cdot x, \quad x \in [1, 2),$$

を

$$u_0 := 1, \quad u_k := u_{k-1} \times x, \quad k = 1, 2, \cdots, 24,$$

と倍精度計算し、 u_k を１回計算するごとに、 u_k を表す倍精度変数の

i) 仮数部の全てのビット値を１ビット左にシフトし、
ii) 指数部は $\cdots \times 2^0$ となるように設定する。

実際の乱数値は、x を変化させ、対応する計算結果 $u_{24}(x)$ から、上位３桁を棄て続く４桁を取り出す。したがって、乱数値の分布特性の解析には、 x を変化させたときの $u_{24}(x)$ の値分布を調べればよい。

【ＳＳＲ計算値の分布密度関数】 u_{k-1} から u_k を得る一連の操作を、写像 Φ_x とすれば、ＳＳＲ計算値 $u_{24}(x)$ は $\Phi_x^{24}(1)$ と表される。ここで、

$1 \le x < 1.5$ のとき

$\Phi_x(t) = 2xt$-1 ($1 \le t < 3/(2x)$ のとき), $2xt$-2 ($3/(2x) \le t < 2/x$ のとき),
xt-1 ($2/x \le t < 2$ のとき),

$1.5 \le x < 2$ のとき

$\Phi_x(t) = 2xt$-2 ($1 \le t < 2/x$ のとき), xt-1 ($2/x \le t < 3/x$ のとき),
xt-2 ($3/x \le t < 2$ のとき)

である。このカオス写像 Φ_x に対応する Perron-Frobenius 作用素 を $\mathcal{L}_x$ とすると、

$1 \le x < 1.5$ のとき

$(\mathcal{L}_x h)(t) = \frac{1}{2x}h(\frac{t+2}{2x}) + \frac{1}{x}h(\frac{t+1}{x})$ ($1 \le t < 2x-1$ のとき),
$\frac{1}{2x}h(\frac{t+1}{2x}) + \frac{1}{2x}h(\frac{t+2}{2x})$ ($2x-1 \le t < 2$ のとき)

$1.5 \le x < 2$ のとき

$(\mathcal{L}_x h)(t) = \frac{1}{x}h(\frac{t+1}{x}) + \frac{1}{x}h(\frac{t+2}{x})$ ($1 \le t < 2x-2$ のとき),
$\frac{1}{2x}h(\frac{t+2}{2x}) + \frac{1}{x}h(\frac{t+1}{x})$ ($2x-2 \le t < 2$ のとき)

となる。

$\mathcal{L}_x$ の不動点 h_x は Φ_x の不変測度 μ の密度関数を与えるが、この h_x は

$$h_x(t) = \lim_{n\to\infty}\{\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\mathcal{L}_x^k 1\}(t).$$

で求められる（数値計算を行う）。

［主張］ x を変化させたとき、$\Phi_x^{24}(1)$ の分布は、h_x, $x \in [1,2)$, を x について平均した密度関数 $H(t)$, すなわち、

$$H(t) \equiv \int_1^2 h_x(t)dx, \quad t \in [1,2),$$

で記述される（統計検定的に $H(x)$ と考えてよい）。

この主張について、 $H(t)$ から定まる確率分布関数を $F(t)$ として、

［検定X］ 20000 個の $z_k = \Phi_{x_k}^{24}(1)$ からなる数値列

$$z_{1+20000\times j}, \quad z_{2+20000\times j}, \quad \dots, \quad z_{20000+20000\times j}$$

を 1 万系列 ($j = 0, 1, ..., 9999$) 発生させる。次に各 j 系列ごとの値分布を $F(t)$ と比べ Kolmogorov-Smirnov 統計量 κ_j^+ および κ_j^- を計算する。この 1 万個の $\kappa_j^+[\kappa_j^-]$ の分布は, 確率密度関数 $P(x) = 1 - exp(-2x^2)$ にほぼしたがうことが知られているので,χ^2 検定を行うことができる、

を行うと、χ^2 検定値 0.20098$[\kappa_j^+]$, 0.66702$[\kappa_j^-]$ を得、仮説は棄却されない。

【ＳＳＲ分布の改良】
$1.e = 1.2718281828459$, $1.\pi = 1.3141592653589$ とし、 $\Phi_x^{24}(1.e)$ - $\Phi_x^{24}(1.\pi)$ (mod 1) を $\Phi_x^{24}(1)$ の代りとする。この値の分布密度関数 $I(y)$, $y \in [0,1)$, は $H(t)$ からの畳み込み

$$I(y) = \int_1^{1+y} H(t)H(t-y+1)dt + \int_{1+y}^2 H(t)H(t-y)dt$$

で与えられ、分布特性（一様性）が格段に改良される。

【ＳＳＲ分布を近似する関数】
今まで数値計算で求めていた $H(t)$ は、

$$\tilde{H}(t) \equiv \left\{ \frac{1}{1+t} + \frac{1}{2+t} \right\} \frac{1}{\log 2},$$

$$\hat{H}(t) \equiv \left(2 - \frac{3\log 3}{2\log 2} \right) + \frac{1}{2\log 2} \left[-\frac{3}{2}\log(1+t) - \frac{3}{2}\log(2+t) \right.$$
$$\left. + \log(3+t) + \log(4+t) + \frac{1}{2}\log(5+t) + \frac{1}{2}\log(6+t) \right]$$

などで近似される。$\hat{H}(t)$ は $\tilde{H}(t)$ にもう一度 Perron-Frobenius 作用素 $\mathcal{L}_x$ を作用させて、x について平均をとったものであり、$\tilde{H}(t)$ よりさらに精密に $H(t)$ を近似する。

On the metric theory of non-archimedean Diophantine approximation and the discrepancy problem of generalized Kronecker sequences

Rie Natsui (Keio university) *

Let $\mathbb{F}_q$ be a finite field with q elements. We define the ring of polynomials with $\mathbb{F}_q$-coefficients by

$$\mathbb{F}_q[X] = \{a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \cdots + a_1 X + a_0 : a_i \in \mathbb{F}_q,\ 0 \le i \le n,\ n \in \mathbb{Z}\}.$$

We also define

$$\deg f = \begin{cases} n & \text{if } f = a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \cdots \text{ with } a_n \neq 0, \\ -1 & \text{if } f = 0, \end{cases}$$

$$|f| = q^{\deg f}$$

$$\{f\} = a_{-1}X^{-1} + a_{-2}X^{-2} + \cdots \quad \text{if} \quad f = a_n X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots .$$

We consider

$$\mathcal{L} = \{ f = a_{-1}X^{-1} + a_{-2}X^{-2} + \cdots : a_i \in \mathbb{F}_q,\ i \le -1\}$$

with the unique Haar probability measure m. We put

$$W_k^* := \left\{ (P_1, \ldots, P_d) \in \mathbb{F}_q[X]^d : \sum_{i=1}^{d} \deg P_i = k \right\}$$

$$Z_k^* := \{(P_1, \ldots, P_d) \in W_k^* : P_1, \ldots, P_d \text{ have only trivial common factors}\}.$$

Then we have the following theorems.

*joint work with Kae Inoue and Hitoshi Nakada

Theorem . *For m^d-a.e.$(f_1, \ldots, f_d) \in \mathcal{L}^d$,*

$$|\{P_1 f_1 + \cdots + P_d f_d\}| < \frac{1}{q^{v_k}}$$

have infinitely many solutions $(P_1, \ldots, P_d) \in Z_k^*$ if and only if

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sharp Z_k^*}{q^{v_k}} = \infty,$$

where m^d is the Haar probability measure on $\mathcal{L}^d$.

Theorem . *We put*

$$A_{(P_1,\ldots,P_d)} := \{(f_1, \ldots, f_d) \in \mathcal{L}^d : |\{P_1 f_1 + \cdots + P_d f_d\}| < \frac{1}{q^{v_k}}\}$$

and

$$\Psi(K) := \sum_{\substack{(P_1, \ldots, P_d) \in W_k^* \\ 1 \le k \le K}} m^d(\, A_{(P_1,\ldots,P_d)}\,) = \frac{(q-1)^d}{(d-1)!} \sum_{k=1}^{K} \frac{k^{d-1}}{q^{v_k - k}}.$$

If $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^{d-1}}{q^{v_k-k}} = \infty$ *and $v_k > k$, then we have for m^d-a.e.$(f_1, \ldots, f_d)$,*

$$\sharp\{(P_1, \ldots, P_d) \in W_k^* : 1 \le k \le K,\ (f_1, \ldots, f_d) \in A_{(P_1,\ldots,P_d)}\}$$
$$= \Psi(K) + O(\,\Psi^{\frac{1}{2}}(K)\, \log^{\frac{3}{2}+\varepsilon} \Psi(K)\,).$$

SOME REMARK ON BERNOULLI CONVOLUTIONS

KENTARO NAKAISHI
GRADUATE SCHOOL OF MATHEMATICAL SCIENCES
UNIVERSITY OF TOKYO

Let (Ω, P) be a probability space defined by $\Omega = \{-1,1\}^\infty$ equipped with the $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$-Bernoulli measure P. *Bernoulli convolution* ν_β is the distribution of a random variable $X(\omega) = \sum_{k=0}^{\infty} \omega_k \beta^{-k}$ on Ω where $\beta > 1$. The name comes from the fact that it is the infinite convolution of symmetric atomic measures $2^{-1}(\delta_{-\beta^{-k}} + \delta_{\beta^{-k}})$.

One of the goals to study Bernoulli convolutions is to determine for which β they are absolutely continuous or purely singular. (By "the laws of pure type", ν_β is either absolutely coninuous or purely singular.) In 1939, Erdös showed against belief that ν_β is singular if β is a PV(Pisot-Vijayarghavan) number. In the opposite direction, the most general result has been proved by Solomyak in 1995 that ν_β is absolutely continuous for almost every $\beta > 1$. Surprisingly, no other example of singular Bernoulli convolutions than PV number cases has been found. It is an open question. Erdös' proof uses charasterictic functions but his method seems hard to apply beyond PV number cases. This fact has motivated many authors to try to find alternative methods. In this small talk, I'd like to talk about a criteria for the singularity of Bernoulli convolutions.

It is a classical point of view to see ν_β as an invariant measure for a random dynamical system since it satisfies a self-similar relation;

$$\nu_\beta(E) = \frac{1}{2}\nu_\beta(S_0^{-1}E) + \frac{1}{2}\nu_\beta(S_1^{-1}E)$$

where $S_0(x) = \beta^{-1}x - 1$ and $S_1(x) = \beta^{-1}x + 1$. Here we would like to see its inverse process F, wich is made of two expanding maps with an overlap. For our convenience, we work on an equivalent setting, which is the distribution of a random variable $Y(\omega) = (1-\beta^{-1})^{-1}\sum_{k=0}^{\infty} \omega_k \beta^{-k}$ on $\Omega = \{0,1\}^\infty$.

Let $J_0 = [1-\beta^{-1}, \beta^{-1}]$ and define *the first return times* $\tau : J_0 \times \Omega \to \mathbb{N}$ by

$$\tau(x,\omega) = \min\{k \geq 1; F^k(x,\omega) \in J_0\}.$$

If no such k exists, set $\tau = \infty$. Then we can define a new process $R : J \times \Omega \to J \times \Omega$, which we call *the first return process*, by

$$R(x,\omega) = F^{\tau(x,\omega)}(x,\omega)$$

where J is a subset of J_0 so defined that the iterations of R are well-defined.

Proposition 1. *For β some PV numbers and Salem numbers, ν_β is an invariant, ergodic measure for the first return process R.*

Definition 0.1. Let $\hat{\tau}$ be the expectation of the return times $\tau(x,\omega)$ by the product measure $\nu_\lambda \times P$;

$$\hat{\tau} = \int_{J\times\Omega} \tau(x,\omega)\nu(dx)P(d\omega).$$

Date: December 16,2004 at Osaka City University Hall.

Definition 0.2. A binary tree for which $x \in J$ is a starting point and vertices are possible images of x by R^k for all k, is called *x-tree.* The member of vertices which is an image by R^n is called *a descendant of generation n.*

Theorem 2. *If the following two conditions (A) and (B) are satisfied,*

(A) *For ν-a.e. $x \in J$,*

$$\lim_{k\to\infty} \frac{1}{n_k} \log \#\{\textit{descendants of generation } n_k \textit{ of } x\textit{-tree}\} = \frac{\log 2}{\hat{\tau}}.$$

(B)

$$\hat{\tau} < \frac{\log 2}{\log 2 - \log \beta},$$

then the Bernoulli convolution ν_β is singular.

So far we have just verified the conditons (A) and (B) for some PV numbers and only (B) for the simplest Salem number.

On Denjoy minimal systems

増井健一（大阪市立大学）　杉崎文亮（熊本大学）
吉田雅道（大阪市立大学）

まず $\alpha \in (0,1)$ を無理数とする．そのとき dual Ostrowski 展開より片側無限マルコフ空間 M_α が導かれ，その上の odometer τ_α (Vershik-Sidorov [?])，更に $\beta \in (0,1) \setminus (\mathbf{Z} + \mathbf{Z}\alpha)$ として，片側無限マルコフ空間 M_α^β とその上の odometer τ_α^β を導入する．

(S^1, φ) を S^1 上の一定角度の回転と位相共役でなく周期点を持たない向きを保つ自己同相とする． α を φ の回転数とする． R_α を角度 α の回転とすると，factor map $F : (S^1, \varphi) \to (S^1, R_\alpha)$ が存在して，単に $\mathrm{BO}(\varphi) \in \mathbf{N} \cup \{\infty\}$ が決まり $\{z \in S^1 \mid \#F^{-1}z \geq 2\} = \bigcup_{k=1}^{BO(\varphi)} \mathcal{O}_{R_\alpha}(z_k)$ (*disjoint*) となる $\{z_k\}$ がとれる．このときカントール集合 $X \subset S^1$ が極小集合として一意に存在する．T で φ の X への制限を表すとき，(X, T) を Denjoy minimal system という．Giordano-Putnam-Skau [?] によると，一意エルゴード的カントール極小系は full odometer または Denjoy minimal system のいずれかと軌道同値となる．更に軌道同値関係の不変量として次元群がある．

特に $\mathrm{BO}(\varphi) = 1, 2$ のときの Denjoy minimal system について考察する．ここで回転数を α とし，$z_1 = 0$, $z_2 = \beta$ とする．それぞれの場合について，Herman-Putnam-Skau [?] の方法によって adic 表示を得ることができ，更にそれぞれ (M_α, τ_α), $(M_\alpha^\beta, \tau_\alpha^\beta)$ と位相共役であることがわかる．またこの表示から次元群を計算することができる ($\{z_k\}$ が有理独立なときは Putnam-Schmidt-Skau [?] によって得られている)．さらに $\mathrm{BO}(\varphi) = 1$ のこの表示によって，Sturmian 列が得られる substitutions を導くことができる．同様に $\mathrm{BO}(\varphi) = 2$ の場合についてもこの表示から substitutions を構成し，それらによって導かれる列を 3 文字の Sturmian 列の一つの候補と考えられる．

References

[1] T. Giordano, I. F. Putnam and C. F. Skau, *Topological orbit equivalence and C^*-crossed products,* J. Reine Angew. Math. 469 (1995), 51-111.

[2] R. H. Herman, I. F. Putnam and C. F. Skau, *Ordered Bratteli diagrams, Dimension groups and topological dynamics,* Intern. J. Math. 3 (1992), 827-864.

[3] I. Puntnam, K. Schmidt and C. Skau, *C^*-algebras associated with Denjoy homeomorphisms of the circle,* J. Op. Th. 16 (1986), 99-126.

[4] A. M. Vershik and N. A. Sidorov, *Arithmetic expansions associated with a rotation of the circle and with continued fractions,* St. Petersburg Math. J. 5 (1994), 1121-1136

PRESSURES OF CANTOR MINIMAL SYSTEMS WITHIN A STRONG ORBIT EQUIVALENCE CLASS

杉崎　文亮

X をカントール集合, ϕ を X 上の同相写像で、極小 (minimal) に作用するものを考える。この位相力学系 (X,ϕ) をカントール極小力学系と呼ぶ。カントール極小力学系が作る強軌道同型類とエントロピーの関係について、次のことが知られている。

Theorem 1 ([S1],[S2],[S3]). 任意に選んだ $0 \leq c \leq \infty$ とカントール極小力学系 (X,ϕ) に対して、次の条件を満たすカントール極小力学系 (Y,ψ) が存在する。

- (X,ϕ) と (Y,ψ) は強軌道同型である。
- (Y,ψ) の（位相）エントロピー $h(\psi)=c$ となる。

特に c が有限の場合、(Y,ψ) として極小サブシフトと共役になるものを選べることが出来る。

この定理より強軌道同型という概念とエントロピーは互いに独立であることが分かる。ここで、強軌道同型とは以下の定義である。2 つの力学系 (X_1,T_1), (X_2,T_2) が軌道同型とは、同相写像 $F: X_1 \to X_2$ が存在して、任意の $x \in X_1$ に対して

$$\{F \circ T_1^k x \mid k \in \mathbb{Z}\} = \{T_2^k \circ Fx \mid k \in \mathbb{Z}\}$$

となることをいう。（この F を軌道同型写像と呼ぶ。）このとき 2 つの整数値関数 $m,n: X_1 \to \mathbb{Z}$ を任意の $x \in X_1$ に対して、$F \circ T_1 x = T_2^{n(x)} \circ Fx$ かつ $F \circ T_1^{m(x)} x = T_2 \circ Fx$ として定義する。この 2 つの力学系が強軌道同型とは、m,n が高々 1 点を除いて連続になることをいう。

本講演では位相圧力に関する上の結果の拡張について説明する。即ち以下の結果を得た。

Theorem 2 ([S4]). 任意に選んだカントール極小力学系 (X,ϕ) と X 上の連続関数 f、更に

$$\sup\left\{\int f d\mu \mid \mu\text{は } \phi\text{-不変確率測度}\right\} \leq c \leq \infty$$

を満たす実数 c に対して、次の条件を満たすカントール極小力学系 (Y,ψ) が存在する。

- (X,ϕ) と (Y,ψ) は強軌道同型である。
- (Y,ψ) の位相圧力 $P(\psi,\cdot)$ に対して $P(\psi, f\circ\theta^{-1}) = c$ となる。ここで $\theta: X \to Y$ は強軌道同型写像である。

特に c が有限の場合、(Y,ψ) として極小サブシフトと共役になるものを選べることが出来る。

よく知られている事実として f を恒等的に 0 である定数関数とすれば、$P(\psi,0)=h(\psi)$ になる為、定理 1 の拡張になっている。また定理 2 において c の取り得る値に制限があるが、実はこの範囲外では定理が成り立たないことが容易に分かる為、定理 2 の意味での定理 1 の拡張としては最良の結果といえる。

REFERENCES

[S1] F. Sugisaki, *The relationship between entropy and strong orbit equivalence for the minimal homeomorphisms* (I), Internat. J. Math. **14**, No. 7 (2003), 735–772

[S2] F. Sugisaki, *The relationship between entropy and strong orbit equivalence for the minimal homeomorphisms* (II), Tokyo J. Math. **21** (1998), 311–351

[S3] F. Sugisaki, *On the subshift within a strong orbit equivalence class for minimal homeomorphisms* preprint

[S4] F. Sugisaki, *Topological pressure of cantor minimal systems within a strong orbit equivalence class* preprint

熊本大学 大学院自然科学研究科
E-mail address: `sugisaki@math.sci.kumamoto-u.ac.jp`

Orbit equivalence and normalizers of Cantor minimal systems

湯浅 久利
九州大学 高等教育総合開発研究センター

カントル極小系 (X, φ) に対して, 点 $x \in X$ の φ による軌道を $\mathrm{Orb}_{\varphi}(x)$ と書く. X 上の同相写像全体を $\mathrm{Homeo}(X)$ で表す. (位相的) 軌道同型写像 $F : X \to Y$ の orbit cocycle が連続ならば flip conjugate になることは M. Boyle (1983) によって明らかにされた. T. Giordano-I. Putnam-C. Skau (1999) らによって充足群 $[[\varphi]]$, 位相的充足群 $[[\varphi]]$ はそれぞれ, 軌道同型, flip conjugacy の完全不変量になることが示された. $[\varphi], [[\varphi]]$ の正規化群もそれぞれ, 軌道同型, flip conjugacy の不変量になる. T. Giordano-I. Putnam-C. Skau (1999) らは Boyle (1983) の結果を使うことで $N[[\varphi]]$ の構造を調べ次の結果を得た.

命題 1. (1) $N[[\varphi]] = \langle [[\varphi]], C^{\epsilon}(\varphi) \rangle$,
ここで, $C^{\epsilon}(\varphi) = \{\gamma \in \mathrm{Homeo}(X) | \gamma\varphi = \varphi \circ \gamma \ or\ \varphi^{-1} \circ \gamma\}$;

(2) 次の系列は完全である.

$$0 \to \mathbb{Z} \xrightarrow{\iota} [[\varphi]] \rtimes C^{\epsilon}(\varphi) \xrightarrow{\pi} N[[\varphi]] \to 1,$$

ここで, $\iota(n) = (\varphi^{n}, \varphi^{-n}),\ n \in \mathbb{Z};\ \pi(\gamma, \eta) = \gamma\eta,\ \gamma \in [[\varphi]],\ \eta \in C^{\epsilon}(\varphi)$.

(3) 次の完全系列が存在する.

$$1 \to U(C(X)) \to \mathrm{Aut}_{C(X)}(C^{*}(X, \varphi)) \to N[[\varphi]] \to 1.$$

これらの結果を進める次の結果を講演者は得た (2004). 1番目の結果においてのみ M. Boyle (1983) のテクニックを使ったが他は全くのオリジナルである.

命題 2. (1) $N[\varphi]$ の元 γ で, $\gamma\varphi\gamma^{-1}(x) = \varphi^{k(x)}(x)\ \forall x \in X$ なる連続関数 $k : X \to \mathbb{Z}$ が存在するもの全体を $N[\varphi]_c$ とおくと, $N[\varphi]_c$ は $N[[\varphi]]$ の部分群になり, その結果 $N[\varphi]_c = N[[\varphi]]$ が成り立つ.

(2) $C(\varphi) \lhd C^{\epsilon}(\varphi)$.

(3) $[[\varphi]] \lhd N[[\varphi]]_1 \lhd N[[\varphi]]$.
ここで, $N[[\varphi]]_1 = \langle [[\varphi]], C(\varphi) \rangle$, $C(\varphi) = \{\eta \in \mathrm{Homeo}(X) | \eta\varphi = \varphi\eta\}$.

(4) $N[[\varphi]]_1$ の部分群 $C(\varphi)$ は正規部分群ではない.

(5) $N[[\varphi]] \cap [\varphi] = N[[\varphi]]_1 \cap [\varphi] = [[\varphi]]$. この結果, $[\varphi]$ の部分群 $[[\varphi]]$ は正規部分群ではないことが成立.

(6) 次の系列は完全である.

$$0 \to \mathbb{Z} \xrightarrow{\iota} [[\varphi]] \rtimes C(\varphi) \xrightarrow{\pi} N[[\varphi]]_1 \to 1$$

(7) 次の完全系列が存在する.

$$1 \to U_\varphi \to \mathrm{Aut}_{C(X)}(C^*(X,\varphi))_1 \to N[[\varphi]]_1 \to 1.$$

2次元開散乱撞球系の temporal distance function について

広島大学・大学院理学研究科　盛田 健彦

J を 3 以上の整数とする．$Q_1, Q_2, \ldots, Q_J$ は少なくとも C^3 級の境界 $\partial Q_1, \partial Q_2, \ldots, \partial Q_J$ をもつ R^2 の有界領域で，次の二つの条件をみたすものと仮定する．

(H.1) (散乱条件(dispersing condition)) 各 j に対して領域 Q_j の境界 ∂Q_j はいたるところ正の曲率をもつ．

(H.2) (無食条件(no eclipse condition) どのような相異なる添字の 3 つ組 (j_1, j_2, j_3)に対しても $\mathrm{conv}(\overline{Q_{j_1}} \cup \overline{Q_{j_2}}) \cap \overline{Q_{j_3}} = \emptyset$ が成り立つ．ここで，$\mathrm{conv}(A)$ は，集合 A の凸包を表す．

$Q = \mathrm{R}^2 \setminus \bigcup_{j=1}^{J} \overline{Q_j}$ を考える．我々が扱う撞球系(撞球流)は，一言でいえば，「ユークリッド空間 R^2 の境界付きの部分多様体 $\overline{Q}$ 上の測地流で，境界では幾何光学の反射法則に従うもの」のことである．撞球系は S^t で表すことにしよう．

$S\mathrm{R}^2 = \mathrm{R}^2 \times S^1$ を R^2 の単位接バンドルとし，$\pi : S\mathrm{R}^2 \to \mathrm{R}^2 ; (q, v) \mapsto q$ を自然な射影とすると，撞球系 S^t の相空間 M は $M = \pi^{-1}(Q) \cup (\pi^{-1}(\partial Q)/\sim)$, と表すことができる．ただし，$(q, v), (p, w) \in \pi^{-1}(\partial Q)$ に対して，$(q, v) \sim (p, w)$ は $q = p$ かつ $w = v - 2\langle v, n(q)\rangle n(q)$ が成り立つことを意味する．すなわち，入射状態と反射状態を同一視するわけである．したがって，反射状態を代表元に選ぶことで，$M = \pi^{-1}(Q) \cup M^+$ (ただし，$M^+ = \{x = (q, v) : q \in \partial Q, \langle v, n(q)\rangle \geq 0\}$) とみなすことができる．

撞球系 S^t の nonwandering set Ω は $\pi(S^t x) \in \partial Q$ が，無限個の $t > 0$ と無限個の $t < 0$ に対して成り立つような $x \in M$ の全体に一致する．$\Omega^+ = \Omega \cap M^+$ とおき，Ω^+ への first return time $t^+ : \Omega^+ \to \mathrm{R}$ と first return map $T : \Omega^+ \to \Omega^+$ をそれぞれ $t^+(x) = \inf\{t > 0 : S^t x \in M^+\}$, $Tx = S^{t^+(x)}x$, $(x \in \Omega^+)$ で定義する．Tは撞球変換とも呼ばれる．位相力学系(Ω^+, T) は位相的混合性をもち，S^t は，それを底変換とし，t^+ を天井関数とする suspension flow として表現できる．

$x \in \Omega^+$ に対しては，C^2 級の局所安定曲線(resp. 局所不安定曲線) $W^s(x, .T)$ (resp. $W^u(x, .T)$)が存在し，Ω^+ は双曲構造をもつことが知られている．$W^s(x, .T)$ (resp. $W^u(x, .T)$)は，未来(resp. 過去)において，同じ順序で同じ Q の連結成分に衝突する Ω^+ の点全体に他ならない．$x, y \in \Omega^+$ を同一の M^+ の連結成分に属する点とすると，$W^s(x, .T)$ と $W^u(y, .T)$ はただ一つの点で交わる．この点を $[y, x]$ で表す．

撞球系 S^t の temporal distance function $\varphi : \Omega^+ \times \Omega^+ \to \mathrm{R}$ は

$$\varphi(x,y) = \Delta^+([y,x],x) + \Delta^-([y,x],y) + \Delta^+([x,y],y) + \Delta^-([x,y],x)$$

と定義される．ただし，

$$\Delta^+(z,w) = \sum_{n=0}^{\infty}(t^+(T^n z) - t^+(T^n w)),$$

$$\Delta^-(z,w) = \sum_{n=1}^{\infty}(t^+(T^{-n} z) - t^+(T^{-n} w)).$$

である．一般に，temporal distance function は，大雑把な言い方ではあるが，流れの非可積分性を計る尺度の一つとして扱われる．直観的にはその値域が数集合として複雑であればあるほど，対応する流れの軌道は複雑となり，適当な不変測度に関する混合性が高まり，自己相関係数の減衰が速くなる．本講演では，以下の結果を得たことを報告する．

定理 S^t を (H.1)，(H.2) をみたす 2 次元開撞球系とし，Ω^+ でそれに対応する撞球変換 の nonwandering set を，φ は撞球系 S^t の temporal distance function を表すとする．このとき，

$$\dim_H(\varphi(\Omega^+ \times \Omega^+)) \geq \frac{1}{2}\dim_H(\Omega^+) > 0$$

が成立する．ここで $\dim_H(A)$ は，集合 A のHausdorff 次元を表す．

したがって，Dolgopyat 氏による rapid mixing に関する十分条件([1] 参照)がみたされて以下を得る．

系 (H.1)，(H.2) をみたす 2 次元開撞球系は，rapid mixing である．

講演では，この事実と撞球台 $\overline{Q}$ の length spectrum に関するゼータ関数の性質の関係についても触れる．

1 D. Dolgopyat Prevalence of rapid mixing in hyperbolic flows Ergod. Th. Dynam. Sys. 18 1998 1097-1114

Diffeomorphisms Admitting Physical Measures and Its Regularity

Jin Hatomoto *

Abstract

In this report, firstly we obtain the properties of C^2-diffeomorphisms of the 2-dimensional torus ^{2} which admit measures satisfying SRB condition. Secondly, in view of the regularity, we construct the examples of $C^{1+\alpha}$-diffeomorphisms admitting measures satisfying SRB condition.

1 Introduction

Let f be a $C^{1+\alpha}$-diffeomorphism of $\mathbb{T}^2$. We denote by $d(\cdot,\cdot)$ and $\|\cdot\|$ the distance and the norm induced by the Riemannian metric $\langle\cdot,\cdot\rangle$ on M respectively.

We say that f is *partially hyperbolic with contracting direction* if there exist $C > 0$ and $0 < \lambda_1 < \lambda_2$ with $\lambda_1 < 1$ such that each $x \in \mathbb{T}^2$ has a $D_x f$-invariant decomposition $\mathrm{T}_x\mathbb{T}^2 = \oplus_{i=1}^2 E_i(x)$ into subspaces $E_i(x)$ which satisfy the following properties:

$$\|D_x f|_{E_1(x)}\| \le \lambda_1,$$
$$\|D_x f|_{E_2(x)}\| \ge \lambda_2.$$

Here $D_x f$ denotes the derivative of f at x.

f is said to be *topologically transitive* if there exists a point $x \in \mathbb{T}^2$ such that its orbit $\{f^n(x)\}_{n\in}$ is dense in $\mathbb{T}^2$.

Let μ be an f-invariant ergodic measure on $\mathbb{T}^2$. By [?], there exists a set Y_μ with full μ-measure and $\chi_1 \le \chi_2$ such that each $x \in Y_\mu$ has a $D_x f$-invariant decomposition $\mathrm{T}_x\mathbb{T}^2 = \oplus_{i=1}^2 E_i(x)$ into subspaces $E_i(x)$ which satisfy the following properties:

$$\lim_{n\to\pm\infty} \frac{1}{n} \log \|D_x f^n|_{E_i(x)}\| = \chi_i.$$

We call χ_i $(i = 1, 2)$ the *Lyapunov exponents* of μ at $x \in Y_\mu$. We say that μ satisfies *SRB condition* if (i) μ has positive and negative Lyapunov exponents and (ii) μ has absolutely continuous conditional measures w.r.t.the Lebesgue measures on unstable manifolds(see [?]).

Theorem A . Let f be a C^2-diffeomorphism of $\mathbb{T}^2$. Then f is an Anosov diffeomorphism if and only if the following conditions hold:

(1) f is partilally hyperbolic with contracting direction,

(2) f is topologically transitive and

(3) f preserves a measure μ satisfying SRB condition.

In Theorem A, it is important that f is of class C^2. In the case when f is of $C^{1+\alpha}$ ($\alpha \in (0,1)$), Theoerm A is false. In fact, we have the following example of a $C^{1+\alpha}$-diffeomorphism g_α of $\mathbb{T}^2$: There exists a fixed point p, $0 < \lambda < 1$ and $\varepsilon > 0$ such that

*Department of Mathematics, Tokyo Metropolitan University, e-mail : hatomoto-jin@c.metro-u.ac.jp

Condition 1.

$$\|D_x g_\alpha|_{E_1(x)}\| \leq \lambda_1, \quad \|D_x g_\alpha|_{E_2(x)}\| \begin{cases} = 1 & (x = p), \\ > 1 & (x \neq p), \end{cases}$$

Condition 2. We set $W^u_\varepsilon(x) = \{y \in \mathbb{T}^2 \mid d(g_\alpha^{-n}(x), g_\alpha^{-n}(y)) \leq \varepsilon, (n \geq 0)\}$, say the *local unstable manifold* at x, $W^u_\varepsilon(x)$ is a C^2-embedding submanifold for any $x \in \mathbb{T}^2$ and W^u-foliation is C^2-continuous, that is, the correspondence $x \mapsto W^u_\varepsilon(x)$ is C^2-continuous,

Condition 3. The graph of $g_\alpha|_{W^u_\varepsilon(p)}$ can be represented as

$$g_\alpha|_{W^u_\varepsilon(p)}(x) = \begin{cases} x + x^{1+\alpha} & (x \geq 0), \\ x - |x|^{1+\alpha} & (x < 0). \end{cases}$$

Theorem B . For $\alpha \in (0,1)$ (g_α is $C^{1+\alpha}$), g_α satisfies the followings:

(1) g_α is partially hyperbolic with contracting direction and is not an Anosov diffeomorphism,

(2) g_α is topologically transitive,

(3) g_α admits a measure satisfying SRB condition.

References

[1] N.Aoki, *The Series of Nonlinear Analysis*, I, II, III, IV, in Japanese, Kyoritu Publ. 2004.

[2] H.Hu and L.-S.Young, *Nonexistence of SBR measures for some diffeomorphisms that are 'Almost Anosov'*, Ergod. Th. and Dynam. Sys. **15** (1995), 67-76.

[3] Y.I.Oseledec, *A multiplicative ergodic theorem, Lyapunov characteristic numbers for dynamical systems*, Trudy Moskov Mat. Ostc. **19** (1968), 179-210.

LARGE DEVIATIONS FOR UNIMODAL MAPS SATISFYING THE COLLET-ECKMANN CONDITION

YONG MOO CHUNG

Let I be the compact interval $[0,1]$ of the real line $\boldsymbol{R}$. We denote by $\mathscr{M}$ the space of the Borel probability measures on I equipped with the weak topology and by m Lebesgue measure.

An *unimodal map* is a C^1 map $f : I \to I$ such that $f(0) = f(1) = 0$ and the derivative f' is positive on the interval $[0, c)$ and negative on the interval $(c, 1]$ for some point $c \in (0,1)$. The point c is called *the critical point* of f. The critical point c is *non-flat* if there exist an integer $l > 1$ and a C^1 function $M : I \to (0, \infty)$ such that $|f'(x)| = M(x)|x - c|^{l-1}$ holds for all $x \in I$. An *S-unimodal map* is a C^2 unimodal map f satisfying the following conditions: The critical point c is non-flat; $|f'|^{-1/2}$ is convex on the intervals $[0, c)$ and $(c, 1]$; $|f'(0)| > 1$. We say that an S-unimodal map f satisfies *the Collet-Eckmann condition* if

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log |(f^n)'(f(c))| > 0.$$

Let $f : I \to I$ be an S-unimodal map satisfying the Collet-Eckmann condition. Considering the renormalization if necessary, we assume that f also satisfies the following topological mixing condition: for any non-trivial interval $K \subset I$ there is an integer $k \geq 0$ such that $f^k(K) \supset [f^2(c), f(c)]$.

We say that *the large deviation principle* holds for f if there is an upper semi-continuous function $q : \mathscr{M} \to [-\infty, 0]$, called *the rate function,* satisfying

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log m\{x \in I : \delta_x^n \in \mathscr{G}\} \geq \sup_{\mu\in\mathscr{G}} q(\mu)$$

for any open set $\mathscr{G} \subset \mathscr{M}$, and

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log m\{x \in I : \delta_x^n \in \mathscr{C}\} \leq \max_{\mu\in\mathscr{C}} q(\mu)$$

for any closed set $\mathscr{C} \subset \mathscr{M}$, where $\delta_x^n := \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} \delta_{f^i(x)} \in \mathscr{M}$ denotes the empirical distribution along the orbit of f through x. The first result of this talk is the following:

Theorem 1. *The large deviation principle holds for f. The rate function $q : \mathscr{M} \to [-\infty, 0]$ is given by the upper regularization of F,*

$$F(\mu) := \begin{cases} h_\mu(f) - \displaystyle\int \log |f'| d\mu & \text{for } \mu \in \mathscr{M}_f, \\ -\infty & \text{otherwise,} \end{cases}$$

where $\mathscr{M}_f$ denotes the set of all f-invariant Borel probability measures on I and $h_\mu(f)$ the metric entropy of $\mu \in \mathscr{M}_f$.

Date: December 17, 2004 at Osaka City University .

Corollary . 1. (Abelian theorem of exponential type) *For any* $\varphi \in C(I)$

$$P(\varphi) := \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \int \exp\left\{-\sum_{i=0}^{n-1} \varphi \circ f^i\right\} dm$$

exists, where $C(I)$ *denotes the space of the continuous functions on* I.

2. (Variational principle of Gibbs type) *For any* $\varphi \in C(I)$

$$P(\varphi) = \max_{\mu\in\mathscr{M}_f} \left\{q(\mu) - \int \varphi\, d\mu\right\} = \sup_{\mu\in\mathscr{M}_f} \left\{F(\mu) - \int \varphi\, d\mu\right\},$$

and for any $\mu \in \mathscr{M}_f$

$$F(\mu) \leq q(\mu) = \min_{\varphi\in C(I)} \left\{P(\varphi) + \int \varphi\, d\mu\right\}$$

hold, respectively.

A point $x \in I$ is called *quasiregular* for f if $\mu_x := \lim_{n\to\infty} \delta_x^n$ exists. We denote by $QR(f)$ the set of all quasiregular points for f. The second result of this talk is the following:

Theorem 2. *Let* $r : \mathscr{M} \to [0,1]$ *be the upper regularization of* r_0 *defined by*

$$r_0(\mu) := \begin{cases} \dfrac{h_\mu(f)}{\int \log|f'|d\mu} & \text{for ergodic } \mu \in \mathscr{M}_f, \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

Then

$$\sup_{\mu\in\mathrm{int}\mathscr{A}} r(\mu) \leq \dim_H\{x \in QR(f) : \mu_x \in \mathscr{A}\} \leq \max_{\mu\in\mathrm{cl}\mathscr{A}} r(\mu)$$

holds for any non-empty set $\mathscr{A} \subset \mathscr{M}$, *where* $\dim_H A$ *denotes the Hausdorff dimension,* $\mathrm{int}A$ *the interior and* $\mathrm{cl}A$ *the closure of a set* A, *respectively.*

Corollary (Estimates of dimension spectra). 1. *For any* $\varphi \in C(I)$ *and* $t \in \boldsymbol{R}$

$$\begin{aligned} \sup\left\{r_0(\mu) : \int \varphi\, d\mu = t\right\}^+ &\leq \dim_H\left\{x \in I : \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} \varphi(f^i(x)) = t\right\} \\ &\leq \max\left\{r(\mu) : \int \varphi\, d\mu = t\right\}^+ \end{aligned}$$

holds, where $a^+ := \max\{a, 0\}$.

2. *For any* $t \in \boldsymbol{R}$

$$\begin{aligned} \sup\left\{r_0(\mu) : \int \log|f'|\, d\mu = t\right\}^+ &\leq \dim_H\left\{x \in I : \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log|(f^n)'(x)| = t\right\} \\ &\leq \max\left\{r(\mu) : \int \log|f'|\, d\mu = t\right\}^+ \end{aligned}$$

holds.

Remark

$$\dim_H(I \setminus QR(f)) = 1 \quad \text{although} \quad m(I \setminus QR(f)) = 0.$$

Department of Applied Mathematics, Hiroshima University
E-mail address: chung@amath.hiroshima-u.ac.jp

Ergodic theory and Sample path

Keizo Takashima
Dept.of Applied Math., Okayama Univ. of Science
e-mail : takashim@xmath.ous.ac.jp

Dec., 18, 2004

We first briefly report about the sample path properties of ergodic self-similar processes, based on the results of

Sample path properties of ergodic self-similar processes, Osaka Journal of Math., 1989,

and we emphasize the usefulness of scaling operator $S_a^\kappa X(t) = a^{-\kappa} X(a\,t)$, $t > a$, $a > 0$, and $\kappa > 0$, in researches of sample path properties of a κ-self similar process $X(t)$.

Secondly, we discuss the case of pseudo-random number generations and quasi-random number generations, from the viewpoint of applications of ergodic theory. There are already some researches on such topics, especially by Prof. M.Mori with respect to quasi-random numbers by calculating Perron-Frobenius operator, and also by Prof. Yaguchi with respect to pseudo-random numbers.

There are, however, no research on pseudo-random number generators, such as Mersenne twister, m-sequences, additive number generators, nybrid pseudo-random number generators, and so on. We discuss the probelems in researches on calculations and applications of Perron-Frobenius operator for such pseudo-random number generations and quasi-random number generations.

Ergodicity of some skew products of Jacobi-Perron algorithm

仲田　均（慶應義塾大学）
(joint work with V. Berthé and R. Natsui)

$[0, 1)^d$ 上の変換 T を次のように定義する：

$$T(\mathbf{x}) = \left(\frac{x_2}{x_1} - \left[\frac{x_2}{x_1}\right], \frac{x_3}{x_1} - \left[\frac{x_3}{x_1}\right], \dots, \frac{x_d}{x_1} - \left[\frac{x_d}{x_1}\right], \frac{1}{x_1} - \left[\frac{1}{x_1}\right]\right)$$

このとき、

$$a_i := \left[\frac{x_{i+1}}{x_1}\right], \quad \text{for} \quad 1 \le i \le d, \qquad \text{and} \quad a_d := \left[\frac{1}{x_1}\right]$$

とおく。さらに、

$$A(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & a_1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & a_2 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a_3 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & a_d \end{pmatrix}$$

として (d+1) 次行列を定義する。行列の積 $A(\mathbf{x}) \cdot A(T\mathbf{x}) \cdots A(T^{n-1}\mathbf{x})$ の第 (d+1) 列を

$$\begin{pmatrix} P_1^{(n)} \\ P_2^{(n)} \\ \vdots \\ P_d^{(n)} \\ Q^{(n)} \end{pmatrix}$$

と表し、

$$\left(\frac{P_1^{(n)}}{Q^{(n)}}, \dots, \frac{P_d^{(n)}}{Q^{(n)}}\right)$$

を Jacobi-Perron algorithm による第 n 近似分数とよぶ。
整数 $m \ge 2$ に対して

$$G(m) = \begin{cases} SL(d+1, \mathbb{Z}_m) & \text{if } d \text{ is even} \\ \{A \in GL(d+1, \mathbb{Z}_m) : \det = \pm 1\} & \text{if } d \text{ is odd} \end{cases}$$

とする。次に T の群拡大を以下のように考える。

$$T_G(\mathbf{x},\, g) = (T\mathbf{x},\, g \cdot A(\mathbf{x}))$$

for $(\mathbf{x},\, g) \in ([0,1)^d \times G(m))$. ここで、$\mu$ を T の絶対連続不変確率測度、δ を $G(m)$ 上の elements の個数を数える counting measure とすると $\mu \times \delta$ は T_G- invariant measure である。

Theorem $(T_G,\, \mu \times \delta)$ はエルゴード的である。

証明は density theorem と $A(\mathbf{x})$ の形の行列全体が $G(m)$ を生成することから従う。

このことから以下の性質が得られる。

$$K_m := \{(s_1,\, s_2,\, \ldots\, ,\, s_{d+1}) : 0 \le s_i < m,\ 1 \le i \le d+1,\ (s_1,\, s_2,\, \ldots\, ,\, s_{d+1}, 1) = 1\}$$

とする。K_m は $\mathbb{Z}_m^{d+1}$ の elements で、成分の生成する部分群が $\mathbb{Z}_m$ となるものの全体と同一視できる。

Corollary ほとんどすべての $\mathbf{x} \in [0,1)^d$ に対して、

$$\{(P_1^{(n)},\, P_2^{(n)},\, \ldots\, ,\, P_d^{(n)},\, Q^{(n)}) : n \le 1\}$$

は K_m 上で一様に分布している。

確率解析とその周辺

2004年度の「確率解析とその周辺」シンポジウムは以下のプログラムで大阪大学で開催された。出席者は31名。なお、予稿等詳細は Web Site
http://www.math.kyoto-u.ac.jp/probability/sympo/SA04.html を参照。

日時: 2005年1月7日(金)～1月9日(日)
場所: 大阪大学基礎工学部シグマホールディスプレイ室

Program

January 7

13:20–14:10　Ichiro Shigekawa (Kyoto University)
Schrödinger operators on the Wiener space

14:20–15:10　Kazumasa Kuwada (Kyoto University)
Laplace approximation for stochastic line integrals

15:40–16:30　Minoru W. Yoshida (The University of Electro-Communications)
Homogenization of diffusions on the lattice Z^d with periodic drift coefficients; Application of logarithmic Sobolev inequality (with S. Albeverio, M. S. Bernabei and M. Röckner)

January 8

10:00–10:50　Shigeki Aida (Osaka University)
Semiclassical limit of the lowest eigenvalue of Schrödinger operators in path spaces over Riemannian manifolds

11:00–11:50　Zdzislaw Brzeźniak (The University of Hull)
Stochastic nonlinear beam equation

13:20–14:10　Naoki Heya (The University of Tokyo)
Hypoellipticity in infinite dimensions

14:20–15:10　Kazuhiro Kuwae (Kumamoto University)
Kato class measures under heat kernel estimate (with M. Takahashi)

15:40–16:30　Short Communications

January 8

10:00–10:50　Masanori Hino (Kyoto University)
A trace theorem for Dirichlet forms on fractals (with T. Kumagai)

11:00–11:50　Zdzislaw Brzeźniak (The University of Hull)
Asymptotic compactness and absorbing sets for stochastic Burgers equations driven by space time white noise and for some 2D stochastic Navier-Stokes equations on certain unbounded domains

世話人：　会田 茂樹　(大阪大学基礎工学研究科)
　　　　　重川 一郎　(京都大学理学研究科)

[5] 外国人招聘成果報告
平成 14 年度

(1) Mu-Fa CHEN

所属： Department of Mathematics, Beijing Normal University,China
職： Professor
E-mail： mfchen@email.bnu.edu.cn

A. 国内での滞在日程

平成 14 年 7 月 16 日 日本到着，到着空港名，成田空港 (新東京国際空港), CA 925 13:50
平成 14 年 7 月 16 日–7 月 26 日 湘南国際村センター（用務：下記研究集会に出席）
平成 14 年 7 月 26 日–7 月 30 日 京都大学（用務：下記研究集会に出席）
平成 14 年 7 月 30 日 離日，出国空港名，関西国際空港, CA152 15:25

B. 講演報告

研究集会名： 第 11 回日本数学会国際研究集会「大規模相互作用系に関する確率解析」(Stochastic Analysis on Large Scale Interacting Systems)
場所： 神奈川県葉山湘南国際村センター
日時： 平成 14 年 7 月 26 日 (金) 10:30–11:30
題名： Ten explicit criteria of one-dimensional processes

講演内容： 1 次元確率過程について，次の 10 の観点から論じた．(1) 指数的 L^2-収束（Poincaré 不等式）(2) 指数的エルゴード性 (3) 強エルゴード性 (4) 指数的 L^1-収束 (5) 対数型 Sobolev 不等式 (6) 本質的スペクトルの不在 (7) Nash 不等式 (8) 再帰性 (9) 正再帰性（エルゴード性）(10) 確率過程の一意性．

研究集会名： Stochastic Analysis and Statistical Mechanics (京都大学数理解析研究所 (プロジェクト研究) 共同研究集会)
場所： 京都大学基礎物理学研究所
日時： 平成 14 年 7 月 29 日 (月) 16:00–17:00
題名： Variational formulas of Poincaré-type inequalities in Banach spaces of functions
on the line

講演内容： 1 次元の有界区間上で，変数係数をもつ 2 階の微分作用素を考える．このとき，対応する Poincaré 不等式はよく知られているが，その不等式において関数 f の L^2-ノルムを Banach または Orlicz ノルムに一般化するという問題について論じた．対数型 Sobolev 不等式はその一例である．

C. 招聘の成果報告

M.-F. Chen 教授は，統計力学と関係して現れる相互作用系，特にそのエルゴード性について重要な貢献をしてきた専門家である．カップリング等の確率論固有の方法に加え，偏微分方程式や関数解析学の方法と問題意識をもって確率論・解析学の多様な問題を研究している．特に最近は 1 次元確率過程に関しその応用を踏まえた深い結果を出している．今回，2 つの国際研究集会「大規模相互作用系に関する確率解析」(平成 14 年 7 月 17 日–7 月 26 日) および「Stochastic Analysis and Statistical Mechanics」(平成 14 年 7 月 29 日–7 月 30 日) の開催を機に，そのテーマと深い関わりをもつ同教授を招聘した．同教授の滞在中に，最新の研究内容について討論し合えたのは，大変有意義であったと考えている．

D. 参考論文

1. *Ten explicit criteria of one-dimensional processes*, In the Proceedings of Shonan/Kyoto meetings “Stochastic Analysis on Large Scale Interacting Systems” (2002) edited by T.

Funaki and H. Osada, Advanced Studies in Pure Mathematics, **39** (2004), 89–114, Mathematical Society of Japan.
2. *Variational formulas of Poincaré-type inequalities in Banach spaces of functions on the line*, Acta Math. Sin. (Engl. Ser.), **18** (2002), 417–436.
3. *From Markov Chains to Nonequilibrium Particle Systems*, World Scientific Publishing Co., 1992. x+550 pp.

(2) Jean-Dominique DEUSCHEL

所属： Technische Universität Berlin, Germany
職： Professor
E-mail： deuschel@math.tu-berlin.de

A. 国内での滞在日程

平成 14 年 7 月 20 日 日本到着，到着空港名，成田空港 (新東京国際空港), LX0168 8:50
平成 14 年 7 月 20 日–7 月 26 日 湘南国際村センター（用務：下記研究集会に出席）
平成 14 年 7 月 27 日 離日，出国空港名，成田空港 (新東京国際空港), LX0169 12:00

B. 講演報告

研究集会名： 第 11 回日本数学会国際研究集会「大規模相互作用系に関する確率解析」(Stochastic Analysis on Large Scale Interacting Systems)
場所： 神奈川県葉山湘南国際村センター
日時： 平成 14 年 7 月 23 日 (火) 10:30–11:30
題名： The dynamic of entropic repulsion

講演内容： 剛体壁上のランダムな界面の運動が $\nabla\varphi$ Ginzburg-Landau モデルによって与えられているとする．すなわち，界面の高さ変数 $\phi_t = \{\phi_t(x) \geq 0, x \in \mathbb{Z}^d\}$ は Skorohod 型の確率微分方程式系の解である．ただし，ポテンシャル V は真に凸とする．これは，舟木と Olla によって導入されたモデルで，流体力学極限・対応する揺動問題についての考察がある．本講演では，そのエントロピー的反発について論じた．つまり，初期分布は有限な分散をもつ *i.i.d.* として，$d \geq 3$ では高さ変数は $t \to \infty$ のとき $\phi_t(x) = O(\sqrt{\log t})$, $d = 2$ では $\phi_t(x) = O(\log t)$ と振舞うことが示された．証明には，サイズ $\sqrt{t}$ の有限系とのカップリング，平衡状態（零質量 Gibbs 場）に対するエントロピー的反発の結果を用いることが述べられた．

C. 招聘の成果報告

J.-D. Deuschel 教授は大偏差原理に関する著名な著書をもつ確率論研究者である．近年は，界面モデルの平衡系に関する研究を進め，エントロピー的反発・濡れ転移・大偏差原理による Wulff 形状の導出などについて目覚しい成果を次々に上げている．一方，我が国では同様のモデルの時間発展について深い研究が進められている．このような時期に，同教授を国際研究集会「大規模相互作用系に関する確率解析」(平成 14 年 7 月 17 日–7 月 26 日) の開催を機に招聘し，界面モデルについての講義を依頼し同時に議論を重ねることができたのは，大変有意義であったと考えている．

D. 参考論文

1. (with T. Nishikawa) *The dynamic of entropic repulsion*, preprint, 2004.
2. (with E. Bolthausen, G. Giacomin) *Entropic repulsion and the maximum of the two-dimensional harmonic crystal*, Ann. Probab., **29** (2001), 1670–1692.
3. (with G. Giacomin) *Entropic repulsion for massless fields*, Stoch. Proc. Appl., **89** (2000), 333–354.

(3) Claudio LANDIM

所属： IMPA, Brasil
職： Professor
E-mail： landim@impa.br

A. 国内での滞在日程

平成 14 年 7 月 16 日 日本到着，到着空港名，成田空港 (新東京国際空港), JL047 12:50
平成 14 年 7 月 16 日–7 月 26 日 湘南国際村センター（用務：下記研究集会に出席）
平成 14 年 7 月 26 日–7 月 30 日 京都大学（用務：下記研究集会に出席）
平成 14 年 7 月 31 日 離日，出国空港名，成田空港 (新東京国際空港), JL048 19:00

B. 講演報告

研究集会名： 第 11 回日本数学会国際研究集会「大規模相互作用系に関する確率解析」(Stochastic Analysis on Large Scale Interacting Systems)
場所： 神奈川県葉山湘南国際村センター
日時： 平成 14 年 7 月 24 日 (水) 10:30–11:30
題名： Superdiffusivity of asymmetric exclusion process in dimensions one and two

講演内容： 非対称排他過程（格子気体）の拡散係数が，1 次元では $t^{1/4}$ のオーダーで，2 次元では $(\log t)^{1/2}$ のオーダーでそれぞれ発散することを示した．結果は，最近接および非最近接の非対称排他過程について成立する．

研究集会名： Stochastic Analysis and Statistical Mechanics (京都大学数理解析研究所 (プロジェクト研究) 共同研究集会)
場所： 京都大学基礎物理学研究所
日時： 平成 14 年 7 月 29 日 (月) 13:30–14:30
題名： Occupation time large deviations of two dimensional symmetric simple exclusion process

講演内容： 2 次元の単純かつ対称な排他過程の，各格子点上の滞在時間に関する大偏差原理を示した．確率の減衰率は $t/\log t$ のオーダーであり，rate function は $\Upsilon_\alpha(\beta) = (\pi/2)\{\sin^{-1}(2\beta - 1) - \sin^{-1}(2\alpha - 1)\}^2$ で与えられる．証明では，まず polar な経験分布に対する大偏差原理を示し，その後大偏差原理に対する縮約原理を用いればよいことが述べられた．

C. 招聘の成果報告

Landim 教授は流体力学極限の問題に関連した多様な研究をしている新進気鋭の確率論研究者である．流体力学極限の最近の成果をまとめた著書があり，この分野についての全般的な視野と最新の結果についての深い理解を持っている．今回，2 つの国際研究集会「大規模相互作用系に関する確率解析」(平成 14 年 7 月 17 日–7 月 26 日) および「Stochastic Analysis and Statistical Mechanics」(平成 14 年 7 月 29 日–7 月 30 日) の開催を機に，そのテーマと深い関わりをもつ同教授を招聘し，最新の研究内容について討論し合えたのは，非常に有意義であったと考えている．

D. 参考論文

1. (with S. Olla, S.R.S. Varadhan) *Diffusive behaviour of the equilibrium fluctuations in the asymmetric exclusion processes*, In the Proceedings of Shonan/Kyoto meetings "Stochastic Analysis on Large Scale Interacting Systems" (2002) edited by T. Funaki and H. Osada, Advanced Studies in Pure Mathematics, **39** (2004), 307–324, Mathematical Society of Japan.
2. (with C.-C. Chang, T.-Y. Lee) *Occupation time large deviations of two-dimensional symmetric simple exclusion process*, Ann. Probab., **32** (2004), 661–691.
3. (with C. Kipnis) *Scaling Limits of Interacting Particle Systems*, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, **320**, Springer-Verlag, Berlin, 1999. xvi+442 pp.

(4) Henry P. MCKEAN

所属： Courant Institute of Mathematical Sciences, New York, U.S.A.
職： Professor
E-mail： mckean@cims.nyu.edu

A. 国内での滞在日程

8月29日　　関西空港着
9月4日　　国際研究集会「International Symposium on
～9月7日　　Stochastic Analysis and Related Topics」に参加・講演
9月8日　　関西空港発

B. 講演報告

場所：国立京都国際会館　Room E
日時：9月7日 10:00–10:50
題名：Probability and the Nonlinear Schrödinger Equation
シンポジウム名（あるいはセミナー名）：International Symposium on Stochastic Analysis and Related Topics
（シンポジウムのプログラムについては別紙参照.）
講演内容：次の偏微分方程式の解 Q, P で周期1の周期関数であるものを考える.

$$\begin{aligned}\frac{\partial Q}{\partial t} &= -\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + (Q^2+P^2)P = \frac{\partial H_3}{\partial P}\\ \frac{\partial P}{\partial t} &= +\frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} - (Q^2+P^2)Q = -\frac{\partial H_3}{\partial Q}\end{aligned}$$

ただし，Hamiltonian は

$$H_3 = \frac{1}{2}\int_0^1 [(Q')^2 + (P')^2] + \frac{1}{4}\int_0^1 (Q^2+P^2) \tag{1}$$

で与えられるものとする．上の偏微分方程式を（周期境界条件付きの）defocussing cubic Schrödinger system といい，これによって決まる Q, P を defocussing flow という．本講演では，このような Schrödinger 方程式系と最後に述べる focussing cubic Schrödinger system の解やその ensemble について，確率過程との関係を交えた研究報告がなされた.

Q, P から Dirac 曲線の Jacobi 多様体への写像をうまく構成することにより，Q, P の複雑な flow を Jacobi 多様体上の等速直線運動に変換することができ，これにより flow の可積分性を得ることができる．さらにこれを用いて，形式的に

$$e^{-H_3} d^\infty Q d^\infty P = \frac{e^{-\frac{1}{2}\int_0^1 (Q')^2}}{(2\pi 0_+)^{\infty/2}} d^\infty Q \frac{e^{-\frac{1}{2}\int_0^1 (P')^2}}{(2\pi 0_+)^{\infty/2}} \times e^{-\frac{1}{4}}\int_0^1 (Q^2+P^2)^2$$

と表される petit ensemble のさまざまな表現を与えることができる.

Q, P が周期 L を持つとして，$L \uparrow \infty$ としたときの petit ensemble $e^{-H_3} d^\infty Q d^\infty P$ の熱力学極限も得られる．Ψ を $\mathbf{R^2}$ 上の $-\Delta/2 + r^4/4$ の grand state（ただし $\Delta = \partial^2/\partial Q^2 + \partial^2/\partial P^2$, $r = \sqrt{Q^2+P^2}$）とするとき，$[Q(x), P(x)]$, $x \in \mathbf{R}$ の分布は，$\Delta/2 + (\mathrm{grad}\Psi/\Psi)\mathrm{grad}$ を生成作用素に持つ定常拡散過程の分布に収束する（以上，参考文献 1., 2., 4. 参照）.

最後に Hamiltonian を (1) から以下のように変えた場合を考える.

$$\frac{1}{2}\int_0^1 [(Q')^2 + (P')^2] - \frac{1}{4}\int_0^1 (Q^2+P^2)$$

この場合，対応する偏微分方程式を（周期境界条件付きの）focussing cubic Schrödinger system といい，これによって決まる Q, P を focussing flow という（このケースは大変難しい）．粒子密度を固定して周期 L を無限大にしたときの熱力学極限を問題とする．Lebowitz-Rose-Speer (1989) は，数値計算によりある種の相転移が起こると考え，一方 Chorin (1994) はブラウン運動を用いたシュミレーションでこれと逆の結論（つまり相転移は起こらない）を唱えた．McKean 教授は参

考文献3. において，熱力学極限は存在しないことを主張したが，最近，氏の学生であるB. Rider氏はensembleはすべて$Q \equiv P \equiv 0$という自明な解に落ち込むことを証明した.（教授の言葉を借りると，"All the big boys were wrong."であった.）

C. 招聘の成果報告

平成１４年度数理解析研究所プロジェクト研究「Stochastic Analysis and Related Topics」の大きな柱として「International Symposium on Stochastic Analysis and Related Topics 」が企画され，組織委員会により招待講演者の一人としてMcKean教授が選ばれた．組織委員会からの招聘依頼をMcKean教授が快諾され，今回の来日となった．

Itô-McKeanに代表されるMcKean教授の数々の業績について確率論研究者で知らない人はいないが，今回McKean教授が講演された，確率論を用いたnonlinear Schrödinger equationの解析については，国内確率論研究者に造詣の深い人は少ない．今回，教授が多くの確率論研究者の前で近年の研究を講演されたことにより，この方面の研究に於ける確率過程の重要性が再認識されたものと報告者は考える．

研究集会でMcKean教授は，講演に先立って伊藤清先生の米寿をお祝いするスピーチを された．このスピーチを初めとして，いろいろな形で確率論の流れ・歴史を教授ご自身からお伺いすることができたことも大変有意義で貴重な体験であった．　伊藤先生はこの研究集会に部分的ながらご参加になられ，McKean教授と再会された．お二人が談笑される様子を拝見できたことは，参加者にとって一生記憶に残る感動的な出来事であった．

D. 参考論文

1. *Cubic Schrödinger: the petit canonical ensemble in action-angle variables* (withVaninsky, K.), Comm. Pure Appl. Math. **50** (1997), 593–622.
2. *Action-angle variables for the cubic Schrödinger equation* (withVaninsky, K.), Comm. Pure Appl. Math. **50** (1997), 489–562.
3. *A Martin boundary connected with the ∞-volume limit of the focussing cubic Schrödinger equation*, Itô's stochastic calculus and probability theory (ed. Ikeda et al.), pp. 251–259, Springer, Tokyo, 1996.
4. *Statistical mechanics of nonlinear wave equations. IV. Cubic Schrödinger*, Comm. Math. Phys. **168** (1995), 479–491; erratum: **173** (1995), 675.

(5) Ali Suleyman ÜSTÜNEL

所属：　ENST Paris, France

職：　Professor

E-mail：　ustunel@res.enst.fr

A. 国内での滞在日程８月３１日　関西空港着

９月１日　京都 → 東京：電気通信大学に於けるセミナーに出席

９月２日　東京 → 京都

９月４日　国際研究集会「International Symposium on

～９月７日　Stochastic Analysis and Related Topics 」に参加・講演

９月１４日　関西空港発

B. 講演報告

場所：京都大学数理解析研究所

日時：９月６日 10:00–10:50

題名：Measure Transport, Monge-Ampere Equation and the Girsanov Theorem on Wiener Spaces

シンポジウム名（あるいはセミナー名）：International Symposium on Stochastic Analysis and Related Topics

（シンポジウムのプログラムについては別紙参照.）
講演内容：W をポーランド空間，ρ と ν を W 上の Borel 確率測度とする．$W \times W$ 上のコスト関数 c が与えられたとき，$T\rho = \nu$ を満たす写像 $T : W \to W$ で

$$\int_W c(x, T(x))\, d\rho(x)$$

を最小にするものの存在及び特徴付けを示すという古典的な問題　(Monge-Ampere 又は Monge-Kantorovitch 問題) は Monge, Appell, Kantorovitch 等により研究され，周辺分布が ρ と ν であるような $W \times W$ 上の測度 β の中で

$$\int_{W \times W} c(x, y)\, d\beta(x, y)$$

を最小にするものを見つけるという問題 (双対 Monge-Kantorovitch 問題) に帰着されるということが知られている．この講演では 抽象 Wiener 空間の枠組みでコスト関数が H-距離の２乗で与えられる場合についての詳しい結果が紹介された．これは Wiener 空間における nonlinear transformation の理論と密接な関連がある．一つの応用として，測度の絶対連続性を保つ W 上の変換 U に対し，弱い仮定の下で $U = R \circ T^{-1}$ (R は測度を不変にする変換，$T = I_W + \nabla\phi$, $\phi \in I\!D_{2,1}$ かつ 1-convex) という分解が成り立つことが述べられた．

C. 招聘の成果報告

平成１４年度数理解析研究所プロジェクト研究「Stochastic Analysis and Related Topics」の大きな柱として「International Symposium on Stochastic Analysis and Related Topics 」が企画され，招待講演者の一人として招待講演者の一人としてÜstünel 教授が選ばれた．組織委員会からの招聘依頼をÜstünel 教授が快諾され，今回の来日となった．

Üstünel 教授は M. Zakai 氏と共同で Wiener 空間上の解析，特に nonlinear transformation の問題について近年精力的な研究を行っている．また最近では D. Feyel 氏との共同研究で Wiener 空間における関数や集合の (H-) 凸性について詳細な理論を展開している．Monge-Kantorovitch 問題のような見かけの異なる古典問題が氏の最新の研究内容と密接に関わっていることを示した本講演は，無限次元空間上の解析を進めるにあたって新しいアプローチを提示したものと言える．特に対数 Sobolev 不等式などの関数不等式と相性の良い H-凸関数が自然に現れてくるあたりは興味深く，Wiener 空間の領域における強エルゴード性に関する問題などに応用を持つ可能性がある．無限次元空間における確率解析については日本でも研究者が多く，Üstünel 教授の講演は各々の研究テーマの遂行に当たっても大いに示唆を与えるものであった．今後，種々の具体的問題を通して Wiener 空間上の解析について更に認識を深めていく必要があるとの共通認識を得ることができ，継続的に研究連絡をとることで合意を得た．

D. 参考論文

1. *The notion of convexity and concavity on Wiener space* (with D. Feyel), Journal of Functional Analysis **176** (2000), 400–428.
2. *Transformation of measure on Wiener space* (with M. Zakai), Springer Monographs in Mathematics, Springer-Verlag, Berlin, 2000.
3. *Measure transport on Wiener space and the Girsanov theorem* (with D. Feyel), C. R. Math. Acad. Sci. Paris **334** (2002), 1025–1028.

(6) Michael RÖCKNER

所属：　Universität Bielefeld, Germany
職：　Professor
E-mail：　roeckner@mathematik.uni-bielefeld.de

A. 国内での滞在日程

9月4日	関西空港着
9月4日 ～9月7日	国際研究集会「International Symposium on Stochastic Analysis and Related Topics 」に参加・講演
9月8日 ～9月10日	国際研究集会「Stochastic analysis and Markov processes」に参加・講演
9月11日	関西空港発

B. 講演報告

場所： 京都大学数理解析研究所
日時： 9月5日 10:00–10:50
題名： L^p-analysis for the Kolmogorov operators of Burgers and Navier-Stokes equations
シンポジウム名（あるいはセミナー名）： International Symposium on Stochastic Analysis and Related Topics
（シンポジウムのプログラムについては別紙参照.）
講演内容：Markov 型の確率微分方程式を考えるとき，形式的には対応する生成作用素と放物型の偏微分方程式が存在する．しかし滑らかな関数に対して定義された（生成）作用素から出発して，対応する Markov 過程の存在と一意性を示すのは必ずしも易しい問題ではない．講演ではこの問題を解決するための以下の手順が提案され，各々の段階について状態空間が無限次元である場合の講演者等による最近の結果が紹介された．

(1) 作用素をある L^p 空間上の閉作用素に拡張する．(2) その作用素が L^p-強連続半群を生成することを示す．(3) 半群が推移密度関数を持つことを示す．(4) 推移密度関数が適当な regularity を持つことを示す．(5) 半群に対応する Markov 過程の存在を示す．(6) Markov 過程の満たす確率微分方程式を求める．(7) 一意性を示す．

具体例として，特に stochastic Burgers equation と stochastic Navier-Stokes equation が取り上げられ，未解決問題に向けての現在までの取り組みについて論じられた．

場所： 神戸研究学園都市大学交流センター UNITY
日時： 9月9日 10:30–11:20
題名： Distorted Brownian motion: some new results and applications to finite particle systems with singular interatcitons
シンポジウム名（あるいはセミナー名）： Stochastic analysis and Markov processes
講演内容：相互作用を持つ有限個の粒子の運動を表す確率微分方程式

$$dX_t = \sqrt{2}dW_t + \frac{\nabla\rho}{\rho}(X_t)\,dt, \quad X_0 = x \in I\!R^d$$

について考える．この講演では特に ρ にあまり滑らかさを仮定せずに（これは相互作用が特異的であることに対応する），すべての出発点に対して解が構成できることを Dirichlet 形式の理論を経由して示す．この場合付随する Markov 半群は一般には Feller 半群になるかどうか定かでないが，L^p-強 Feller property と呼ばれる性質を満たすことがいえ，通常 Dirichlet 形式から確率過程を構成する際に生じる出発点の除外集合をなくすことが出来る．他の応用例として，random media におけるある拡散過程がすべての出発点から構成できることについても述べる．

C. 招聘の成果報告

平成14年度数理解析研究所プロジェクト研究「Stochastic Analysis and Related Topics」の大きな柱として「International Symposium on Stochastic Analysis and Related Topics 」が企画され，招待講演者の一人として Dirichlet 形式の理論をベースに数理物理学・ホワイトノイズ解析な

どの分野において精力的な研究活動を行っている Röckner 教授が選ばれた．組織委員会からの招聘依頼を Röckner 教授が快諾され，今回の来日となった．
確率微分方程式と対応する生成作用素との関係，及び Markov 過程が全ての出発点から構成できるかという問題は，古典的であるが（何らかの意味で）無限次元的な要素を含む場合や，係数などの regularity が悪い場合には解明されていない部分が多く残されている微妙で困難な問題である．このような状況は例えば無限粒子系のモデルで自然に現れ，様々な研究がなされているものの理論の完成というにはまだ程遠いのが現状である．

氏のアプローチは Dirichlet 形式を経由するもので，1つの手法は Feller property に準じた性質を導出することにより，連続性を用いて通常生じる容量0の除外集合を無くそうというものである．状態空間が有限次元の場合はかなり有効な手段であると思われる．状態空間が無限次元の場合 Feller property はあまり期待できないが，モデルの特殊性を用いて半群の何らかの位相的な性質を導き出すことが出来れば同様の議論が通用する可能性がある．

一方，準正則 Dirichlet 形式の一般論から除外集合を除いた出発点からは常に Markov 過程は構成でき，それが元の確率微分方程式を満たすことは多くの場合比較的標準的な議論により示すことが出来る．サンプルパスの挙動を詳しく調べることで除外集合を無くすという方針ももちろん考えられ，上述の方法が解析的なものであるのに対して より確率論的な方法であるといえるだろう．氏の結果はこのような方向性の研究に対してもその実現可能性についての認識を深めるものであり，関連分野の研究者にとって少なからぬ影響を与えたといえる．

Dirichlet 形式に関連した最近の研究は，一般理論は一段落し具体的なモデルの解析へ移っている印象が報告者にはあったが，講演で言及されたような基礎理論のレベルでの研究で論文を量産する氏の剛腕ぶりには，研究のあり方としても啓発される所が多かった．

D. 参考論文

1. *On regularity of transition functions and invariant measures of singular diffusions under minimal conditions*, (with V. I. Bogachev and N. V. Krylov), Comm. PDE **26** (2001), 2037-2080.
2. *Invariant measures of diffusion processes: regularity, existence and uniqueness problems*, (with V. I. Bogachev), Stochastic partial differential equations and applications, 69-87.
3. *Singular dissipative stochastic equations in Hilbert spaces*, (with G. Da Prato), to appear in Prob. Th. Rel. Fields.
4. *Uniqueness of solutions of elliptic equations and uniqueness of invariant measures of diffusions*, (with V. I. Bogachev and W. Stannat), to appear in Matem. Sbornik.
5. *Strong Feller properties for distorted Brownian motion and applications to finite particle systems with singular interactions*, (with S. Albeverio and Y. Kondratiev), to appear in Contemporary Mathematics, AMS.
6. *Symmetrizing measures for infinite dimensional diffusions: an analytic approach*, (with S. Albeverio and Y. G. Kondratiev), to appear in Proceedings of "Geometric analysis and nonlinear partial differential equations".
7. *On weak parabolic equations for propability measures*, (with V. I. Bogachev and G. Da Prato), to appear in Doklady Math. Russian Acad. Sci.
8. *Ivariant measures of stochastic gradient systems in Riemannian manifolds and Gibbs measures*, (with V. I. Bogachev and F.-Y. Wang), to appear in Doklady Math. Russian Acad. Sci.
9. *On L^p-uniqueness and essential self-adjointness of symmetric diffusion operators on Riemannian manifolds*, (with V. I. Bogachev), preprint.

(7) Feng-Yu WANG

所属： Beijin Normal University, China
職： Professor
E-mail： wangfy@bnu.edu.cn

A. 国内での滞在日程

2002年10月29日	大阪関西空港着 (来日)
2002年11月1日	大阪大学理学部にて講演
2002年11月4日	大阪発 京都着
2002年11月6日–8日	数理解析研究所における研究集会「Stochastic analysis in infinite dimensioanl spaces」に出席・講演
2002年11月11日	大阪関西空港発 (帰国)

B. 講演報告

1. 大阪大学での講演

"Probability distance inequalities on Riemannian manifolds and path spaces"

この講演は次の不等式

$$\frac{\mu(f^2) - \mu(f^p)^{2/p}}{2-p} \leq C\mathcal{E}(f,f)$$

から

$$W_p(f\mu, \mu) \leq p\sqrt{\frac{C(\mu(f^{2/p}) - 1)}{2-p}}, \quad f \geq 0, \ \mu(f) = 1$$

が従うことを示すことが主要な目的であった．ここに $\mathcal{E}$ は Dirichlet 形式であり，W_p は p-次の Wasserstein distance である．ここで使われる手法は Otto-Villani の coupling の技法である．この結果を使って，リーマン多様体の場合への応用と，さらに道の空間の場合への応用が述べられた．

2. 数理解析研究所での講演

"Gradient estimates of Dirichlet heat semigroups and application to isoperimetric inequalities"

この講演ではリーマン多様体の上の熱核に対して

$$\|\nabla P_t f\|_\infty \leq \frac{C}{\sqrt{t}\|f\|_\infty}$$

が成立することが報告された．対象とする生成作用素は $L = \Delta + Z$ の形のものである．ここに Δ は Laplace-Beltrami 作用素，Z は1階の微分作用素である．この不等式は境界のない完備な多様体の場合に，曲率に対する下からの評価を仮定して成立することが既に知られている．ここではこれを一般化し，境界がある場合を許し，境界の第2基本形式に対する下からの有界性を仮定して同じ不等式が成立することが示されている．さらにこれを用いて等周不等式への応用も述べられた．

C. 招聘の成果報告

Dirichlet 形式の枠組みによる Poincaré の不等式，対数 Sobolev 不等式，さらに基本解の評価など，日本においても会田，日野などの研究がある．特に weak Poincaé 不等式をの研究は先進的なものであった．これらの精密化や，各種の同値条件が研究されているが，Wang 教授の研究はこれらに関連し，Poincaé 不等式と対数 Sobolev 不等式の中間的なものを考察し，さらに輸送不等式，等周不等式などへの応用を目指したものである．これらは日本の研究者にも示唆することが多く，最近の結果に関する情報交換なども行うことが出来実りの多いものであった．

D. 参考論文

1. F.-Y. Wang, Probability distance inequalities on Riemannian manifolds and path spaces, *J. Funct. Anal.*, **206** (2004), 167–190.

2. F.-Y. Wang, Weak Poincaré inequalities on path spaces, *Int. Math. Res. Not.*, (2004), no. 2, 89–108.
3. F.-Y. Wang, Gradient estimates of Dirichlet heat semigroups and application to isoperimetric inequalities, *Ann. Probab.*, **32** (2004), 424–440.

(8) José A. RAMÍREZ

所属： Cornell University, U.S.A.
職： H.C. Wang Assistant Professor
E-mail： ramirez@math.cornell.edu

A. 国内での滞在日程

平成 14 年 11 月 1 日　関西国際空港着（来日）
平成 14 年 11 月 1 日　京都着
平成 14 年 11 月 6 日-8 日　研究集会「無限次元空間上の確率解析」に出席，講演
平成 14 年 11 月 10 日　京都発
平成 14 年 11 月 10 日　関西国際空港発（帰国）

B. 講演報告

場所： 京都大学数理解析研究所
日時： 11 月 6 日 13:15–14:15
題名： Short time asymptotics of heat kernels on Dirichlet spaces
シンポジウム名（あるいはセミナー名）： 研究集会「無限次元空間上の確率解析」(Stochastic Analysis in Infinite Dimensional Spaces)

講演内容：熱核密度に関する（短時間）漸近評価についてはこれまで多くの研究がなされてきているが，一般理論としてもまだ未解明な部分が多く残されているテーマである．最近では，底空間が多様体とは限らず Sobolev 型の不等式などの性質の良い解析的評価を持たない場合でも，ある程度の漸近評価が得られるような手法が講演者らにより開発されつつあり，今回紹介された結果もその延長上にある研究である．

結果について述べる．局所コンパクト可分距離空間上の保存的な局所対称 Dirichlet 形式が square field operator の積分の形で表され，対応する Markov 半群が連続な推移密度関数 $p_t(x,y)$ を持つとする．更に上からの弱い on-diagonal 評価

$$(*) \qquad {}^{\exists}\lambda \in (0,1) \ \text{ s.t. } \sup_{0<t<1}\left\{ t^{\lambda} \log\left(\sup_x p_t(x,x)\right)\right\} < \infty \quad {}^{\forall}x$$

を仮定する．このとき，Varadhan 型の評価

$$\lim_{t\to 0} t \log p_t(x,y) = -d^2(x,y)/2$$

($d(x,y)$ は自然に定義される内在距離) が成立するというのが主定理である．“左辺≥右辺” の証明が難しい部分で，講演では証明のアイディアが述べられたほか，仮定 $(*)$ が自然なものであることの説明や，大偏差原理への応用などについて言及がなされた．

C. 招聘の成果報告

J. Ramírez 氏と研究分担者の日野は，独立に同じテーマについて研究を行っていた経緯もあり，2000 年に日野が Cornell 大学を訪問する前後の時期から継続して研究連絡を取り合っている関係にあった．今回の研究集会の開催に際し，確率論の有望な若手研究者として Ramírez 氏に参加を打診したところ快諾を受け，今回の来日が実現する運びとなった．氏が継続して研究を行っている Dirichlet 形式に付随した半群（或いは推移密度関数）の漸近評価については様々なアプローチ

が考えられるが，なるべく技術的な仮定を加えないというのが氏の一貫した方針であり，無限次元空間における拡散過程を研究する際に特にその有効性が示される．今回の講演で紹介された結果は，集合間における推移確率の漸近評価を示した日野との共同研究を発展させ，推移密度についての漸近評価を得たものである．定理自身だけでなく証明方法についても今後さまざまな応用が見込まれる非常に興味深い結果であるといえる．氏との議論によって，証明のテクニカルな部分について知ることが出来たのは大きな収穫であった．また，この結果を発展させたテーマとして，次の話題について議論を行った．

- 漸近評価において収束速度についての情報（主要項の次の項に関するオーダーの評価，x についての一様収束性など）は得られるか．
- 推移密度関数の漸近評価と密接に関連する内在距離について収束の概念を明確にすることで，Gromov 幾何学の確率論的アプローチをどこまで行うことが出来るか．
- 流体力学的極限に関連した幾つかの問題に定理は適用可能か．

これらについては現時点での障害を明らかにすることで解決への足掛かりを探ることができ，新しい研究の展開に向けて有益であった．今後とも継続して意見交換を行っていくことで合意を得た．

D. 参考論文

1. *Short-time asymptotics in Dirichlet spaces*, Comm. Pure Appl. Math. **54** (2001), 259–293.
2. *Small time Gaussian behavior of symmetric diffusion semigroups*, (with M. Hino), to appear in Annals of Probability.

(9) Zhen-Qing CHEN

所属：　University of Washington, U.S.A.
職：　Associate Professor
E-mail：　zchen@math.washington.edu

A. 国内での滞在日程

２００３年2月１６日　関西空港着
2月１７日～２３日　数理解析研究所において熊谷と共同研究
2月２１日　関西確率論セミナーにおいて講演
2月２３日　関西空港発

B. 講演報告

場所：京都大学数学教室３号館５５２室
日時：2月21日 3:30–5:00
題名：Boundary Trace of Reflecting Brownian Motion
シンポジウム名（あるいはセミナー名）：関西確率論セミナー
講演内容：反射壁ブラウン運動は Dirichlet 形式を用いることにより滑らかさのない（然るべき条件を満たす）領域の上でも構成することができる．講演では，有界な uniform domain D 上の反射壁ブラウン運動 $\{X_t\}$ について，

$$P^x(dim_H X(E) = 2dim_H E, \text{ for all Borel sets } E \subset \mathbf{R}_+) = 1 \qquad \forall x \in \bar{D}$$

（ただし $X(E) = \{X_t : t \in E\}$，$dim_H A$ は A の Hausdorff 次元）という形の，次元に関して一様な評価が紹介された．これは２次元ブラウン運動に関する Kaufman の結果の反射壁ブラウン運動への拡張になっている．また，$\{X_t\}$ の ∂D への occupation time のに関する以下の結果も紹介された．

$$dim_H\{t \geq 0 : X_t(\omega) \in \partial D\} = 1 - \frac{n - dim_H \partial D}{2} \qquad P^x - a.s., \ \forall x \in \bar{D}.$$

上の結果とこの結果を合わせると，有界な uniform domain D について

$$dim_H(X[0,\infty) \cap \partial D) = 2 + dim_H \partial D - n \qquad P^x - a.s.,\ \ \forall x \in \bar{D}.$$

特に，２次元の有界な uniform domain について $dim_H(X[0,\infty) \cap \partial D) = dim_H \partial D$ が P^x-a.s. に，任意の $x \in \bar{D}$ で成り立つことが分かる．この結果は，Makarov による以下の結果と対比させると興味深い：$dim_H A = 1$ となる $A \subset \partial D$ が存在して，$X_{T_{\partial D}} \in A$ が a.s. で成り立つ（ただし $T_A = \inf\{t \geq 0 : X_t \in A\}$）．２次元の有界な uniform domain には，２次元 Koch 島のようなフラクタル的なものもあり，∂D の Hausdorff 次元が１より大になるようにもできることに注意（実は，１以上２未満の任意の値 a に対して，∂D の Hausdorff 次元が a であるような有界な uniform domain を構成することができる）．なお，この講演の内容は，Benjamini-Chen-Rohde による共同研究（参考文献参照）の結果である．

C. 招聘の成果報告

Zhen-Qing Chen 氏招聘への経緯

Zhen-Qing Chen 氏は，Dirichlet 形式の理論を用いて反射壁ブラウン運動，安定過程，時間依存する領域上のブラウン運動など様々な対象についてその顕著な性質を導出しており，世界的に見て当該分野における若手のリーダー的な存在の一人である．

招聘者とは，１９９８年に招聘者がバンクーバーに留学した折りに知りあって以来研究連絡を交わす関係にあり，２００２年１月に招聘者がワシントンに行った際に始めた共同研究の一部は，共著の形で現在雑誌に掲載予定である（参考文献参照）．Chen 氏の jump 型の確率過程に関する最新の研究成果のサーベイを受けるとともに，共同研究をさらに推進することを目的として来日を打診した所快諾され，今回の来日となった．

来日中の共同研究・議論

共著の仕事として雑誌掲載予定の研究は，d-set 上の stable-like 確率過程の熱核に関するものである．まずその主結果を簡単に述べる．$\mathbf{R}^n$ 上の閉集合 F は，$c_1 r^d \leq \mu(B(x,r)) \leq c_2 r^d$（$x \in F, r \leq 1$）を満たす F 上のラドン測度 μ が存在するとき d-set であるという．今，d-set F 上に

$$\mathcal{E}^{(\alpha)}(u,v) = \frac{1}{2}\int_{F\times F} \frac{c(x,y)(u(x)-u(y))(v(x)-v(y))}{|x-y|^{d+\alpha}}\mu(dx)\mu(dy)$$

（ただし $0 < \alpha < 2$，$c(\cdot,\cdot)$ は上下から有界な正値対称関数）によって決まる２次形式を与えるとき，$\mathcal{F}^{(\alpha)} = \{u \in L^2 : \mathcal{E}^{(\alpha)}(u,u) < \infty\}$ とおくと $(\mathcal{E}^{(\alpha)}, \mathcal{F}^{(\alpha)})$ は正則な Dirichlet 形式となることが証明され，$\mathcal{F}^{(\alpha)}$ は Besov 空間（あるいは Lipschitz 空間）と呼ばれる関数空間になることが分かる．これに対応する確率過程は jump 型の確率過程であり，その熱核 $p_t(x,y)$ は

$$c_1 \min\left\{t^{-d/\alpha}, \frac{t}{|x-y|^{d+\alpha}}\right\} \leq p_t(x,y) \leq c_2 \min\left\{t^{-d/\alpha}, \frac{t}{|x-y|^{d+\alpha}}\right\}$$

（$0 < t \leq 1$）なる評価を持つ．論文では熱核の Hölder 連続性についても結果を得ている．

今回の共同研究では，F が非有界の場合にこの評価が任意の $0 < t < \infty$ で成り立つことが証明された．これにより，$\alpha = d$ を境に確率過程が再帰的なものと，非再帰的なものに分かれることがわかる．さらに $\alpha \geq 2$ における部分的な結果も得られた．

$$d_w := \sup\{\alpha > 0 : \mathcal{F}^{(\alpha)} \text{is regular in } L^2.\}$$

と定義し（このとき $d_w \geq 2$ である），$0 < \alpha < d_w$ において $(\mathcal{E}^{(\alpha)}, \mathcal{F}^{(\alpha)})$ の熱核の挙動を考察するのである．$\alpha > 2$ のときは，Lipschitz 連続な関数で $\mathcal{F}^{(\alpha)}$ の元となるものが限られてくるために，$0 < \alpha < 2$ のときに用いた議論のいくつかに本質的な修正が必要となる．我々は，$d_w > d$ の場合（強再帰的な場合）について，$\mathcal{F}^{(\alpha)}$ の元がある種の Hölder 連続性を持つことを示し，これを用いて上と同様の熱核の評価を得ることができた．$d_w \leq d$ の場合にどうすればよいかは今のところ不

明である．この他，Chen 氏滞在中に jump 型の確率過程のポテンシャル論的性質，特にこのような確率過程が Harnack の不等式を満たすための条件について議論を交わした．
途中で招聘者がインフルエンザにかかり迷惑をかけることとなったが，短期間で密な議論を交わすことが出来た．

D. 参考論文

1. *Boundary Trace of Reflecting Brownian Motions* (with I. Benjamini and S. Rohde), preprint 2003.
2. *Censored stable processes* (with K. Bogdan and K. Burdzy) , to appear in Probab. Theory Relat. Fields.
3. *Heat kernel estimates for stable-like processes on d-sets* (with T. Kumagai), to appear in Stochastic Process Appl.
4. *Conditional gauge theorem for non-local Feynman-Kac transforms* (with R. Song), Probab. Theory Relat. Fields **125** (2003), 45–72.

平成 15 年度

(10) Laurent SALOFF-COSTE

所属： Cornell University, U.S.A.
職： Professor
E-mail： lsc@math.cornell.edu

A. 国内での滞在日程

２００３年６月２６日　関西空港着
６月３０日　数理研共同研究集会「Potential Theory and Analysis
～７月２日　on Metric Spaces 」に参加・講演
７月５日～８日　東京出張
７月１１日　関西空港発

B. 講演報告

場所： 数理解析研究所　115 号室
日時： 6 月 30 日（月）－ 7 月 2 日（水）
シンポジウム名（あるいはセミナー名）：Potential Theory and Analysis on Metric Spaces
（シンポジウムのプログラムについては別紙参照.）
Saloff-Coste 氏滞在中に数理解析研究所共同研究集会として，上述の研究会を行った（６０名の参加者を得て開かれ１７の講演がなされた）．Saloff-Coste 氏には，２回講演を依頼した．その概要は以下の通りである．
題名：The heat equation on manifolds with ends (Joint work with A. Grigor'yan)
講演内容：多様体上のラプラス作用素について，様々な Harnack 不等式とその同値条件について考える．双曲型 Harnack 不等式が volume doubling 条件および Poincaré 不等式と同値であり (Grigor'yan，Saloff-Coste による)，さらに熱核の Gauss 型評価と等しいことはよく知られている．また，楕円型 Harnack 不等式の方が双曲型 Harnack 不等式より真に弱いことが，近年 Barlow-Bass によって示された（フラクタル的な多様体を用いて示されている．この例では，通常のスケールの Poincaré 不等式が成り立たない）．講演では，モデルとなる多様体として $\mathbf{R}^n$ に $ds^2 = dr^2 + \phi(r)^2 d\theta^2$ という距離を入れた多様体を考え，各々の Harnack 不等式の成立条件を紹介した．結果は次の通り：楕円型 Harnack 不等式の成立条件は，$\phi(r) \le cr$ （特に $\phi(r) = r^\alpha$ のときは，$\alpha \le 1$）．双曲型 Harnack 不等式の成立条件は，$\phi(r) \le cr$ かつ $\int_1^r \phi(s)^{n-1} ds \le cr\phi(r)^{n-1}$ （特に $\phi(r) = r^\alpha$ のときは，$-(n-1)^{-1} < \alpha \le 1$）．この例の場合，volume doubling 条件が成り立てば，２番目の不等式が成立することが分かるので，双曲型 Harnack 不等式が成り立たずに楕円型 Harnack 不等式が

成り立つ場合，volume doubling 条件が成り立たないのである．講演では，縁付き多様体に関する Harnack 不等式の成立条件についても紹介された．
題名： Invariant Laplacians on the infinite dimensional torus: Examples in the theory of local Dirichlet spaces (Joint work with A. Bendikov)
講演内容：無限次元トーラス T^∞ 上の正規化された Haar 測度 μ を考え，作用素 $L=-\sum_{i,j}a_{ij}\partial_i\partial_j$ を考える．ただし (a_{ij}) は，対称で $\xi\neq 0$ のとき $\sum_{i,j}a_{ij}\xi_i\xi_j>0$ を満たすとする．対応する 2 次形式は $\mathcal{E}(f,g)=\int\sum_{ij}a_{ij}\partial_i f\partial_j g d\mu$, $f\in\mathcal{C}$ （$\mathcal{C}$ は smooth cylindrical function 全体 ）と表される．

$$d(x,y)=\sup\{f(x)-f(y):f\in\mathcal{C},\ \sum_{ij}a_{ij}\partial_i f\partial_j f\leq 1\}$$

とおき，以下の性質の成立条件を考察する．
(d): d は有限で連続であり，T^∞ 上の位相を与える．
(AC): 任意の $t>0$ について，推移確率 $p_t(x,dy)$ が μ に対して絶対連続である．
(F): 対応する半群が strong Feller である．
(CK): (AC) かつ density が連続である．
(CK♯): $\lim_{t\to 0}\sup_{y\in K}p_t(x,y)=0$ が，任意のコンパクト集合 K と $x\notin K$ について成り立つ．
(Reg-p) $p\in[1,\infty]$: 領域 Ω 上 $Lu=0$ なる $u\in L^p$ は，Ω 上の連続関数と見なせる．
(L-K) Lévy-Khinchin: $\mathcal{E}$ に対応する拡散過程 $\{X_t\}$ が存在して，
$\overline{\lim}_{t\to 0}d(X_0,X_t)/\sqrt{t\log\log(1/t)}\in(0,\infty)$ を満たす．
この範ちゅうで，(CK) と (F), (Reg-∞) は同じ条件の下で成立し，(CK♯) と (Reg-p) $1\leq p<\infty$, さらに楕円型 Harnack 不等式は同じ条件の下で成立することが示される．$a_{ij}=0$ if $i\neq j$ のとき，diagonal case と呼び，$a_{ii}=:a_i$ とおく．$W(s)=\sharp\{\xi\in\mathbf{Z}^\infty:<A\xi,\xi><s\}$, diagonal case について $N(s)=\sharp\{i:a_i\leq s\}$ とおくとき，以下の結果が紹介された．

	Diagonal case	General
(d)	$\sum_i 1/a_i<\infty$	?
(AC)	$\log N(s)=O(s)$	?
(CK)	$\log N(s)=O(s)$	$\log W(s)=O(s)$
(CK♯)	$N(s)=O(s)$	$\log W(s)=O(\sqrt{s})$
(L-K)	$N(s)=O(\log\log s)$	?

(AC) と (CK) が一般にコンパクト群上の Gaussian semigroup において同値であるか否か（当然，(CK) の方が条件は強い）という問題が，open problem として提示された．

場所： 京都大学数学教室３号館５５２室
日時： ７月４日（金）3:30–5:00
題名： Sample path regularity for Brownian motions on the infinite dimensional torus
シンポジウム名（あるいはセミナー名）：関西確率論セミナー
講演内容：上述の研究会での２番目の講演内容について，より詳しい紹介がされた．興味深い結果の一つとして，ここでは次の結果を挙げておく．T^∞ 上の Gaussian convolution semigroup μ_t について，ある $\lambda\in(0,1)$ が存在して $c_1t^{-\lambda}\leq\log\mu_t(e)\leq c_2t^{-\lambda}$, $t\in(0,1)$ が成り立つことを仮定する（e は原点）．このとき，対応する拡散過程 $\{X_t\}$ が存在して，次が成り立つ．

$$c'_\lambda\leq\underline{\lim}_{t\to 0}\frac{d(X_0,X_t)}{t^{(1-\lambda)/2}}\leq\overline{\lim}_{t\to 0}\frac{d(X_0,X_t)}{t^{(1-\lambda)/2}}\leq C_\lambda$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\sup_{\substack{0<s<t\leq 1\\ t-s<\varepsilon}}\frac{d(X_s,X_t)}{(t-s)^{(1-\lambda)/2}}\leq C_\lambda$$

すなわち，通常の形での重複対数の定理は成立しない．

C. 招聘の成果報告

Saloff-Coste 氏招聘への経緯

Saloff-Coste 氏は，解析学・確率論のいずれにも深い造詣を持ち，その研究内容は，多様体上の大域解析，群上の自己共役作用素（確率過程）の解析をはじめとして，広くポテンシャル論全般に及ぶ．多様体上のラプラス作用素を典型例とする局所型の自己共役作用素が双曲型 Harnack 不等式を満たすための必要十分条件が volume doubling 条件と Poincaré 不等式であることを示した90年代初めの結果（上述）は，幅広い分野の研究者に大きな影響を与え，現在も広く引用されている．

ポテンシャル論に関連した研究会を幅広い分野の研究者の協力を得て開催することの重要性を感じていた招聘者が，研究会における主たる講演者の一人として氏に来日を打診したところ，快く引き受けてもらえ，氏の来日に合わせて上述の共同研究集会を開催する運びとなった．

来日中の共同研究・議論

古典的な双曲型 Harnack 不等式では，時間スケールは空間スケールの2乗であるが，その一般化として，時間スケールを空間スケールの $\beta(\geq 2)$ 乗とした sub-Gaussian type の双曲型 Harnack 不等式（$PHI(\beta)$ と書く）を考える．近年 Barlow-Bass は，グラフにおいて $PHI(\beta)$ が volume doubling 条件，order β の Poincaré 不等式，ある種の Sobolev 型不等式の3条件と同値であることを示した（これは上述した Saloff-Coste 氏らの結果の拡張にもなっている）．招聘者は最近，Barlow 氏，Coulhon 氏とともに strongly recurrent の場合により簡単な同値条件を得ることに成功した．今回 Saloff-Coste 氏から，この証明の技術を用いて volume doubling 条件を満たす tree 上のランダムウォークの熱核の精密な評価を得られるのではないかとの指摘を受け考察した結果，tree の場合は（時間と空間のスケールがより一般の場合にも）volume growth 条件から熱核の評価の情報を得ることが分かった．有効抵抗から決まる距離 $R(\cdot,\cdot)$ を用いると，strongly recurrent の場合にはより一般に $R(\cdot,\cdot)$ に関する volume growth 条件のみから熱核の評価を得ることができるように思われる．

この他，Saloff-Coste 氏から，波動伝播と熱核の関係（Hadamard の idea）に関する最近の情報，群上の Gaussian semigroup の一般論などのサーベイを受けることができ，大変有意義であった．

D. 参考論文

1. *Stability results for Harnack inequalities* (with A. Grigor'yan), preprint 2003.
2. *On the sample paths of diagonal Brownian motions on the infinite dimensional torus* (with A. Bendikov), to appear Ann. Inst. H. Poincaré.
3. *On the sample paths of Brownian motions on compact infinite dimensional groups* (with A. Bendikov), Ann. Probab. **31** (2003), 1464–1493.
4. *On the hypoellipticity of sub-Laplacians on infinite dimensional compact groups* (with A. Bendikov), Forum Math. **15** (2003),135–163.
5. *Dirichlet heat kernel in the exterior of a compact set* (with A. Grigor'yan), Comm. Pure Appl. Math. **55** (2002), 93–133.

(11) Elton P. HSU

所属： Northwestern University, U.S.A.

職： Professor

E-mail： elton@math.northwestern.edu

A. 国内での滞在日程

2003 年 8 月 18 日　福岡着 (来日)

2003 年 8 月 19 日–22 日　確率論サマースクール 出席，講演

2003 年 8 月 23 日　京都着

2003 年 8 月 29 日　京都発

2003 年 8 月 29 日　成田発 (帰国)

B. 講演報告
サマースクールは主に大学院学生を対象としたスクール形式のシンポジウムであるので，リーマン多様体の上のブラウン運動を対象とした基本的な講演をお願いした．内容は，リーマン多様体の上のブラウン運動の確率微分方程式による構成，動径方向に関する比較定理，曲率による爆発の判定法，直交束上での確率微分方程式と確率平行移動，多様体上の確率積分．ここまでは有限次元の話題である．さらにリーマン多様体の上のブラウン運動は，道の空間に測度を定め，またこの空間には微分構造が入るので，無限次元の解析が展開できる．この話題は Hsu 教授による貢献も大きい最近の話題である．スペクトルの跳びの存在や対数 Sobolev 不等式についての解説があった．

Hsu 教授の話は大学院学生を意識した丁寧なものであり，基本的なことにも十分時間を割いた教育的なものであった．その一方で，最近の成果を手際よく紹介するなど中堅の研究者に対しても啓発されるところの多い講演であった．サマースクールの企画としては実りの多いものであった．

その後京都に移動してからは，何回か学生を交えた討論の場を持った．そこでは特に対数 Sobolev 不等式に関連して，Bismut の定理の解説が行われ，Hsu 教授自身による定理の証明の改良が紹介された．

C. 招聘の成果報告
Elton P. Hsu 教授は，幾何学的な観点から確率論を研究している解析学者である．彼の研究は主にリーマン多様体の上のブラウン運動を対象としており，基本解の評価や爆発問題などを研究し，さらにブラウン運動から定まる道の空間上での Ornstein-Uhlenbeck 型の作用素に関する対数 Sobolev 不等式の証明はその重要性が非常に高く評価されている．その後も精力的に研究を続け，この分野での世界をリードしている研究者の一人である．サマースクールのは大学院学生にも有益なものが望ましく，適当な講師を探していたが，Hsu 教授は先鋭的な研究者であるばかりでなく，講演のうまさでも定評があり，講師として適任であると判断した．実際講演は明快で，しかも丁寧なものであり，学生に対して非常に教育効果があった．

また，京都での討論の機会をもてたことは，対数 Sobolev 不等式の証明に対する技術的なコメントなども得られ有益なものであった．

D. 参考論文

1. E. P. Hsu, Quasi-invariance of the Wiener measure on the path space over a compact Riemannian manifold, *J. Funct. Anal.*, **134** (1995), 417–450.
2. E. P. Hsu, Logarithmic Sobolev inequalities on path spaces over Riemannian manifolds, *Comm. Math. Phys.*, **189** (1997), 9–16.
3. E. P. Hsu, Stochastic analysis on manifolds, Graduate Studies in Mathematics, 38. American Mathematical Society, Providence, RI, 2002.

(12) Pablo Augusto FERRARI

所属： Universidade de Sao Paulo, Brazil
職： Professor
E-mail： pablo@ime.usp.br

A. 国内での滞在日程

2003 年 8 月 18 日（月），日本着．
8 月 18 日（月）～ 8 月 22 日（金），「2003 年度確率論サマースクール」に出席，講師として 4 回講演（九州大学）．
8 月 22 日（金）～ 8 月 30 日（土），横浜国大に滞在．その間，8 月 25 日（月）「応用数学研究室セミナー」（横浜国大），8 月 28 日（木）研究集会「格子確率モデルとその周辺」（中央大学）で発表．
8 月 30 日（土）離日．

B. 講演報告

場所：九州大学 工学部本部 9 番教室
日時：2003 年 8 月 18 日（月）～ 8 月 22 日（金）
シンポジウム名：2003 年度 確率論サマースクール

以下，4 回の講演内容を記す．
題名：Construction and perfect simulation of infinite systems
講演内容：マルコフ過程の perfect simulation の構成について考える．関連する具体例として，相互作用する点過程，低温でのイジングモデルのコンツアー，劣臨界での方向性のあるパーコレーション（コンタクトプロセス）などがある．時空間モデルの場合の構成法は，以下の 3 つのステップによる．第 1 段階として，有限体積－有限時間の場合に構成する．第 2 段階は，有限体積－無限時間の場合である．最後の段階として，無限体積－無限時間の場合の構成を行う．基本的なアイデアの一つは，簡単な待ち行列（M/M/1）を考えたとき，何の制約も無く窓口に並ぶ人数の変動を表す確率過程（free process）に対して，サービスを受けている人がいるときはお客が帰る，高々窓口に並ぶ人数が 1 人のプロセス（exclusion process），即ち，free process に対して thinning を行ったプロセスを構成する方法であり，それをより複雑な状況にも適用できるように適宜拡張している．参考文献として，math.PR/9806131，math.PR/9911162 がある．

題名：Harness processes, Gaussian fields and walls
講演内容：Harness process は，d 次元格子点上の実数に値をとる連続時間のマルコフ過程である．ダイナミクスは，推移率 1 で，各点での高さを，近傍の点の高さの平均値に平均 0 のノイズを加えたものに換えることにより決まる．上記の平均は，ある与えられた平行移動不変な確率行列によって取られる．また，ノイズがガウス分布の場合，このプロセスは，Gaussian massless random field に対応する Glauber dynamics に対応する．この harness process の Harris のグラフ表現に対する構成法が解説された．さらにその構成法を用い，様々な条件での収束定理と不変測度に関する結果が紹介された．また，3 種類の離散時間の wall harness process の高さの期待値に関する評価について，一般のノイズの場合とガウスノイズの場合，それぞれに対する新しい結果の紹介もなされた．例えば，Dunlop-Ferrari-Fontes (JSP, Vol.107, pp.705-727, 2002）の上限に対応する結果の若干の改良などが含まれていた．

題名：Poisson trees, succession lines and coalescing random walks
講演内容：ある一様なポアソン過程の点を頂点として持つグラフを構成する．この構成法によると，1，2 次元の場合は，結果として有限な枝を持つ唯一つの木が得られる．それに対して，4 次元以上の場合には，無限に多くの木が構成される．さらに，ポアソン過程の intensity と木達を適当にスケールし直すことにより，この木達が所謂 Brownian web に収束することも，coalescing random walk の性質を用いて示せる．参考文献として，math.PR/0209395 がある．

題名：The net output process of a system with infinitely many queues
講演内容：定常な M/M/1 待ち行列に対してポアソン分布に従う客の到着があった場合，その待ち行列からの出発もポアソン分布に従うという有名な Burke の定理を拡張することにより，zero range process を含むクラスのモデルに適用し，非対称な最近接単純 exclusion process の tagged particle の問題に応用する．具体的には，1 次元のプロセスで，各粒子が右に 1 単位ジャンプする推移率が p で，左に 1 単位ジャンプする推移率が q とする．もしジャンプする先が既に粒子によって占有されている場合は，ジャンプは起こらないものとする．また，$p > q$ を仮定する．ある粒子が原点に存在するという条件の下で，初期分布は場所によらない一定の密度を持つ直積測度とする．このとき，tagged particle の位置を表すプロセスは，ポアソン過程とある種指数的な減少を持つ定常過程によって表せる（ポアソン近似）．この結果を用いることにより，tagged particle の位置を表すプロセスは適当に中心化してスケール変換することにより，ブラウン運動に弱収束することが示せる．

場所：横浜国立大学 理学研究棟 7 階 701 室

日時：2003年8月25日（月）16：00 ～ 17：00
セミナー名：応用数学研究室セミナー
題名：Regenerative construction of processes with long memory
講演内容：ある種の長距離の記憶を持つ場合の定常過程の perfect simulation の構成法が紹介された．一つ一つが独立に $[0,1]$ 上の一様分布に従う無限個の確率変数を用意する．カップリングの手法により，これらを用いてマルコフ連鎖を構成する．このとき，構成されたプロセスは無限の記憶を持つものの，原点での値は上記の一様な確率変数の有限かつランダムな数にしか依存しない．この応用として，binary autoregressions や $[0,1]$ 区間上のマルコフ過程が考えられる．またこの問題の背景には，ある初期状態から出発したセルオートマトンの動的挙動の厳密な解析を行いたいという問題設定が存在する．参考文献として，math.PR/0009204 がある．

場所：中央大学 理工学部 新棟3階3308室
日時：2003年8月28日（月）10:00 ～ 11:00
シンポジウム名：研究集会「格子確率モデルとその周辺」
題名：Escape of mass in a zero range process in random environment
講演内容：場所によってジャンプする推移率が異なるような多次元の zero range process を考える．ランダムな環境下を与える推移率を独立同分布とし，その範囲をある $0 < c < 1$ に対して，$(c,1]$ と仮定する．このとき，ランダムな環境を一つ固定するごとに，この zero range process は，$[0,c]$ に属するパラメータ v によって特徴づけられる不変測度を持つ．無限遠方でサイト上の粒子数が指数的に減少するような配置の集合が確率1で存在するような初期測度から出発したとき，その全ての弱収束極限は，適当な確率測度の順序により，パラメータ $v=c$ の定常測度で上から押さえられる．特に，ある r という値が存在し，大域的な密度が r 以上の直積測度から出発しても，そのプロセスは密度 r をもつ上限の不変測度に収束する．この現象のことを「escape of mass」と呼んでいる．参考文献として，math.PR/9911205 がある．

C. 招聘の成果報告
分担者の今野は1986年に，実数直線上にランダムに無限個の粒子が配置された初期状態から出発した指数 H のフラクショナル・ブラウン運動の tagged particle の位置を表すプロセスが，適当なスケール変換のもとで指数 $H/2$ のフラクショナル・ブラウン運動に弱収束するという結果を発表して以来，tagged particle の様々な問題に興味を持ち続けている．一方，Ferrari 氏は，最近 zero range process などに対して，ポアソン近似の手法を用い，それに対応する非対称な exclusion process の tagged particle の問題について，多くの共同研究者たちと精力的に研究を行っている．実際，今野は1996年に Ferrari 氏の所属するサンパウロ大学に無限粒子系に関する集中講義も兼ね，2ヶ月弱ほど滞在し，tagged particle や相関不等式の問題について議論を行った．その結果，コンタクトプロセスや方向性のあるパーコレーションを含む広いクラスの格子確率モデルに関して，ある種の Harris-FKG 不等式を精密化した新しいタイプの相関不等式を得ることに成功した．その後も定期的に研究連絡を取り続け，今回招聘するに至った．

今回の Ferrari 氏の訪問期間中，彼と集中的に討論することにより，彼らのグループで研究されている「ポアソン近似」の手法の適用限界の感触を得ることが出来た．具体的にはその討論の結果，simple exclusion process と zero range process を特別な場合として含む，「misanthropes process（厭世家過程）」（即ち，粒子が少ない方に移りやすい無限粒子系）に対するポアソン近似が可能であるかどうかについてかなり詳細に検討を行った．実際この無限粒子系のモデルは，1994年に Ferrari 氏が "Shocks in one-dimensional processes in drift" という論文で比較的詳しく紹介しており，具体的に misanthropes process の推移率 $b(n,m)$ が満たすべき条件などが与えられている．

さて，いくつかの新しいアイデアは必要とされると思うが，この misanthropes process に対してもポアソン近似は適用できそうである．もしこのポアソン近似をうまく用いることが出来たとすると，無限レンジの最近接粒子間距離に依存して推移率が決定される（misanthropes の性質から導かれる）反発的な非対称単純 exclusion process に対する tagged particle の位置に関する確

率過程について，中心化して適当にスケール変換するとブラウン運動に弱収束するという極限定理が得られる．また，適用限界がどこまでかという立場では，例えばこの厭世家という条件を逆に「人を好む」(即ち，粒子が多い方に移りやすくする）とした場合にどこまで適用可能なのかを検討することは興味深い課題であろう．

D. 参考論文

1. *Flux fluctuations in the one dimensional nearest neighbors symmetric simple exclusion process*, J. Stat. Phys., **107** (2002), 677-683.
2. *A dynamic one-dimensional interface interacting with a wall*, J. Stat. Phys., **107** (2002), 705-727.
3. *Processes with Long Memory: Regenerative Construction and Perfect Simulation*, Ann. Appl. Probab., **12** (2002), 921-943.
4. *The net output process of a system with infinitely many queues*, Ann. Appl. Probab., **4** (1995), 1129-1144.
5. *Shock fluctuations for the asymmetric simple exclusion process*, Probab. Theory Related Fields, **99** (1994), 305-319.
6. *Current fluctuations for the asymmetric simple exclusion process*, Ann. Probab. **22** (1994), 820-832.

平成 16 年度

(13) Tusheng ZHANG

所属： University of Manchester, U.K.
職： Reader
E-mail： tzhang@maths.man.ac.uk

A. 国内での滞在日程
平成 16 年 8 月 28 日 (土) 関西空港着 (大阪大学滞在)
平成 16 年 9 月 2 日 (木) 関西空港発

B. 講演報告
場所：大阪大学基礎工学部シグマホール
日時：8 月 30 日 (月) − 9 月 1 日 (水)
題名：Stochastic differential equations with non-Lipshitz coefficients
シンポジウム名（あるいはセミナー名）：Jump-type Markov processes and stochastic analysis
講演内容：リプシッツ連続な係数を持つ確率微分方程式については，pathwise uniqueness, 初期値に関する連続依存性が Gronwall lemma を用いて示される．しかし，リプシッツ連続でない係数を持つ確率微分方程式の場合には，1 次元の場合を除いてあまり研究結果が無い．常微分方程式の場合には，Gronwall lemma を拡張して解の一意性を示した結果もあるが，確率微分方程式の場合にはその方法は使えない．

本講演では，係数はリプシッツ連続でないが，modules of continuity に関するある仮定をおいて，pathwise uniqueness, 初期値に関する連続依存性の成立が示された．また，解の合流 (confluence) が起こらないこと，解の連続修正が存在することを示し，解が flow of homeomorphisms を定義することを述べた． modules of continuity に関する仮定は対角線の任意の近傍上で成立すれば良いこと，また次元に依らない方法であることが強調された．最後に，Freidlin-Wentzell 型の大偏差原理が示された．

C. 招聘の成果報告
T.S. Zhang 氏は，ディリクレ形式とマルコフ過程，確率偏微分方程式，大偏差原理など幅広く研究を展開している．分担者 竹田は，Markov 的自己共役拡大の一意性の問題やディリクレ形式の収

束に関して研究連絡を取ったことがあり，Bielefeld に滞在した折には，エネルギー零の加法的汎関数の漸近挙動に関して共同研究をしたことがある．最近では，ドリフトの変換や Feynman-Kac の変換をとおして構成されるディリクレ形式を決定する仕事で共同研究をした．Zhang 氏はその拡張を，桑江，Z.Q. Chen, P. Fitzsimmons, J.Ying ら精力的に行なっている．また，ディリクレ形式の収束についての研究も A. Posilicano と共同研究を行なっている．それらの話題について議論するため，北京での研究集会参加のため帰国中であった Zhang 氏を招聘することにした．

ドリフトの変換や Feynman-Kac の変換によってディリクレ形式がどのように変換されるか調べることは基本的なテーマであるが，その定義域を込めて決定することは一般には易しくない．最近，対称性を保存するドリフトの変換のクラスに対しては，ディリクレ形式の定義域を決定することに成功した．そこでは Lyons-Zheng 分解公式が用いられており，非局所的ディリクレ形式に対して Lyons-Zheng 分解の応用を試みた最初の例になっている．

ディリクレ形式の定義域を決定することで，ドリフトの変換でできる Markov 半群や Feynman-Kac の変換できる Feynman-Kac 半群の性質を調べることができる．実際，T.S. Zhang が Z.Q. Chen との共著論文で示した，ドリフト変換に関するディリクレ形式決定の結果を用いて，対称安定過程を Feynman-Kac 変換してできる半群が，元の安定過程の半群と同様な超縮小性を持つための必要十分条件を与えることができる．そこで考察された Feynman-Kac 変換は，測度に対応する有界変動過程から定義されるものである．Zhang とはエネルギー零加法的汎関数に関して共同研究した経緯があり，有界変動過程をエネルギー零の加法的汎関数に拡張した場合はどうなるか議論した．有界変動過程の場合には，同様な超縮小性を持つための必要十分条件は，時間変更過程の最小固有値が 1 より大きいことで与えられている．そこでは，Feynman-Kac 汎関数の可積分性に関する gauge 定理と，それを証明するためにランダムな時間変更に関する一般論が用いられた．gauge 定理に関しては，R. Getoor により非常に一般の乗法的汎関数に対して拡張されている．しかし，エネルギー零の加法的汎関数の場合拡張するには，時間変更に関する一般論が使えないために全く違った方法が必要になると思われる．時間変更過程の最小固有値に代わる量として何をとればよいか今後の課題である．議論を深めていきたい．

D. 参考論文

1. *Girsanov and Feynman-Kac type transformations for symmetric Markov processes*, Ann. Inst. H. Poincaré Probab. Statist., **38** (2002), 475-505 (with Z.Q. Chen).
2. *Lower order perturbations of Dirichlet processes*, Forum Math. **15**, (2003), 285-297 (with M. Röckner).
3. *Absolute continuity of symmetric Markov processes*, Ann. Probab. **32** (2004), 2067-2098 (with Z.Q. Chen, P. Fitzsimmons, M. Takeda, J. Ying).
4. *Convergence of symmetric diffusions on Wiener spaces*, Acta Math. Appl. Sin. Engl. Ser. **20** (2004), 19-24 (with A. Posilicano).

(14) Zdzislaw BRZEŹNIAK

所属： Department Mathematics, The University of Hull, U.K.
職： Reader
E-mail： z.brzezniak@maths.hull.ac.uk

A. 国内での滞在日程
2005 年 1 月 2 日 ： 福岡空港着、佐賀着
2005 年 1 月 3 日-5 日： 佐賀大学にて研究
2005 年 1 月 6 日 ： 佐賀出発、大阪着
2005 年 1 月 7 日-9 日： 大阪大学での研究会「確率解析とその周辺」にて講演と討論
2005 年 1 月 9 日 ： 大阪出発、京都着
2005 年 1 月 10 日-12 日： 京都大学にて研究

2005年1月13日　：京都出発、佐賀着
2005年1月14日-15日：佐賀大学にて研究
2005年1月16日　：佐賀出発、福岡着
2005年1月17日　：福岡空港から帰英

B. 講演報告

場所：大阪大学基礎工学部
日時：2005年1月8日 11:00-11:50
題名：Stochastic Nonlinear Beam Equation
シンポジウム名：「確率解析とその周辺」
講演内容：物理学における確率光線方程式を一般化して，ヒルベルト空間上の非線形確率方程式の枠組みで捕らえ，その大域弱解の一意的存在と，ある条件の下での上からの評価を与えた．扱う方程式は

$$x_{tt}+A^2x+f(x,x_t)+m(|B^{1/2}x|^2)Bx=\sigma(x,x_t)\dot{W},$$

$x(0)=x_0,\quad x_t(0)=x_1$ の形のものである．ここに，A と B は可分実ヒルベルト空間 H 上の自己共役作用素で，$B>0$, $D(A)\subset D(B)$, $B\in\mathcal{L}(D(A),H)$ とする．また，$W(t)$, $t\geq 0$ は別の可分実ヒルベルト空間 G 上の cylindrical Wienar 過程である．さらに，関数 $m:[0,\infty)\to[0,\infty)$ は C^1 級，$f:D(A)\times H\to H$ は局所 Lipschitz 写像で，ある不等式をみたすとし，$\sigma:D(A)\times H\to\mathcal{L}_2(G,H)$ は局所 Lipschitz で線形増大より小さいとする．最後に，$(x_0,x_1)\in D(A)\times H$ である．これを確率光線方程式に応用するときは，H としてソボレフ空間をとる．

場所：佐賀大学理工学部
日時：2005年1月14日 1630-1800
題名：Stochastic Odes and Pdes on Manifolds
セミナー名：九州確率論セミナー
リーマン多様体上のループ空間に値をとる”ブラウン運動”の構成を，多様体のユークリッド空間への埋め込みと，それに関連する確率微分方程式を解くことにより行った．リーマン空間 M が，Nash の定理により $\mathbb{R}^d$ に等距離的に埋め込まれているとする．$\pi:\mathbb{R}^d\to\mathcal{L}(\mathbb{R}^d,\mathbb{R}^d)$ を $m\in M$ に対しては，$\pi(m)$ が $\mathbb{R}^d$ から T_mM への直交射影となるような滑らかな写像とする．W_t, $t\geq 0$ を $E=W^{\theta,p}(S^1,\mathbb{R}^d)$ に値をとる”ブラウン運動”とする．このとき，$1/p<\theta<1/2$ ならば，E 上の確率微分方程式

$$dX_t=\Pi(X_t)\circ dW_t,\qquad X_0=\gamma\in E$$

は E の中に唯一つの解をもつ．さらに，γ が $\mathcal{M}=W^{\theta,p}(S^1,M)$ の元ならば，X_t も $\mathcal{M}$ の元である．ただし，各 $s\in S^1$ に対して，$\Pi(X_t)\circ dW_t|_s=\pi(X_t(s))\circ dW_t(s)$ である．なお，この構成法は，像空間が $\mathbb{R}^1$ のときの Γ-マルチンゲールがみたす確率微分方程式を E で考えたものについても有効である．

C. 招聘の成果報告
Zdzislaw Brzeźniak 氏と，本研究の研究分担者 小倉幸雄とは1992年に Warwick 大学で会って以来の知己で，ともに多様体上の確率過程という共通のテーマに興味を持っている．その後，いくつかのシンポジウムで会う度毎に，お互いの仕事をより深く知り，出来れば共同研究に発展させたいと話していた．この度，それに向けての一つの機会が得られたことは有意義であった．例えば，氏の行ってきた確率非線形熱方程式の解に存在や，ループ空間上の確率微分方程式について，その証明のアイディアと，小倉の崩壊する多様体上の拡散過程についてのアイディアの情報交換ができたことは，今後の研究の発展に有意義であった．Brzeźniak 氏はまた，研究集会「確率解析とその周辺」や九州確率論セミナーで講演と討論を行い，参加者に新たな情報と刺激を与えた．特に研究集会では，氏自身の講演についてのみでなく，他の講演についての討論にも積極的に参加し，有意義な助言を与えた．

Brzeźniak 氏の来日中の講演と討論の結果，次のような研究テーマがあることが確認された．先ず，氏は像空間が $\mathbb{R}^1$ のときの Γ-マルチンゲールがみたす確率微分方程式をループ空間上に拡張して，解の一意的存在を得ているが，これを像空間が一般の非正曲率の多様体の場合に拡張することである．これは，多様体上のループ空間から非正曲率空間への写像のホモトピー類の中でエネルギーを最小にする写像，謂わば調和写像の存在とその性質に関わる問題で，興味深いものと思われる．次に，多様体が崩壊する場合に，氏の構成したループ空間上の "ブラウン運動" がどのような振る舞いをするかを調べることである．さらに，これを上で述べた Γ マルチンゲールに付随する確率過程について調べることである．後者の問題については，加須栄篤がある多様体のクラスについて，調和写像の族のプレコンパクト性を得ており，またそれに付随する確率過程のプレコンパクト性については小倉のノートがある．この加須栄の結果をループ空間の場合に拡張できるか，またそのときに対応する確率過程のプレコンパクト性が得られるかという問題である．また，この理論の興味ある具体例として，多様体の筒近傍を退化させる場合の問題があるが，これに関してはその上のブラウン運動についての 調べた Nadezda A. Sidorova, Oleg G. Smolyanov, Heirich v. Weizäcker, Olaf Winttich の 4 人の共著の論文が参考になることが確認された．

D. 参考論文

1. *Stochastic nonlinear beam equations*, in collaboration with B Maslowski and J Seidler; to appear in PTRF (Probability Theory and Related Fields)
2. *Wong Zakai Theorem on Loop Manifolds*, a joint work with A. Carroll, in Séminaire de Probabilités XXXVII, 2003, ed. M. Ledoux, 251-289.
3. *Stochastic differential equations on infinite product of loop manifolds*, a joint work with S. Albeverio and A. Daletski, Bull. Sci. Math. **127**(2003), 649-667.
4. *Space-time Regularity for linear stochastic evolution equations driven by spatially homogeneous noise*, a joint work with J. van Neerven, J. Math. Kyoto Univ. **43**(2003), 275-317.
5. *Stochastic differential equations on Banach manifolds; applications to diffusions on loop spaces*, in collaboration with K D Elworthy, Method Funct. Anal. Topology **6**(2000), 43-84.